令和6年1月27日
第128回 数 実 研

数学B「統計的な推測」を指導してみて

北海道札幌南高等学校　教諭　谷口智哉

1．はじめに

本校では9月中旬から下旬に統計的な推測の授業を行った。私にとって初めて指導した内容であったため、教科書「数学B（数研（数B/710)」中心に指導した。その際に苦慮した点や工夫した点、今後に向けての改善点などをまとめた。

2．単元の計画

（1）指導時間数

全14回の授業の中で少し時間をかけたものの1つが確率変数の独立である。証明に取り組ませることで定着を図った。2つ目は検定である。検定については数Ⅰの仮説検定の考え方を踏まえて少し丁寧に指導した。【資料1】

（2）重視したこと

「なぜこれを学ぶのか」を生徒に意識させることを重視した。統計のよさを伝えることを目標とし、その1つの例として高校では正規分布を扱い、すべて正規分布に関連することであるとして説明した。具体的な例や数学史のことも繰り返し指導した。

> ① 正規分布になっているものの例
> 身長、工業製品の誤差、雨粒の大きさ、テストの点数
> ② 数学史との関連
> ○ ド･モアブルが二項分布の極限が正規分布のようになることを発見
> ○ ラプラスが中心極限定理を証明
> ○ ガウスが天体観測における誤差のふるまいが正規分布になることを示す

3．指導の際の苦慮

（1）確率変数の和の期待値について

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ が成り立つことについて教科書では証明をせずに具体例のみで示しているので授業ではΣを用いた証明を行った。さらに理解を深めるために問題を追加して補った。

> 10本のくじの中に3本の当たりくじがある。このくじから3本のくじを続けて取り出すとき，その中の当たりくじの本数をYとする。確率変数Yの期待値を求めよ。ただし，取り出したくじはもとに戻さないとする。

> 100本のくじの中に30本の当たりくじがある。このくじから10本のくじを続けて取り出すとき，その中の当たりくじの本数をYとする。確率変数Yの期待値を求めよ。ただし，取り出したくじはもとに戻さないとする。

（2）独立な確率変数の積について

確率変数X,Yにおいて

① $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

② $E(XY)=E(X)E(Y)$　　※独立

③ $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$　　※独立

の3つは教科書に載っていたが、積の分散$V(X^{*}Y)$に関する説明は一切なかった。本校生徒には興味関心をもってほしいと考え $V(X^{*}Y)$については追加で指導した。

> 2つの独立な確率変数X, Yについて、次のことを示せ
> (1) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$　を示せ。
> (2) $V(X*Y)=V(X)V(Y)+V(X)E(Y)^2+V(Y)E(X)^2$ を示せ
> ※　一般的に　$V(X*Y)=V(X)V(Y)$ は成り立たない。

（3）正規分布について

高校生にとって、正規分布の確率密度関数はわかりにくいものである。x軸対称であることな

どの式の説明もほどほどに行った。(自然対数の底 e は未習）また標準化の操作については偏差値の求め方と関連して指導した。これは生徒への理解を助けたと感じられた。この単元以降の試験返却では平均点と標準偏差を伝え「偏差値100超える人はいるか」「100点（0点）の人の偏差値はいくつか」を考えさせることで日常生活（?）との関連を図るようにした。

確率変数 X が正規分布 $N(m,\sigma^2)$ に従うとき、

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。　【標準化】

平均点 m，標準偏差 σ のとき，得点 X の偏差値は

$\dfrac{X-m}{\sigma}\times 10+50$ で表される。　【標準化】

（4）標本平均の期待値と標準偏差について

生徒にはやはり「平均の平均」というイメージがわかりにくいものであった。証明においては「独立だからこの証明ができる。そのために少し前の確率変数の独立の勉強をした。」という補足は行い、さらに具体例を用いて指導した。

3個の数$\{2,6,10\}$からなる母集団がある。ここから復元抽出で大きさ2の標本を取り出す。

(1)　母平均 m 、母標準偏差 σ を求めよ。

(2)　母集団から大きさ2の標本を復元抽出するとき、すべての可能な標本を書き出し、それぞれの標本の平均を求めよ。

(3)　(2)の標本の平均 $\overline{X}$ とする。$\overline{X}$ の確率分布を導け

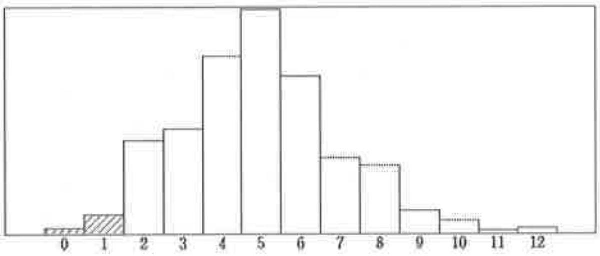
(4)　(3)の確率分布を用いて，$\overline{X}$ の平均 $E(\overline{X})$ と標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ を求めよ。また、$E(\overline{X})=m$，　$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}$ と一致することを確かめよ。

（5）両側検定と片側検定について

数学Ⅰの「仮説検定の考え方」においては片側検定を用いて検討させている。さらに「さいころを30回投げたところ6の目が1回しか出なかった」ときの検証では1回“以下”の数値を調べることで行っていた。そのことからあえて定着率が低かったと思われる数学Ⅰの問題を復習した後に検定では両側を調べたこと、なぜ1回“以下”なのかをこの時間のメインの発問として問題演習をさせながら指導した。

あるさいころを30回投げたところ6の目が1回しか出なかった。このさいころは6の目が出にくいと判断してよいか。仮説検定の考え方を用い，基準となる確率を0.05として考察せよ。ただし，公正なさいころを30回投げて6の目が出た回数を記録する実験を500セット行ったところ次の表のようになったとし，この結果を用いよ。

6の目が出た回数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
度数	3	10	48	54	91	115	81	39	35	12	7	2	3	500



4．今後に向けて

ICTを効果的に活用することができなかったことがまず反省である。二項分布のnを大きくしたヒストグラムだけでなく、モンテカルロ法のシミュレーションなど他の効果的な指導を研究したい。

さらに統計学についての知識が乏しいことも教材研究の中で再確認できた。高校の教科書レベルからもう一歩踏み込んで研究する必要を強く感じた。

参考にしたもの

○WEBサイト

[1]　Smart Lab Life「統計の落とし穴と蜘蛛の糸」（三中信弘　羊土社）

https://www.yodosha.co.jp/smart-lab-life/statics_pitfalls/index.html

[2]　統計WEB

https://bellcurve.jp/statistics/course/

○文献

[3]　概説　確率統計（前園宜彦　サイエンス社）

札幌南高等学校　谷口智哉

統計的な推測　指導記録

時間	内容	目標	メインの問い
1	確率変数、確率分布とは何か	期待値、分散のΣ表記を証明を通して理解する【知・技】	「データの分析」との違いは何か
2	確率変数の変換とその証明	Σをつかった表現を用いて証明ができる【知・技】	「データの分析」との違いは何か
3	同時分布 確率変数の和の期待値	同時分布をつくることができる【知・技】 証明に関心をもつ【主】	
4	確率変数の和の期待値	E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z) のよさを理解する【思】	10本中あたり３本含むくじから元に戻さず３回引くときあたりの本数Yの期待値を工夫して求めよう
5	確率変数の独立・従属 独立な確率変数の期待値	確率変数の独立、事象の独立を理解する【知・技】	事象の独立、確率変数の独立の違いは何か
6	独立な確率変数と分散	証明を通して独立な確率変数についての理解を深める【思考】	V(X*Y)をV(X),V(Y),E(X),E(Y)で表してみよう
7	二項分布 連続型確率変数	二項分布の平均・分散を求めることができる 確率は面積であることを理解する【知・技】	
8	正規分布	正規分布と標準化について理解する【知・技】	偏差値を求める式から標準化が理解できたか
9	正規分布	正規分布を用いて様々な確率や値を求めることができる【知・技】	
10	二項分布による近似 母集団と標本	正規分布のよさを理解する 統計的な調査の用語を知る	正規分布に近似するのと、しないのどちらが楽か
11	母集団と標本の関係を知る	母集団と標本の平均、標準偏差の関係を理解する【知・技】	「平均の期待値」を説明できるか
12	推定	信頼区間を数式で表すことができる【思考】	信頼区間を表す式の中で新しく学んだことはあるか
13	仮説検定・片側検定	検定の方法を理解する【知・技】	なぜ数Ｉの検定は「〇〇以下」だったのか
14	仮説検定・両側検定	片側検定か両側検定かを適切に判断することができる【思考】	片側検定と両側検定、棄却の違いはあるのか

【資料２】　レポートの問題と解答例

1

10本のくじの中に3本の当たりくじがある。このくじから3本のくじを続けて取り出すとき，その中の当たりくじの本数をYとする。確率変数Yの期待値を求めよ。ただし，取り出したくじはもとに戻さないとする。

$i=1,\ 2,\ 3$に対して，i番目に取り出したくじが，

当たりくじのとき　$X_i=1$

当たりくじでないとき　$X_i=0$

とすると，$Y=X_1+X_2+X_3$である。

1本ずつ引くくじ引きにおいて，当たりくじを引く確率，およびはずれくじを引く確率は引く順序に関係なく，それぞれ一定であるから，

$i=1,\ 2,\ 3$の各場合に

$$P(X_i=1)=\frac{3}{10},\quad P(X_i=0)=\frac{7}{10}$$

よって　$E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=1\cdot\frac{3}{10}+0\cdot\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

ゆえに　$E(Y)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=3\cdot\frac{3}{10}=3$

2

100本のくじの中に30本の当たりくじがある。このくじから10本のくじを続けて取り出すとき，その中の当たりくじの本数をYとする。確率変数Yの期待値を求めよ。ただし，取り出したくじはもとに戻さないとする。

$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 10$に対して，$i$番目に取り出したくじが，

当たりくじのとき　$X_i=1$

当たりくじでないとき　$X_i=0$

とすると，$Y=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_{10}$である。

1本ずつ引くくじ引きにおいて，当たりくじを引く確率，およびはずれくじを引く確率は引く順序に関係なく，それぞれ一定であるから，

$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 10$の各場合に

$$P(X_i=1)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10},\quad P(X_i=0)=\frac{7}{10}$$

よって　$E(X_i)=1\cdot\frac{3}{10}+0\cdot\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

ゆえに　$E(Y)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_{10})=10\cdot\frac{3}{10}=3$

3

2つの独立な確率変数X,Yについて、次のことを示せ

(1) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$　を示せ。

(2) $V(X*Y)=V(X)V(Y)+V(X)E(Y)^2+V(Y)E(X)^2$を示せ。

※　一般的に　$V(X*Y)=V(X)V(Y)$は成り立たない。

(1)　証明

$$V(X+Y)=E((X+Y)^2)-\{E(X+Y)\}^2$$
$$=E(X^2+2XY+Y^2)-\{E(X)+E(Y)\}^2$$
$$=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-\{E(X)\}^2+2E(X)E(Y)+E(Y)^2$$

X,Yが独立であるので　$E(XY)=E(X)E(Y)$が成り立つ

よって　$V(X+Y)=E(X^2)-E(X)^2+E(Y^2)-E(Y)^2$

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$　終

(2)　証明

$$V(X*Y)=E(X^2Y^2)-E(XY)^2$$
$$=E(X^2)E(Y^2)-E(X)^2E(Y)^2$$

ここで　$E(X^2)-E(X)^2=V(X)$すなわち$E(X^2)=V(X)+E(X)^2$

$E(Y^2)-E(Y)^2=V(Y)$すなわち$E(Y^2)=V(Y)+E(Y)^2$　である

よって　$V(X*Y)=\{V(X)+E(X)^2\}\{V(Y)+E(Y)^2\}-E(X)^2E(Y)^2$

$V(X*Y)=V(X)V(Y)+V(X)E(Y)^2+V(Y)E(X)^2+E(X)^2E(Y)^2$
$-E(X)^2E(Y)^2$

$V(X*Y)=V(X)V(Y)+V(X)E(Y)^2+V(Y)E(X)^2$　終

4

3個の数{2,6,10}からなる母集団がある。ここから復元抽出で大きさ2の標本を取り出す。

(1)　母平均m、母標準偏差σを求めよ。

(2)　母集団から大きさ2の標本を復元抽出するとき、　すべての可能な標本を書き出し、それぞれの標本の　平均を求めよ。

(3)　(2)の標本の平均$\overline{X}$とする。$\overline{X}$の確率分布を導け

(4)　(3)の確率分布を用いて，$\overline{X}$の平均$E(\overline{X})$と標準偏差$\sigma(\overline{X})$を求めよ。

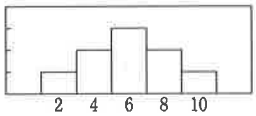
また、$E(\overline{X})=m$，　$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$　と一致することを確かめよ。

(1)　$m=\frac{2+6+10}{3}=6$，　$\sigma=\sqrt{\frac{2^2+6^2+10^2}{3}-6^2}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
$=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

(2)　{2, 2}平均2，　{6, 6}平均6，　{10, 10}　平均10
{2, 6}平均4，　{2, 10}平均6，　{6, 10}　平均8

(3)

$\overline{X}$	2	4	6	8	10	合計
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1



(4)　$E(\overline{X})=2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{2}{9}+8\cdot\frac{1}{9}+10\cdot\frac{1}{9}=6=m$

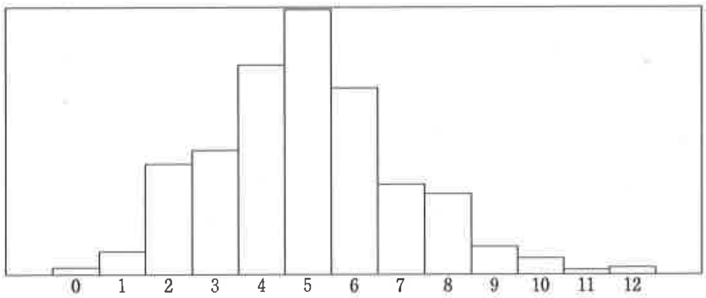
$E(\overline{X}^2)=4\cdot\frac{1}{9}+16\cdot\frac{2}{9}+36\cdot\frac{3}{9}+64\cdot\frac{2}{9}+100\cdot\frac{1}{9}=\frac{124}{3}$　より

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{124}{3}-6^2}=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$

5

あるさいころを30回投げたところ6の目が1回しか出なかった。このさいころは6の目が出にくいと判断してよいか。仮説検定の考え方を用い，基準となる確率を0.05として考察せよ。ただし，公正なさいころを30回投げて6の目が出た回数を記録する実験を500セット行ったところ次の表のようになったとし，この結果を用いよ。

6の目が出た回数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
度数	3	10	48	54	91	115	81	39	35	12	7	2	3	500



[1]　6の目が出にくい
と判断してよいかを考察するため，次の仮定を立てる。

[2]　どの目も全くの偶然で出る

さいころ投げの実験結果を利用すると，6の目が1回以下しか出ない場合の相対度数は

$$\frac{3+10}{500}=0.026$$

0.026は基準となる確率0.05より小さいから，[2]の仮定が正しくなかったと考えられる。

よって，[1]の主張は正しい，つまり6の目が出にくいと判断してよい。