第１３１回数実研レポート　２０２４･１１･３０

畑には何を植える？かまぼこの原料はどうする？

横山 徹

【はじめに】

新しい学習指導要領で金融リテラシーや探究学習、教科「理数探究」が導入されたことから平成１６年度に作成した教材を「金融商品のリスク分散」と「相関を持つ正規分布のデータ作成」も内容に加えて大幅に改訂した。ポートフォリオ理論は相関を持つ複数の確率分布を用いるため、乱数を用いて「事象が起きたもの」としてシミュレーションすることで高校生にも理解できる内容にアレンジした。内容は次の３つである。

①相関を持つ複数の正規分布のデータ作成

②ポートフォリオ理論の概要紹介

③他分野への応用

シミュレーション結果と比較するために確率分布による理論値も掲載した。

【問題１】

２つの金融商品AとBがある。Aの収益は期待値は小さいが、標準偏差も小さい。反対にBはAよりも多くの収益を期待できるが、標準偏差も大きい。収益の期待値はリターンであり、標準偏差はリスクである。そこで２つの金融商品の購入比率を変えることでリスクを回避する選択を行う。ここでは２つの金融商品の間に -0.5 の相関があると仮定する。

表1　1000万当たりのリターン

金融商品	A	B
リターン（収益）	50（万円）	80（万円）
リスク（標準偏差）	5	10
相関係数	-0.5	

【準備】

乱数を使って $N(50,5^2)$、 $N(80,10^2)$ に従い、相関係数が-0.5になるようなデータ X_1 と X_2 をつくる

(1) ＝NORMSINV(RAND())で、 $N(0,1)$ となる1000個のデータ からなるZ_1、 Z_2 をつくる。（表２）

(2) $Y_1=Z_1$　　$Y_2=-0.5Z_1+\sqrt{1-(-0.5)^2}\,Z_2$とすると Y_1 と Y_2 は相関係数が-0.5の標準正規分布になる。

（表３）

表2

	Z1	Z2
1	-0.6334	0.09802
2	0.50102	-1.295
3	1.34461	0.44645
4	-0.7135	0.17914
5	-1.7352	1.37695
・	・	・
・	・	・
998	0.57477	-0.4642
999	-0.5924	-0.3847
1000	-0.4638	-0.3149
平均	-0.04	0.01
分散	0.97	1.01
標準偏差	0.99	1.00
相関係数	-0.03	

表3

	Y1	Y2
1	-0.6334	-0.2318
2	0.50102	-0.871
3	1.34461	1.05894
4	-0.7135	-0.2016
5	-1.7352	0.32488
・	・	・
・	・	・
998	0.57477	-0.6894
999	-0.5924	-0.0369
1000	-0.4638	-0.0408
平均	-0.04	0.03
分散	0.97	1.03
標準偏差	0.99	1.01
相関係数	-0.51	

(3) $X_1=5Y_1+50$

$X_2=10Y_1+80$ とすることで $N(50,5^2)$ と$N(80,10^2)$ に従い、相関係数が-0.5となる２つの正規分布 X_1 とX_2 のデータを得ることができる。（表４）

表4

	X1	X2
1	46.8328	76.8168
2	52.5051	12.9046
3	56.7231	205.894
4	46.4325	79.8394
5	41.3241	132.488
・	・	・
・	・	・
998	52.8739	88.5415
999	47.0379	37.0669
1000	47.6808	49.5411
平均	49.80	80.31
分散	24.33	102.83
標準偏差	4.93	10.14
相関係数	-0.51	
最大値	66.65	113.06
最小値	36.00	48.65

AとBを $(1-k):k$ $(0\leqq k\leqq 1)$ の割合で購入したときの平均（リターン）と標準偏差（リスク）の変化を調べる。

$C=(1-k)A+kB$ として kの値を変化させて平均と標準偏差を調べると表５の値になる。

表5

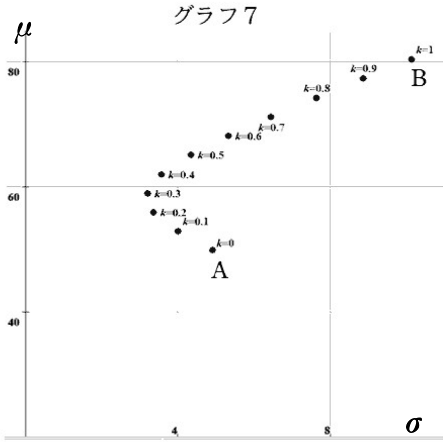
k= 0.1			k= 0.9	
1	50.55110433	・・・・	1	80.29781006
2	53.88259973	・・・・	2	64.90278749
3	58.76509237		3	75.10126278
4	50.3011714	・・・・	4	81.25022514
5	47.25171584		5	94.67298927
・		・・・・		
・				
999	50.29717688	・・・・	999	76.3716482
1000	50.87200212		1000	76.40126357
平均	52.85		平均	77.26
標準偏差	4.01		標準偏差	8.88

kの値を変化させたときの平均と標準偏差をまとめたものが表６とグラフ７である。

表6

k	標準偏差	平均
0	4.93	49.80
0.1	4.01	52.85
0.2	3.38	55.90
＊0.3	***3.22***	***58.95***
0.4	3.59	62.00
0.5	4.35	65.05
0.6	5.34	68.10
0.7	6.46	71.16
0.8	7.65	74.21
0.9	8.88	77.26
1	10.14	80.31

グラフ７



$k=0.3$のときの収益は $k=0$，0.1，0.2 よりも大きいが標準偏差は小さい。合理的な投資家は kの値を 0.3 以上の比率で２つの金融商品に分散投資する。$k\geqq 0.3$ の部分を有効フロンティアという。

【確率分布とポートフォリオ】

定理1
確率変数Xと定数 a b について
① $E(aX+b)=aE(X)+b$
② $V(aX+b)=a^2V(X)$

XとYの同時分布において、周辺分布の平均を μ_x、 μ_y とし、共分散を

$$Cov(X,Y)=\sum_{i=i}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y)p_{ij}$$ または

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)f(x,y)dxdy$$

とすると 次の定理が成り立つ。

定理2
①$Cov(X,Y)=E(XY)-\mu_x\mu_y$
② $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
③ $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$

【問題１】の金融商品AとＢの収益を表す確率変数をX_A、 X_Bとする。

平均は$\mu_A=50$ 、 $\mu_B=80$、標準偏差は $\sigma_A=5$ 、 $\sigma_B=10$ 、相関係数は -0.5 であるから
$X=(1-k)X_A+kX_B$ とおくと

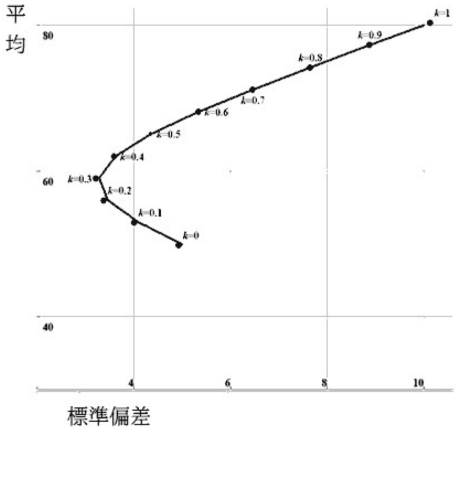
$$\begin{aligned}E(X)&=(1-k)E(X_A)+kE(X_B)\\&=(1-k)\mu_A+k\mu_B\\&=50(1-k)+80k\\&=50+30k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(X)&=V((1-k)X_A)+V(X_B)\\&\quad+2Cov((1-k)X_A,kX_B)\\&=25(1-k)^2+100k^2-50(1-k)k\\&=175k^2-100k+25\end{aligned}$$

グラフ８は $\sqrt{V(X)}=\sigma$ と $E(X)=\mu$として上式をグラフにしたものであり、そこに表６のデータを重ねて表示した。

また、上式でkの値を変化させて表６の値と比較したものが表９である。

グラフ８



理論式の頂点は$k=0.29$で、有効フロンティアは $k\geqq0.29$ になるが、こちらも表６とほぼ同じ値になっている。

表9

k	平均	標準偏差
0	50(49.80)	5.00(4.93)
0.1	53(52.85)	4.09(4.01)
0.2	56(55.90)	3.46(3.38)
0.3	59(58.95)	3.28(3.22)
0.4	62(62.00)	3.61(3.59)
0.5	65(62.05)	4.33(4.35)
0.6	68(68.10)	5.29(5.34)
0.7	71(71.16)	6.38(6.46)
0.8	74(74.21)	7.55(7.65)
0.9	77(77.26)	8.76(8.88)
1	80(80.31)	10.00(10.14)

＊括弧内は表６の値

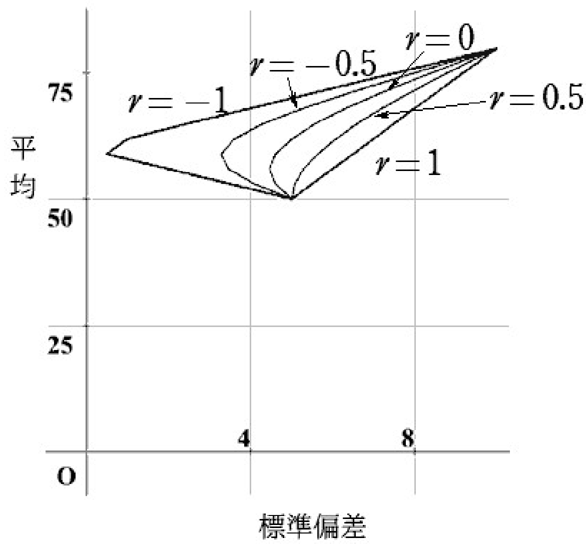
理論値を求めるために定理２を用いたが、数学Bで学習するのはXとYが独立の場合の下記の定理２’までである。

定理2’
① $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
② $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

しかしながらグラフ８、表９の通り、乱数を用いたシミュレーションでも理論値に近い結果を得ることができる。

【問題１】と同じ平均と標準偏差で相関係数ｒの値を -1 から１まで変化させたものがグラフ１０である。

グラフ１０

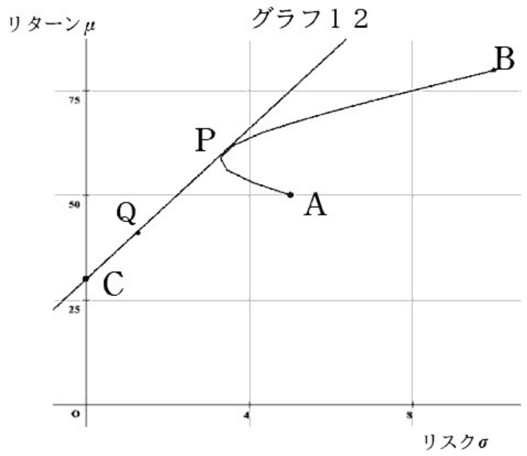


相関係数が正の値でもリスク分散効果は現れるが、負になると効果は大きくなる。

【問題２】
表 １１で金融商品 C をリスクのない公共債とするとCは縦軸上の定点になる。

表１１　1000万当たりのリターン

	A	B	C(国債等)
リターン（収益）	50（万円）	80（万円）	30（万円）
リスク（標準偏差）	5	10	0
相関係数	-0.5		＊＊＊



公共債にはリスクは（ほとんど）ないが、リターンも少ない。そこで多少のリスクを容認して金融商品A, Bを組み込んだポートフォリオを考える。【問題１】ではAとBのポートフォリオを

$$X=(1-k)X_A+kX_B\,(0\leqq k\leqq 1)$$

として考えた。ここでは公共債も含めて、新たなポートフォリオを考える。

A,B,Cを組み合わせた最適なポートフォリオは定点Cから曲線の有効フロンティアの部分に引いた接線上にあると考えてよい。確率分布による理論値では接するのは $k=0.35$ のときで接点Pは $(3.38, 60.5)$ になる。点Pにおける A と B のポートフォリオではリターンは国債の２倍でありAよりも大きく、リスクはAよりも小さいことが分かる。

安全資産であるCとリスク商品A,BのポートフォリオPに投資する比率は線分CP上で個々に決めればよいことになる。すなわち点 Q が線分 CP を $s:(1-s)$ に内分する点とすると、点 Q の座標は

$$(\sigma、\mu)=(3.38s\,,\ 30+30.5s)$$

で表すことができる。合理的に考える人は $0\leqq s\leqq 1$ の範囲で貯蓄Cとリスク商品Pとの新しいポートフォリオでリスクとリターンの選択をすることになる。

次にシミュレーション結果を用いて計算してみよう。

σとμの値は「確率分布とポートフォリオ」で述べた通り放物線を描くことから座標軸を入れかえて最小二乗法を用いて二次関数で近似することができる。

求める方程式を

$$\sigma=a\mu^2+b\mu+c$$

とし、$\sigma_i=a\mu_i^2+b\mu_i+c+\varepsilon_i$ とおくと残差 ε_i は

$$\varepsilon_i=\sigma_i-(a\mu_i^2+b\mu_i+c)$$

となるから

表13

n	μ_i	σ_i
1	49.80	4.93
2	52.85	4.01
3	55.90	3.38
4	58.95	3.22
5	62.00	3.59
6	65.05	4.35
7	68.10	5.34
8	71.16	6.46
9	74.21	7.65
10	77.26	8.88
11	80.31	10.14

$$\sum_{k=1}^{11}\varepsilon_i^2=\sum_{k=1}^{11}\{\sigma_i-(a\mu_i^2+b\mu_i+c)\}^2$$

を最小にするような a,b,c を求めればよい。詳細は省くが、あとは

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\mu_i^4 & \sum\mu_i^3 & \sum\mu_i^2\\ \sum\mu_i^3 & \sum\mu_i^2 & \sum\mu_i\\ \sum\mu_i^2 & \sum\mu_i & \sum 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum\mu_i^2\sigma_i\\ \sum\mu_i\sigma_i\\ \sum\sigma_i\end{pmatrix}$$

を計算するだけだが・・・・

それでは大変なので、ここは『時短レンチン調理』で処理してみよう。表１３において

$n=4$ のときの $(58.95\quad 3.22)$ を頂点と考え

$$\sigma=a(\mu-58.95)^2+3.22$$

とおき、手抜きついでに

$$\sigma_i=a(\mu_i-58.95)^2+3.22$$

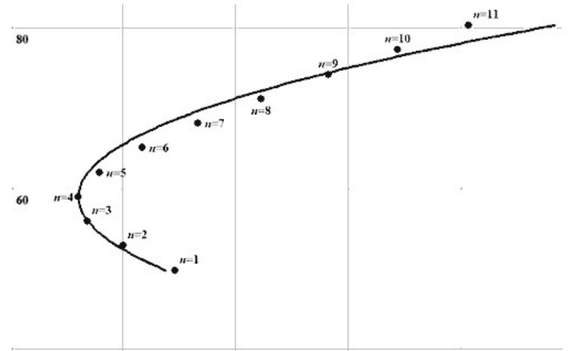
がすべての $n=i$ に対して成り立つものとし、辺々加えると

$$\sum_{k-1}^{11}\sigma_i=a\sum_{k=1}^{11}(\mu_i-58.95)^2+3.22\cdot 11$$

が成り立つ。ここから和を求めて方程式を解くと $a=0.0185$ になる。

$\sigma=0.0185(\mu-58.95)^2+3.22$ とするとグラフ１４になる。

グラフ１４

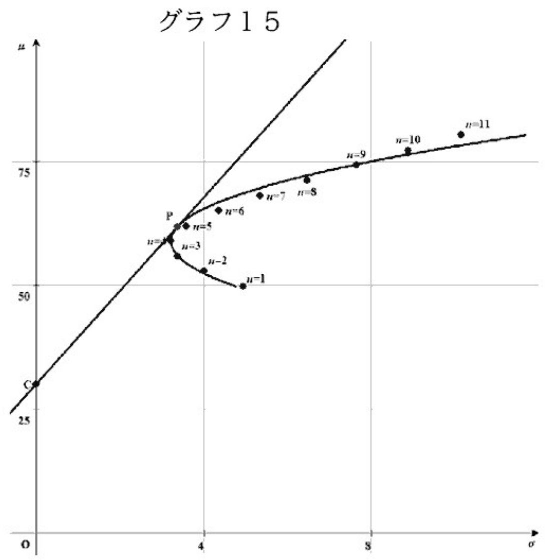


定点C$(0\,,30)$ を通る接線の方程式を $\mu=a\sigma+30$ とおくと $\sigma=0.0185(\mu-58.95)^2+3.22$ に接することから判別式を用いて$a=9.435$になる。よって求める接線の方程式は

$$\mu=9.435\sigma+30$$

で、接点Pの座標は $(3.37\,, 61.8)$になる。（グラフ１５）

Pの座標の理論値は $(3.38, 60.5)$ であり、シミュレーションとしては十分な値であろう。



ここからはポートフォリオ理論の他分野への応用について考える。

【問題3】
表16はA,B２つの作物の平均収益と標準偏差、相関係数を表したものである。どの作物を植えたらよいだろうか？

表16
単位面積あたりの収益

	A	B
平均	50万	80万
標準偏差	5	10
相関係数	-0.5	

２つの作物を植えた時の収益を分かりやすくするために１０００個の正規乱数を発生させて度数分布表にしたものが表１７である。この表をみると Bの作物を植えたいと思うかもしれない。では相関係数が-0.5ならどうだろうか？

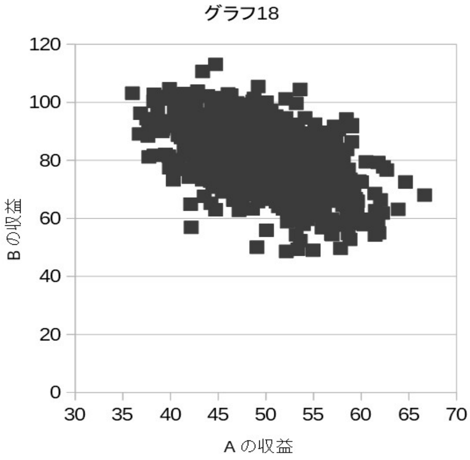
表１６は【問題１】と同じ値を用いたので、データも同じものを使用することにする。そのデータを散布図にしたものがグラフ１８である。

表17

階級		度数	
以上	未満	A	B
0 ～	10	0	0
10 ～	20	0	0
20 ～	30	0	0
30 ～	40	25	0
40 ～	50	504	4
50 ～	60	453	30
60 ～	70	18	110
70 ～	80	0	347
80 ～	90	0	335
90 ～	100	0	147
100 ～		0	27
合計		1000	1000

AはBが不作の年に豊作になることが分かる。収益の少ないAでも一定量を作付けするとBが不作の年にも一定の収益を確保できる。またAは標準偏差がBよりも小さいことから価格の変動も少ない。これで収益が少ないAであっても植えてみようと思う気持ちになるであろう。

ではAとBの２つの作付面積はどのように決定したらよいだろうか？【問題１】の金融商品を作物に変えただけなので、結果は明らである。合理的な生産者はAとBの作付面積を$(1-k):k\ (0 \leqq k \leqq 1)$の割合で作付けしたとき、有効フロンティアである$k \geqq 0.3$（確率分布による理論値では$k \geqq 0.29$）の範囲で選択することになる。



リスク分散は収益だけの問題ではない。【問題５】として後述するが、製品の原料購入でもリスク分散は必要である。輸入原料は調達コストは低くても為替相場や地政学的なリスクがある。一方、国産原料は調達コストは高くても安定的に調達できるので、割高であっても一定量の国産材料を調達する必要がある。原料の調達でもリスク分散は必要なのである。

【問題４】～かまぼこの原料AとB～

ある工場でかまぼこの原料を調達することになった。候補はAとBの２種類の魚であるが、表１９の通り、海水温の関係でAが豊漁の年はBの水揚げが少なく、Bの豊漁の年はAの水揚げが少ない。Aの価格はBより安いが価格変動はBよりも大きい。調達量を事前に決めなければならないとしたらどのような比率で購入したらよいだろうか。

まず「準備」の手順に従って２組の1000個の正規乱数を発生させてから２つの正規分布 $N_A(50,15^2)$ と $N_B(70,5^2)$ を相関係数が -0.7 となるようにデータを生成する。

表19
1キロあたりの単価（円）

	A	B
平均	50	70
標準偏差	15	5
相関係数	-0.7	

表20

	X1	X2
1	73.6603	67.6347
2	62.0214	66.6645
3	71.8561	68.4342
4	37.0097	69.0941
5	24.345	76.8898
	・	・
	・	・
998	69.6152	69.2461
999	56.526	59.6331
1000	38.6681	73.0998
平均	49.54	69.93
分散	230.93	25.61
標準偏差	15.20	5.06
相関係数	-0.70	
最大値	93.60	86.24
最小値	0.90	53.09

最大値	93.60	86.24
最小値	0.90	53.09

表21

階級		度数	
以上	未満	A	B
0 ～	10	7	0
10 ～	20	25	0
20 ～	30	65	0
30 ～	40	183	0
40 ～	50	224	0
50 ～	60	251	27
60 ～	70	155	482
70 ～	80	69	464
80 ～	90	18	27
90 ～	100	3	0
100 ～		0	0
合計		1000	1000

AとBを $(1-k):k$ $(0\leqq k\leqq 1)$ の割合で買い付けた時の平均価格と標準偏差の変化を調べてみよう。

$C=(1-k)A+kB$

として k の値を変化さる。

グラフ22

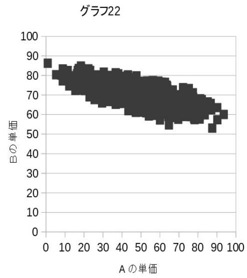
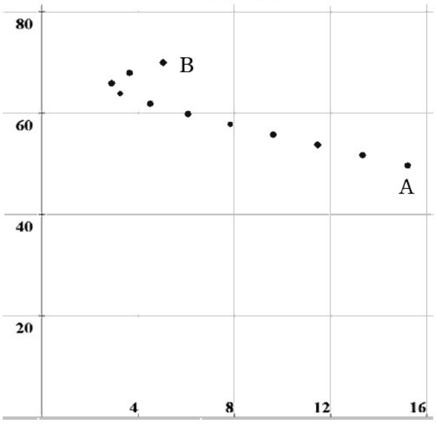


表23

k	標準偏差	平均
0	15.20	49.54
0.1	13.33	51.58
0.2	11.47	53.62
0.3	9.63	55.66
0.4	7.83	57.70
0.5	6.10	59.74
0.6	4.51	61.77
0.7	3.27	63.81
＊0.8	2.90	65.85
0.9	3.65	67.89
1	5.06	69.93

グラフ２４



できるだけ価格の安い原料Aを選びたいが、価格を安く抑えるほど標準偏差は大きく、リスクは増加する。しかし表２３から分かる通り、 $k=1$ ，0.9 での選択肢はない。合理的な経営者は $k\leqq 0.8$ の範囲で原料の買い付けを行う。したがって有効フロンティアは $k\leqq 0.8$ と考えることができる。

【確率分布とポートフォリオ】で説明した通り、確率分布から理論式を求めてみよう。平均は $\mu_A=50$ $\mu_B=70$、標準偏差は $\sigma_A=15$ 、 $\sigma_B=5$ 、相関係数は -0.7 であるから

$X=(1-k)X_A+kX_B$ とすると

$E(X)=50+20k$

$V(X)=355k^2-555k+225$

を得ることができる。

グラフ２５は $\sqrt{V(X)}=\sigma$ と $E(X)=\mu$ の関係を表したグラフに表２３の点を表示したものである。

グラフ２５

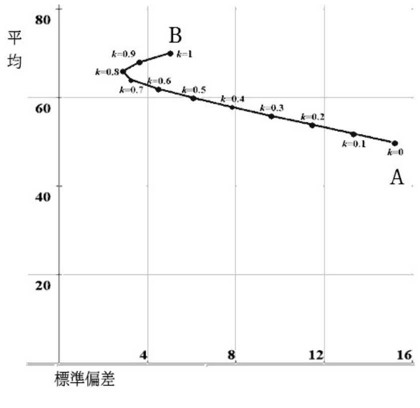


表26

k	平均	標準偏差
0	50(49.54)	15.00(15.20)
0.1	52(51.85)	13.15(13.33)
0.2	54(53.62)	11.32(11.47)
0.3	56(55.66)	9.51(9.63)
0.4	58(57.70)	7.73(7.83)
0.5	60(59.74)	6.02(6.10)
0.6	62(61.77)	4.45(4.51)
0.7	64(63.81)	3.23(3.27)
0.8	66(65.85)	2.86(2.90)
0.9	68(67.89)	3.61(3.65)
1	70(69.93)	5.00(5.06)

＊括弧内は表２３の値

上式で k の値を変化させて表２３と比較したものが表２６である。頂点は $k=0.78$ のときで有効フロンティアは $k\leqq 0.78$となる。こちらも表２３とほぼ同じ値になることが分かる。

【問題５】

表１９のかまぼこ工場のデータをある製品を製造するための輸入原料 A、Bとし、そこにリスク０の国産原料Cを加えてみよう。（表２７）

表27　1t当たりの購入価格

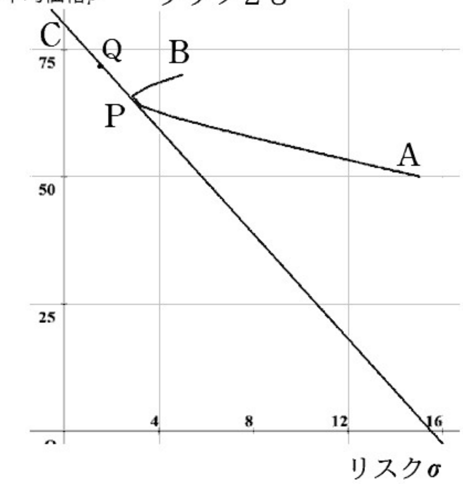
	A国	B国	C(国産)
価格(万円)	50	70	80
標準偏差	15	5	0
相関係数	-0.7		＊＊＊

低コストの輸入原料AとBのポートフォリオに対して、地政学的なリスクを避けるために国産原料を調達するとき、国産原料は割高でもリスクのないものとしてCは縦軸上の定点になる。（グラフ２８）

定点Cから曲線に接線を引くと 接点Pは$k=0.75$ のときで接点Pは $(\sigma,\mu)=(2.9,\ 65)$ になる。

製造業者は為替相場や地政学的なリスクを回避するために線分PC上で原材料を確保することになる。

グラフ２８



線分PCの内分点 Q の座標は

$(\sigma、\mu)=(2.9s\ ,\ 80-15s)$ 　$0\leqq s\leqq 1$

で表すことができるから、合理的な経営者は $0\leqq s\leqq 1$ の範囲で国産原料Cと輸入原料のポートフォリオ P を組み合わせた原料の選択をする。

次にシミュレーション結果を用いて計算してみよう。表２３の座標軸を入れかえて 表２９とし、$n=9$ のとき $(65.58\quad 2.9)$ を頂点として　$\sigma=a(\mu-65.58)^2+2.9$とおく。

$\sigma_i=a(\mu_i-65.58)^2+2.9$

がすべての $n=i$ に対して成り立つものとし、辺々加えて

$$\sum_{k-1}^{11}\sigma_i = a\sum_{k=1}^{11}(\mu_i-65.58)^2+2.9\cdot 11$$

から a を求めると $a=0.0588$ となり近似曲線

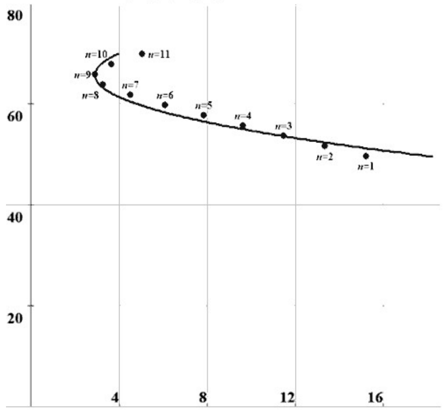
$$\sigma=0.0588(\mu-65.58)^2+2.9$$

を求めることができる。

表29

	n	μ_i	σ_i
	1	49.54	15.20
	2	51.58	13.33
	3	53.62	11.47
	4	55.66	9.63
	5	57.70	7.83
	6	59.74	6.10
	7	61.77	4.51
	8	63.81	3.27
*	9	65.85	2.90
	10	67.89	3.65
	11	69.93	5.06

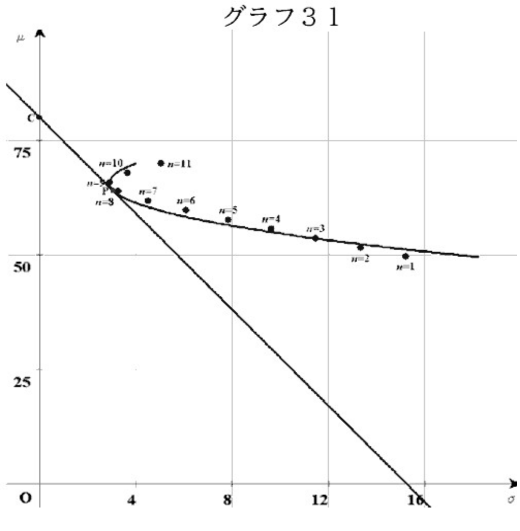
グラフ３０



次に定点C$(0,80)$をとり、Cから曲線に接線を引くと方程式は $\mu=-5.25\sigma+80$　、接点Pの座標は$(3.05, 64)$になる。　（グラフ３１）

Pの座標の理論値は$(2.9, 65)$であり、シミュレーションの値は十分な近似値と言えよう。

グラフ３１



精度は少し落ちるが、容易に計算できる。正確な方程式は確率分布から求めることができる。最小二乗法を用いるためには偏微分を用いる必要があるため、いずれの場合も高校の学習内容を越えてしまう。簡易的な方法であっても理論的な裏付けなしに表計算ソフトを使うよりは良いであろう。

研究課題

身の回りで（できるだけ負の）相関があるものを見つけてポートフォリオを考え、リスク分散効果を考えてみよう。

具体的な数値を設定して 乱数を発生させて有効フロンティアを求めてみよう。

【余談】

３つの標準正規分布 のデータ 群Z_iから図３２の相関係数を持つ標準正規分布 のデータY_iを生成するには次のように変換すればよい。実際に表３３の相関係数になるように変換してみよう。ここではZ_1、Z_2として問題１の結果を使用して Z_3 を追加して Y_3を生成する。

表32　相関係数

	Y_1	Y_2	Y_3
Y_1	1	＊＊＊	＊＊＊
Y_2	r_{21}	1	＊＊＊
Y_3	r_{31}	r_{32}	1

表33

	A	B	C
A	1	＊＊＊	＊＊＊
B	-0.5	1	＊＊＊
C	-0.7	0.2	1

(1) ＝NORMSINV(RAND())で、$N(0,1)$となるデータ Z_1、Z_2、Z_3をつくる。（表３４）

(2)　$Y_1=Z_1$

$$Y_2=r_{21}Z_1+\sqrt{1-r_{21}^2}\,Z_2$$

$$Y_3=r_{31}Z_1+\frac{r_{32}-r_{21}r_{31}}{\sqrt{1-r_{21}^2}}Z_2+\sqrt{1-r_{31}^2-\left(\frac{r_{32}-r_{21}r_{31}}{\sqrt{1-r_{21}^2}}\right)^2}\,Z_3$$

としてY_1、Y_2、Y_3をつくる。（表３５）

表34

	Z1	Z2	Z3
1	-0.6334	0.09802	-1.6856
2	0.50102	-1.295	-0.2381
3	1.34461	0.44645	-0.0854
4	-0.7135	0.17914	0.6577
5	-1.7352	1.37695	1.1639
	・	・	・
	・	・	・
998	0.57477	-0.4642	-0.2647
999	-0.5924	-0.3847	-0.8289
1000	-0.4638	-0.3149	0.0168
平均	-0.04	0.01	0.02
分散	0.97	1.01	0.92
標準偏差	0.99	1.00	0.96
相関係数	Z1	Z2	Z3
Z1	1	＊＊＊	＊＊＊
Z2	-0.0329	1	＊＊＊
Z3	0.01984	0.00699	1

表35

	Y1	Y2	Y3
1	-0.6334	-0.2318	1.076
2	0.50102	-0.871	-0.7777
3	1.34461	1.05894	-0.9468
4	-0.7135	-0.2016	0.7841
5	-1.7352	0.32488	0.8273
	・	・	・
	・	・	・
998	0.57477	-0.6894	-0.5041
999	-0.5924	-0.0369	-0.0916
1000	-0.4638	-0.0408	0.3916
平均	-0.04	0.03	0.0368
分散	0.97	1.03	0.9201
標準偏差	0.99	1.01	0.9592
相関係数	Z1	Z2	Z3
Z1	1	＊＊＊	＊＊＊
Z2	-0.5146	1	＊＊＊
Z3	-0.7001	0.2072	1

【問題６】

【問題１】の金融商品にCを追加する。（表３６）

３つの金融商品の相関が表３３で与えられたとき、乱数を発生させてポートフォリオの散布図を作成し、ＡとＣ、ＢとＣの有効フロンティアを求めてみよう。

表36　1000万当たりのリターン

金融商品	A	B	C
リターン（収益）	50（万円）	80（万円）	100（万円）
リスク（標準偏差）	5	10	12

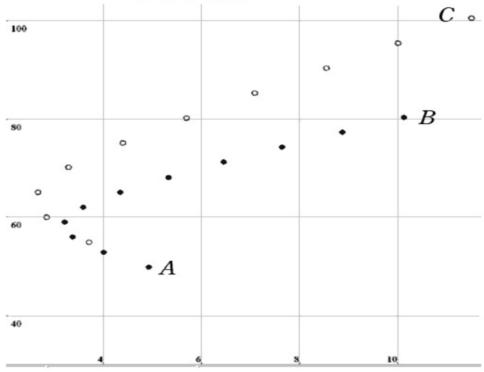
【問題１】の X_1、X_2 に上記の Y_3 を用いて $X_3=12Y_3+100$ としてそれぞれをA、B、Cのデータをする。

　AとCで比率を変化させたものが表３７とグラフ３８で有効フロンティアは $k≧3$ になる。

表37
AとCのポートフォリオ

k	標準偏差	平均
0	4.93	49.80
0.1	3.72	54.86
0.2	2.85	59.93
＊0.3	***2.67***	***64.99***
0.4	3.30	70.06
0.5	4.40	75.12
0.6	5.70	80.19
0.7	7.10	85.25
0.8	8.55	90.31
0.9	10.02	95.38
1	11.51	100.44

グラフ３８

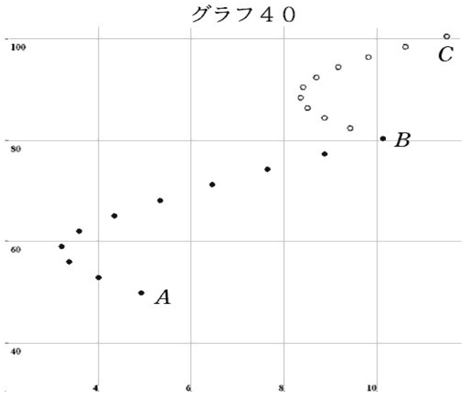


BとCで比率を変化させたものが表３９とグラフ４０で有効フロンティアは $k≧4$ である。

表39
BとCのポートフォリオ

k	標準偏差	平均
0	10.14	80.31
0.1	9.43	82.32
0.2	8.88	84.33
0.3	8.51	86.35
＊0.4	***8.36***	***88.36***
0.5	8.42	90.38
0.6	8.70	92.39
0.7	9.18	94.40
0.8	9.83	96.42
0.9	10.62	98.43
1	11.51	100.44

グラフ４０



確率分布で理論値を求めるとAC間では

$$\sigma=\sqrt{253k^2-134k+25} \qquad \mu=50+50k$$

　有効フロンティア　$k≧0.26$

で $k=0.26$ のとき $\sigma=2.69$　$\mu=63.2$

BC間では

$$\sigma=\sqrt{196k^2-152k+100} \qquad \mu=80+20k$$

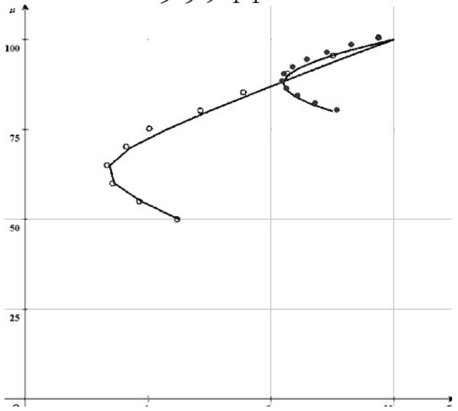
　有効フロンティア　$k≧0.39$

で $k=0.39$ のとき $\sigma=8.40$　$\mu=87.6$

となり、シミュレーションの値が理論式に近いものであることが分かる。

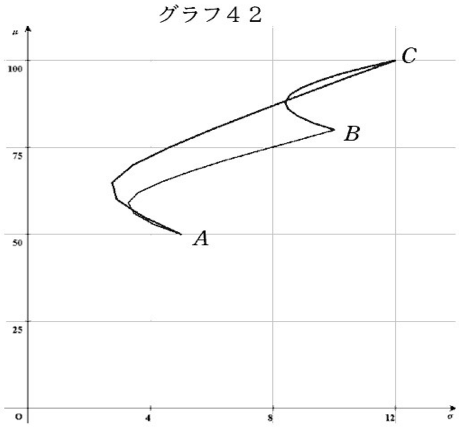
この理論値から導いた式と表３７，表３９のシミュレーションデータを重ねたものがグラフ４１である。

グラフ４１



またA,B,C全てのポートフォリオの理論式をグラフにしたものがグラフ４２である。

グラフ４２



【問題７】

　問題６の理論値

AC間　$\sigma=\sqrt{253k^2-134k+25}$　　$\mu=50+50k$

BC間　$\sigma=\sqrt{196k^2-152k+100}$　　$\mu=80+20k$

において、AC間で $k=0.6$ 、BC間で $k=0.8$ となる点をそれぞれ P_1、 P_2 とすると平均と標準偏差は表４３になる。 P_1 と P_2 を表す確率変数を S_1、 S_2 とし P_1 と P_2 からなるポートフォリオPを

$S=(1-k)S_1+kS_2$　　$0≦k≦1$

としてシミュレーションすると表４４のデータを得る。

表43

	P_1	P_2
リターン	80	96
リスク	6.0	10.2

表44

	S1	S2	k＝0.1	k＝0.2		k＝0.9
1	86.4803	107.133	88.546	90.6108	・・・・	105.068
2	75.4024	85.7899	76.441	77.4799		84.7511
3	75.8721	86.3391	76.919	77.9655	・・・・	85.2924
4	84.2183	104.551	86.252	88.2848		102.518
5	82.4858	108.062	85.043	87.601	・・・・	105.504
	・	・	・	・		・
	・	・	・	・		・
	・	・	・	・		・
998	77.5202	89.7822	78.746	79.9726		88.556
999	78.16	95.0472	79.845	81.53		93.36
1000	81.89	99.6779	83.67	85.45		97.90
平均	80.19	96.4153	81.808	83.43	・・・・	94.7923
分散	32.511	96.648	36.61	41.2236		87.9197
標準偏差	5.70185	9.83097	6.0506	6.42056		9.37655
共分散	51.72					
相関係数	0.92					

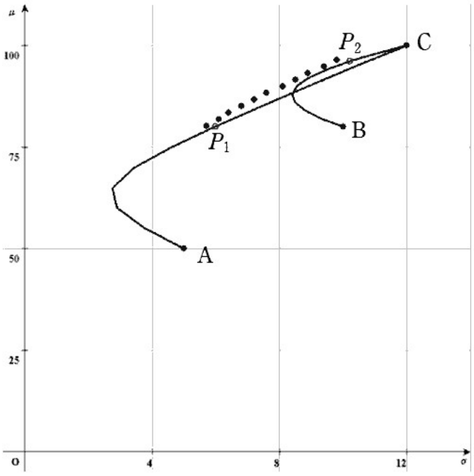
　ここから標準偏差と平均だけをまとめると表４５になり、理論値のグラフ４１と重ねるとグラフ４６になる。

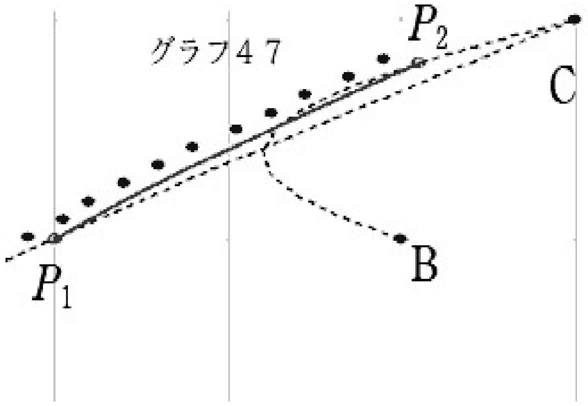
　シミュレーションのデータでは標準偏差と平均の相関係数は０．９２となるが、実際に 散布図で確認するとグラフ４６の通り直線上に並んでいるように見える。

表45
P₁とP₂のポートフォリオ

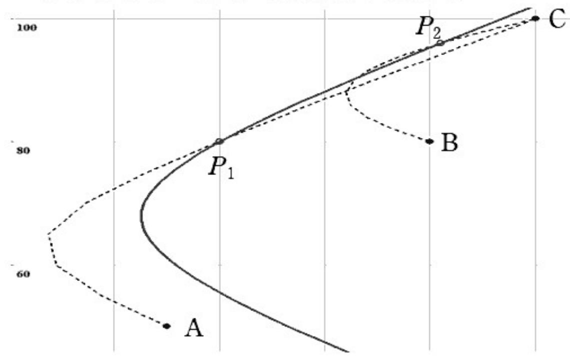
k	標準偏差	平均
0	5.7	80.2
0.1	6.1	81.8
0.2	6.4	83.4
0.3	6.8	85.1
0.4	7.2	86.7
0.5	7.6	88.3
0.6	8.1	89.9
0.7	8.5	91.5
0.8	8.9	93.2
0.9	9.4	94.8
1	9.8	96.4

グラフ４６





グラフ４８　参考（放物線の全体図）



【問題７】を確率分布の理論値で考えてみよう。
A,B,Cの確率変数は X_i であるから

$$S_1 = 0.4X_1 + 0.6X_3$$
$$S_2 = 0.2X_2 + 0.8X_3$$

となり S_1 、 S_2 をベクトルとして成分表示し

$$\boldsymbol{S_1} = (0.4\,,0\,,0.6) \qquad \boldsymbol{S_2} = (0\,,0.2\,,0.8)$$

とおく。 X_i の相関係数が表３３であることから共分散行列Σを求めると

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5^2 & -0.5\cdot 5\cdot 10 & -0.7\cdot 5\cdot 12 \\ -0.5\cdot 5\cdot 10 & 10^2 & 0.2\cdot 10\cdot 12 \\ -0.7\cdot 5\cdot 12 & 0.2\cdot 10\cdot 12 & 12^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 25 & -25 & -42 \\ -25 & 100 & 24 \\ -42 & 24 & 144 \end{pmatrix}$$

となるから S_1 と S_2 の共分散は

$$Cov(S_1,S_2) = \boldsymbol{S_1}\,\Sigma\,\boldsymbol{S_2}^T = 56.56$$

ここから相関係数を求めると0.92となり、シミュレーション結果とほぼ一致する。

> 定理
> $Cov[aX+b,cY+d] = acCov[X,Y]$

上記の値と公式を用いると $S = (1-k)S_1 + kS_2$ に対して

$$E(S) = 80 + 16k$$
$$V(S) = 26.92k^2 + 41.12k + 36$$

となるから $\sqrt{V(S)} = \sigma$ と $E(S) = \mu$ の関係を表したグラフ４７において、曲線 $\widehat{P_1P_2}$ （放物線の一部）は僅かではあるが一部がAとC、BとC双方の有効フロンティアよりも有利な収益をもたらす。すなわち３つの金融商品ではより有利な選択をすることができる。

【おわりに】

穂別高校では平成１３年度から総合的な学習の時間を先取りして実施したが、これに合わせて旧課程の数学Ⅱでは株式ゲームを導入し、数学Bでは基本統計量の応用として株価のリスクにも言及した。（資料１）

平成１６年度は２学年対象の進路講習「統計学」で数理モデルのシミュレーションとして（相関のない場合の）ポートフォリオ理論を教材化した。（資料２）当該学年からは数学Ⅱでもコンピュータを使用したことで数学Ｂの基本統計量の取り扱いは検討事項となり、授業用に作成した教材を講習に転用したが、異動により授業で使用する機会のないまま退職した。

進路講習に参加した学年については次回のレポート（時系列データの解析）の中で当時の教材「株式ゲーム」とともに新課程での教材作成の背景や観点別評価導入の経緯も合わせて紹介する予定である。

【添付資料】

資料１「高校数学の周辺～コンピュータで解析する」
（第８６回全国算数数学教育研究大会資料から）
資料２　問題解決のための戦略のモデル化について
（５９回北海道算数数学教育研究大会資料から）

【参考文献】

金融工学入門　　木村俊一 著（実教出版）