

# 単利は複利の近似 ~1次の近似式

## 1. 単利計算と複利計算

金利の計算すなわち、利息の計算には単利計算と複利計算がある。元本  $A$ 、金利  $r$ 、期間  $t$  の場合、利息は  $A \times r \times t$  で計算し、これと元本  $A$  との合計すなわち、元利合計は

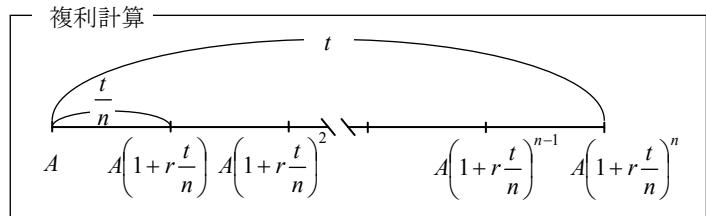
$$A + A \times r \times t = A(1 + rt)$$

とするのが単利計算である。これに対し、期間  $t$  を  $n$  個に分割し、各期間ごとに元利合計を再投資して計算するのが複利計算で、まず、最初の期間  $t/n$  の元利合計を次の式で計算する。

$$A \left( 1 + r \frac{t}{n} \right)$$

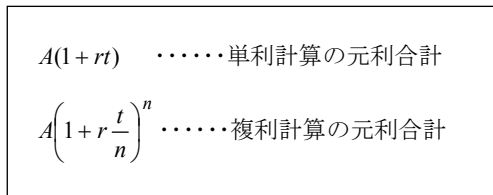
これを次の期間  $t/n$  の元本として再び運用すると、元利合計は次の式で与えられる。

$$A \left( 1 + r \frac{t}{n} \right)^2$$



これを全部で  $n$  回繰り返すことになり、最終的な元利合計は次の式で与えられる。

$$A \left( 1 + r \frac{t}{n} \right)^n$$



ところで、なぜ単利と複利という2通りの計算が存在するのだろうか。また、これら2通りの計算の間にはどのような関係があるのだろうか。

## 2. 曲線≒直線

図1のような曲線の坂道を考えよう。この坂道は右へ進むほどきつくなる。つまり、傾きが大きくなる。しかし、図2のように局所的にみると、直線と見做すことができ、傾きが一定といえる。例えば、今、点Pにおける傾きが2であるならば、点Pより右へ水平に3mずれると曲線上の位置は6m上昇するといった大雑把な計算ができる。更に、点Pが標高20mであるとするならば、6m上昇して26mになるという計算ができる。

このように、曲線であっても、局所的に見れば直線で近似することができることを生活の手段としてよく利用している。遠くから眺めると曲線を描いている牧場の柵も、近くで見れば直線的な木の棒をつないでいることがわかるし、1日商売してみて、その日の売り上げを7倍して、1週間の売り上げの見当をつけるというのも似たような論理である。

図1

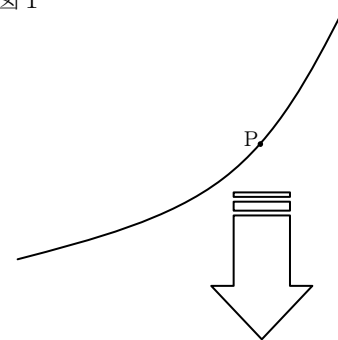
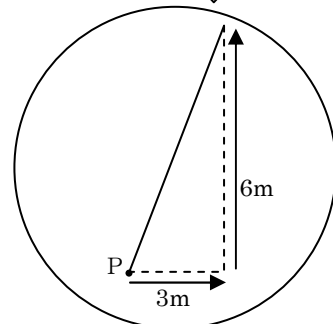


図2



### 3. 1次の近似式

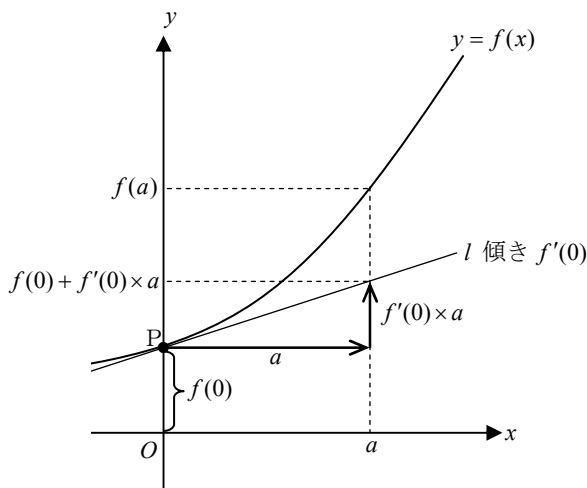
図1の曲線を関数  $y = f(x)$  のグラフで表せたとしよう。この曲線と  $y$  軸との交点を  $P$  とすると点  $P$  の  $y$  座標は  $f(0)$  である。また、点  $P$  における接線  $l$  を引くと、 $l$  の傾きは  $f'(0)$  である。 $f'(0)$  とは、 $f(x)$  を微分して求めた導関数  $f'(x)$  に  $x=0$  を代入したもので、 $f(x)$  の  $x=0$  における微分係数ともいう。

ここで点  $P$  に近い局所的な部分を見れば、曲線  $y = f(x)$  を接線  $l$  で近似することができる。いま、点  $P$  から右へ水平に  $a$  だけ進んだ地点の高さを考えよう。このとき、曲線上を辿れば、その高さ、すなわち  $y$  座標は  $f(a)$  である。一方、接線  $l$  上を辿れば、傾きが  $f'(0)$  で一定だから  $f'(0) \times a$  だけ上昇して、 $y$  座標は  $f(0) + f'(0) \times a$  となる。ここで、 $a$  が  $0$  の近くであれば、それぞれの方法で求めた  $y$  座標がほぼ等しいと見做せて、

$$f(a) \doteq f(0) + f'(0) \times a \quad \dots\dots (*)$$

が成り立つ。 $(*)$  の式を  $f(x)$  の**1次の近似**

**式**という。この近似式を複利計算に応用するとどうなるかというのが今回のテーマである。



### 4. 複利≒単利

元本  $A$  を金利  $r$ 、期間  $t$ 、 $n$  分割の複利で運用した場合の元利合計は  $t$  の関数として

$$f(t) = A \left( 1 + r \frac{t}{n} \right)^n$$

と表せる。そして、導関数  $f'(t)$  を求めると以下のようなになる（合成関数の微分）。

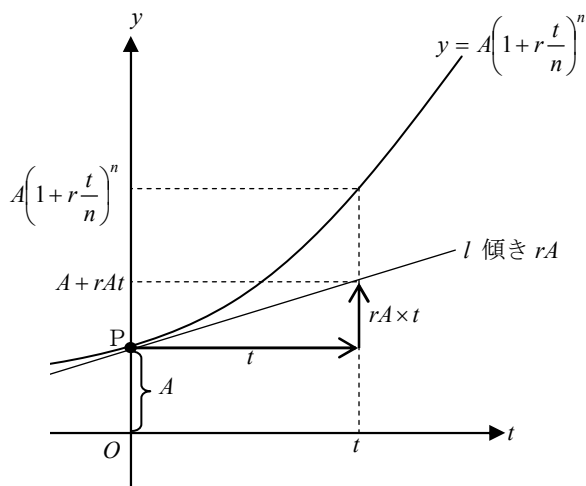
$$f'(t) = rA \left( 1 + r \frac{t}{n} \right)^{n-1}$$

これに、 $t=0$  を代入して

$$f'(0) = rA \left( 1 + r \frac{0}{n} \right)^{n-1} = rA \times 1^{n-1} = rA$$

これが  $t=0$  における微分係数、すなわち接線の傾きである。このとき、 $t$  が短い期間ならば、曲線  $y = f(x)$  を接線で近似できて  $f(t) \doteq f(0) + f'(0) \times t$  だから、

$$A \left( 1 + r \frac{t}{n} \right)^n \doteq A + rAt = A(1 + rt)$$



すなわち、元本  $A$  を金利  $r$ 、期間  $t$ 、 $n$  分割の複利で運用した場合の元利合計は、 $A(1 + rt)$  で近似できることになる。この式は単利計算の式そのものである。つまり、単利計算は複利計算の近似である。本来、物の増え方は曲線的であるが、短い期間であれば難しい計算を省略して、その増え方を直線で近似して捉えた方が効率的である。従って、物の対価であるお金も同様に考えると、厳密には複利計算であっても、短期間であれば単利計算で近似しているといえる。

## 5. 連続複利

元本  $A$  を金利  $r$ 、期間  $t$ 、 $n$  回の複利で運用した場合の元利合計金額の式

$$A\left(1+r\frac{t}{n}\right)^n$$

について、複利で運用する期間を限りなく短くするとどうなるだろう。いいかえると、期間  $t$  を限りなく細かく分割する。すなわち、 $n$  の値を限りなく大きくしたときの極限を考えることになる。

$$A\left(1+r\frac{t}{n}\right)^n = A\left(1+\frac{rt}{n}\right)^{\frac{n}{rt}\times rt} = A\left\{\left(1+\frac{rt}{n}\right)^{\frac{n}{rt}}\right\}^{rt}$$

ここで、 $\frac{n}{rt} = k$  とおくと、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $k \rightarrow \infty$  だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A\left\{\left(1+\frac{rt}{n}\right)^{\frac{n}{rt}}\right\}^{rt} = \lim_{k \rightarrow \infty} A\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}^{rt} = Ae^{rt}$$

※  $e$  は自然対数の底で、 $e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$  により定義される。

$Ae^{rt}$  は、元本  $A$  を金利  $r$ 、期間  $t$  で、連続的に複利で運用した場合の元利合計金額である。これを連続複利の計算といい、このときの金利  $r$  を連続複利の金利という。