一瞬の利息　連続複利と極限値

第３話で、すでに利息計算について解説しました。ここでは，利息計算を一般化し、更に数学的なアプローチをします。

金利の定義　「元金１円を１年間預金したときの利息」を年利といい、金利とは普通この年利のことを指します。

１．単利計算

■　元金 10,000 円を金利 0.1（＝10%）で２年間預金した場合

利息＝$10{,}000 \times 0.1 \times 2 = 2{,}000$　⇒　元金+利息＝$10{,}000 + 2{,}000 = 12{,}000$ 円

■　元金 10,000 円を金利 0.1（＝10%）で３ヵ月間預金した場合　⇒　３ヵ月＝$\dfrac{1}{4}$年とします。

利息＝$10{,}000 \times 0.1 \times \dfrac{1}{4} = 250$　⇒　元金+利息＝$10{,}000 + 250 = 10{,}250$ 円

■ 一般化　元金Ａ円を金利Ｒ（＝$\dfrac{R}{100}$%）でＴ年間預金した場合

元金+利息＝$A + ART = A(1 + RT)$

元金に$(1 + RT)$を掛ければ計算できることになります。なお以後，元金+利息のことを元利合計と言うことにします。

２．複利計算

同じ金利で預金をくり返すような利息計算です。以下，具体的な計算をしてみましょう。

■　元金 10,000 円を金利 0.1（＝10%）で１年ごとの複利計算で２年間預金した場合

step1　１年間の元利合計を計算

元利合計＝$10{,}000 \times (1 + 0.1 \times 1) = 10{,}000 \times 1.1 = 11{,}000$

step2　step1 で求めた元利合計を新たな元金としてもう１年預金した場合の元利合計

元利合計＝$11{,}000 \times (1 + 0.1 \times 1) = 11{,}000 \times 1.1 = 12{,}100$

これが、元金 10,000 円を金利 0.1（＝10%）で１年ごとの複利計算で２年間預金した場合の元利合計金額となります。

■　元金 10,000 円を金利 0.1（＝10%）で３ヵ月ごとの複利計算で２年間預金した場合

step1　３ヵ月間の元利合計を計算

$$\text{元利合計}＝10{,}000\times(1+0.1\times\frac{1}{4})=10{,}000\times1.025$$

step2　step1 で求めた元利合計を新たな元金として更に３ヵ月間預金した場合の元利合計

$$\text{元利合計}＝(10{,}000\times1.025)\times(1+0.1\times\frac{1}{4})=10{,}000\times1.025^2$$

３ヶ月ごとの複利計算の場合，１年を４回に分割して利息計算をすることになります。よって，２年間では 4×2＝8 回の利息計算になります。以下，同様の計算を step8 までくり返します。

step8　step7 で求めた元利合計を新たな元金として更に３ヵ月間預金した場合の元利合計

$$\text{元利合計}＝(10{,}000\times1.025^7)\times(1+0.1\times\frac{1}{4})=10{,}000\times1.025^8$$

これが、元金 10,000 円を金利 0.1（＝10%）で３ヵ月ごとの複利計算で２年間預金した場合の元利合計金額となります。

■ 一般化　　元金Ａ円を金利Ｒで，１年あたり n 回の複利計算で T 年間預金した場合

$$\text{元利合計}＝A\left(1+\frac{R}{n}\right)^{nT}$$

たとえば，毎日複利の場合　n=365　です。ということは，“１時間ごとの複利”とか“１秒ごとの複利”とかいうものも定義が可能ということです。

■ 極限値の計算　無限に細かい複利計算をしてみましょう。n を無限に大きくします。

すなわち　$$\lim_{n\to\infty}A\left(1+\frac{R}{n}\right)^{nT}=\lim_{n\to\infty}A\left\{\left(1+\frac{R}{n}\right)^{\frac{n}{R}}\right\}^{RT}\quad\cdots\cdots※$$

ところで　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{R}{n}\right)^{\frac{n}{R}}$ において，$t=\frac{n}{R}$　とおくと，

$n\to\infty$ に対し $t\to\infty$ だから　$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{R}{n}\right)^{\frac{n}{R}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$　（e は自然対数の底）

これを利用して※を計算すると　$$\lim_{n\to\infty}A\left\{\left(1+\frac{R}{n}\right)^{\frac{n}{R}}\right\}^{RT}=Ae^{RT}$$

$$\text{無限に細かく複利計算した場合の元利合計}＝Ae^{RT}$$

これを連続複利計算した場合の元利合計といいます。これを使えば，ほんの一瞬預金した場合の元利合計などを求めることができます。

例　10,000 円を連続複利金利 0.01 で 5 秒間預金した場合の元利合計は

$$5\text{秒は}5\times\frac{1}{60}\times\frac{1}{60}\times\frac{1}{24}\times\frac{1}{365}\text{年 だから}$$

$$\text{元利合計}=10{,}000\times e^{\frac{0.01\times 5}{60\times 60\times 24\times 365}}\quad\text{で計算できる。}$$

３．単利と複利どちらが得か

金利に同じ数を使って計算したら，同じ期間預金した場合，明らかに複利計算の方が利息が多くなります。もし，銀行の店頭に次の A，B２つ預金の案内があったら，あなたはどちらを選びますか？

A.　１年の預金　単利 3％

B.　１年の預金　３ヵ月ごと複利 3％

普通，B を選ぶでしょう。つまり，A は無意味な預金で，普通このような２種類の預金が同時に存在することはありません。実は，単利と複利の間には次の関係があります。

預金する時点では，単利と複利とどちらが得ということがないように金利が決まる

つまり，単利と複利は同じ数にはならないのです。そして，最終的な元利合計は単利でも複利でも等しくならなくてはいけません。単利が決まれば複利がきまるし，逆に，複利が決まれば単利も決まってしまいます。単利と連続複利の間にも同じ関係が成り立ちます。

４．単利から連続複利への変換公式

元金A円を単利 r （$=\frac{r}{100}$%）で T 年間の預金を連続複利の預金にする場合，金利をいくらにしたら良いでしょうか。今求めようとしている連続複利を R とすると，次の等式が成立しなければなりません。

$$\text{単利計算の元利合計}\ A(1+rT) = \text{連続複利の元利合計}\ Ae^{RT}$$

これを R について解くと，　$$R=\frac{\log(1+rT)}{T}$$

例　金利 0.1（＝10%）で２年間の預金を連続複利に変換する場合，

$$\frac{\log(1+0.1\times 2)}{2}\quad\text{で求められます。}$$