

資料 1

「高校数学の周辺～コンピュータで解析する」資料からの抜粋

1 分散からリスクを読み取る

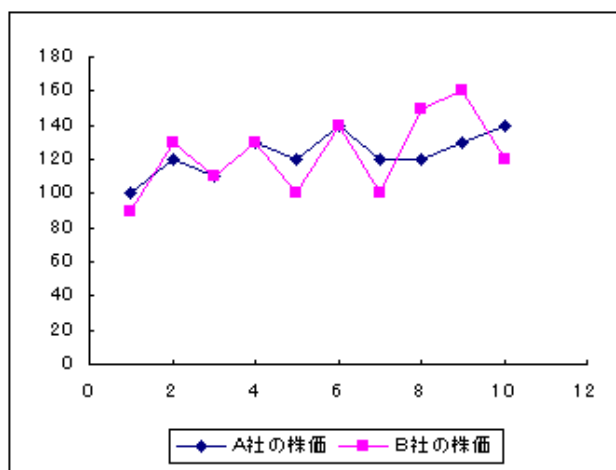
問 A社とB社の10日間の株価は下の表の通りです。

あなたはどちらの株を購入しますか。

図1

日	A社	B社
1	100	90
2	120	130
3	110	110
4	130	130
5	120	100
6	140	140
7	120	100
8	120	150
9	130	160
10	140	120
平均	123	123
分散	141	481
(標準偏差)	(11.87)	(21.93)

図2



上図はA社とB社の株価を比較したものです。どちらも平均は123円ですが、B社の分散はA社の分散よりも大きくなっています。2社とも株価は値上がり傾向にあり、しかも同一期間内の平均株価は同じです。グラフから分かることはB社の方がA社よりもリスクが大きいということです。

これを統計的に考えると、「平均値は同じであってもB社の株価は平均値からの上下変動が大きい」ということなので、B社の株価はA社のそれよりも分散（または標準偏差）が大きいということになります。したがって、リスクを容認できる人はB社の株を、そうでない人は堅実にA社の株を購入することになるでしょう。大まかに理解してもらうためにここでは「株価の分散」を考えましたが、実際には「株価」ではなく株価をもとにして計算した「収益の分散」を「リスク」としています。

資料 2

「問題解決のための戦略のモデル化について」からの抜粋

2 作付面積シミュレーション

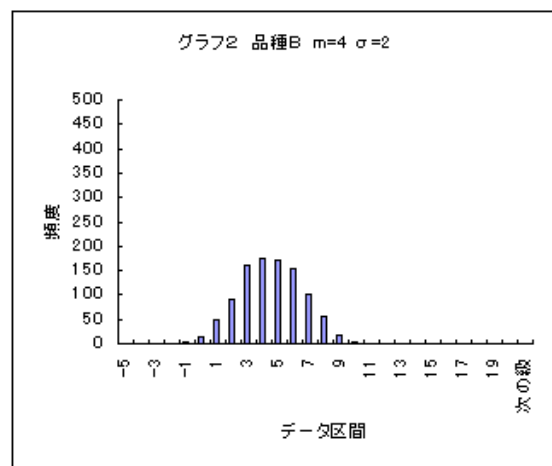
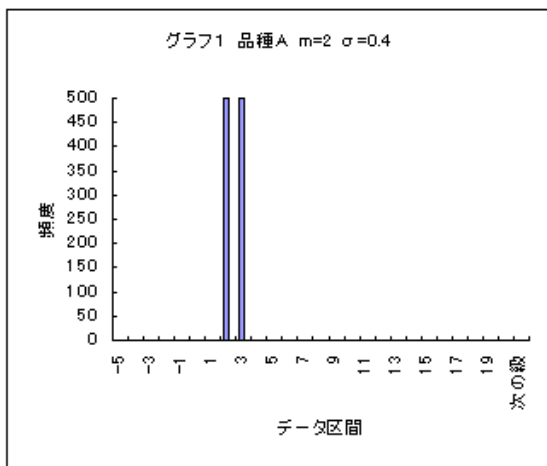
表1は3種類の作物について、過去10年間の単位面積当たりの収益とその標準偏差を示したものである。このデータをもとにして、農家の作付面積の戦略を立ててみよう。

作物Aは収益は低いが収入は安定(標準偏差が小さい)している。Cは高収入を期待できるが、凶作も多く収入は不安定である。Bは収益、リスク(標準偏差)ともAとCの中間値でなる。

グラフ1~3は、表1のAからCの作物の平均値(単位当たりの収益)と標準偏差となるように正規乱数を使ってデータを1000個発生させ、結果をグラフで表したものである。収益が期待できる作物ほどデータも広く分布し、リスクも大きい様子が分かる。

表1

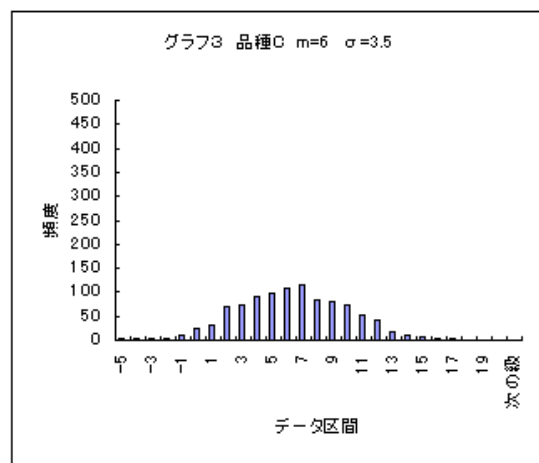
	単位当たりの収益	標準偏差
A	2	0.4
B	4	2
C	6	3.5



特に作物Cでは赤字になる場合もある。データの分布の広がりやリスクであり、標準偏差がリスクの大きさを表していることがよく分かる。

問題

一定の収益を確保し、かつリスクも極力回避するためには3種類の作物の作付面積をどのように配分したらよいか。



安定型戦略 A 群

収益は低いが、リスクの少ない作物Aを50%作付けし、残りの面積をB、Cの作付に配分するような安定型戦略のシミュレーションを考えてみよう。

残り50%の面積について、BとCの比率を5:0から0:5まで1ずつ変化させた戦略をそれぞれ戦略A1、A2、・・・A6とし、グラフ1から3のデータを用いてシミュレーションした結果が表2である。収益の大きいCの比率が高くなるにつれて単位当たりの収益も高くなることが分かる。

しかし、リスクは単調増加しない。グラフ4は表2をグラフにしたものである。標準偏差の大きい作物Cの比率を増やしたにも関わらず、戦略A2までは標準偏差が低くなっていく。

戦略A1は戦略A2よりも収益が低く、しかもリスクの大きい戦略であり採用する価値はない。価値ある戦略はA2以降と考えられるが、A2以降の戦略範囲（組み合わせ）を有効フロンティアという。

戦略A2以降については収益も増えるが、リスクも増えていくことから、どの戦略を採用するかは経営者のリスクの容認度によって決まり、何れも合理的な戦略である。

積極型戦略C群

収益は高いが、リスクも大きい作物Cを50%作付けし、残りをA、Bの作付けに配分するような積極型戦略のシミュレーションを考えてみよう。

戦略C群ではグラフ5を見る限り、6つの戦略すべてが有効フロンティア内に収まっているようにも見える。しかし、もう少し戦略C群について考察してみよう。

グラフ6のように戦略A群と戦略C群を同時にグラフにすると収益が3.5以降、急激にリスクが大きくなるが、このリスクを押さえる戦略はないだろうか。そこで戦略A群とC群の中間戦略として戦略B群を考えよう。

表2

A:B:C	A1	A2	A3	A4	A5	A6
	5:5:0	5:4:1	5:3:2	5:2:3	5:1:4	5:0:5
単位あたりの収益	3.03	3.21	3.40	3.59	3.78	3.96
標準偏差	1.03	0.89	0.93	1.14	1.44	1.79

グラフ4

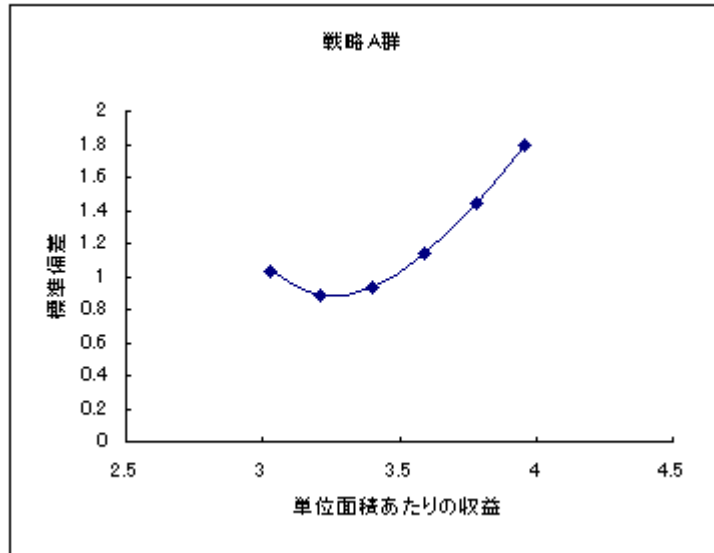
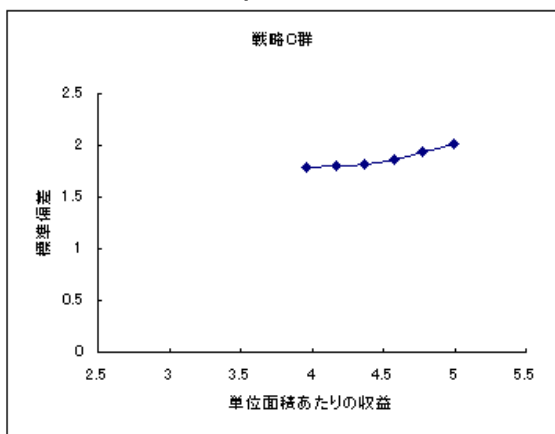


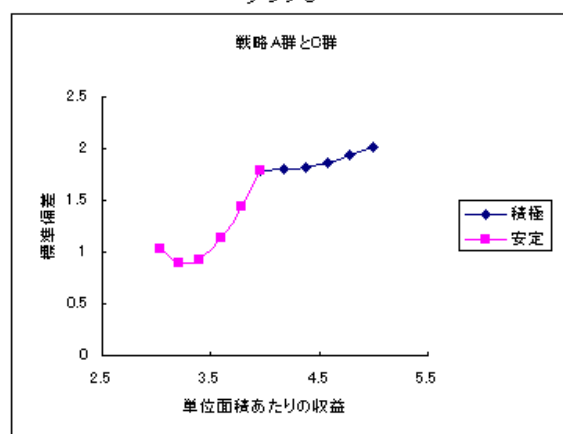
表3

A:B:C	C1	C2	C3	C4	C5	C6
	5:0:5	4:1:5	3:2:5	2:3:5	1:4:5	0:5:5
単位あたりの収益	3.96	4.17	4.37	4.58	4.78	4.99
標準偏差	1.79	1.80	1.82	1.87	1.94	2.02

グラフ5



グラフ6



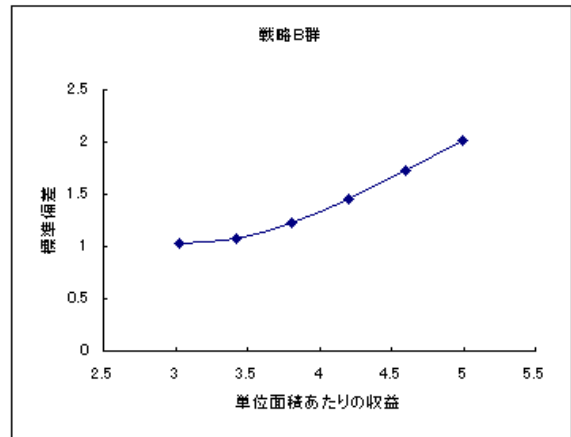
中間型戦略 B 群

収益もリスクも品種 A と C の中間に位置する B を 50% 作付けし、残りを A、C の作付に配分するような中間型戦略のシミュレーションを考えてみよう。

グラフ7

表4

A:B:C	B1	B2	B3	B4	B5	B6
単位あたりの収益	3.03	3.42	3.81	4.20	4.60	4.99
標準偏差	1.03	1.07	1.22	1.45	1.72	2.02



グラフ7は表4をグラフにしたものである。戦略B群の6つの戦略もすべて有効フロンティアである。

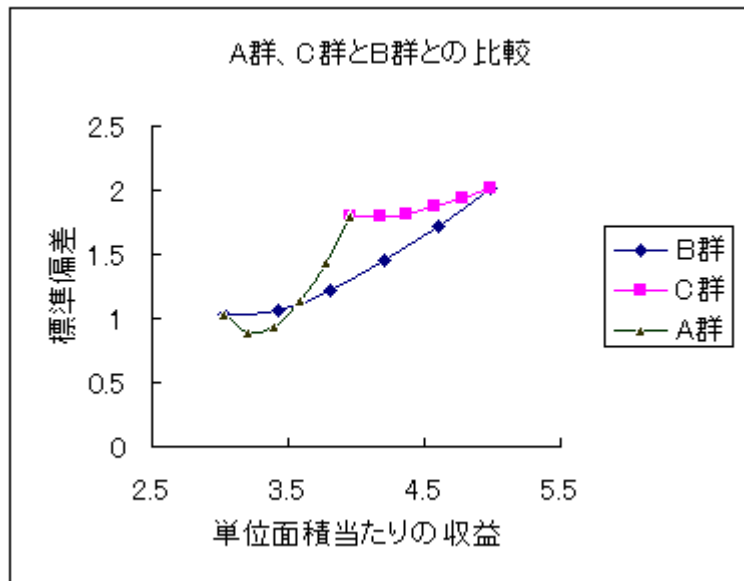
問題 戦略A群、B群、C群で最良の戦略はどれか？

戦略群A、B群、C群の戦略すべてを同じグラフにまとめてみよう。(グラフ8)

グラフ5ではC群すべての戦略が有効フロンティアに収まっていたように見えたが、グラフ8ではB群はC群の下にあり、戦略B群があるかぎり戦略C群は選択する価値がない。また、グラフ4で有効フロンティアに収まっていた戦略A群の一部も戦略としての価値を失っていることに気が付く。

グラフ8によって、新しい有効フロンティアが形成されることが視覚的に分かる。すなわち中間戦略B3、B4、B5を結ぶ曲線は何れもA5、A6やC1からC5を結ぶ曲線よりもリスクが少ないので、同じ収益でリスクを押さえるためには、A2からA4に至る曲線に沿って作付を考え、以後はB3からB6に至る曲線に沿って作付を計画することが最も合理的である。

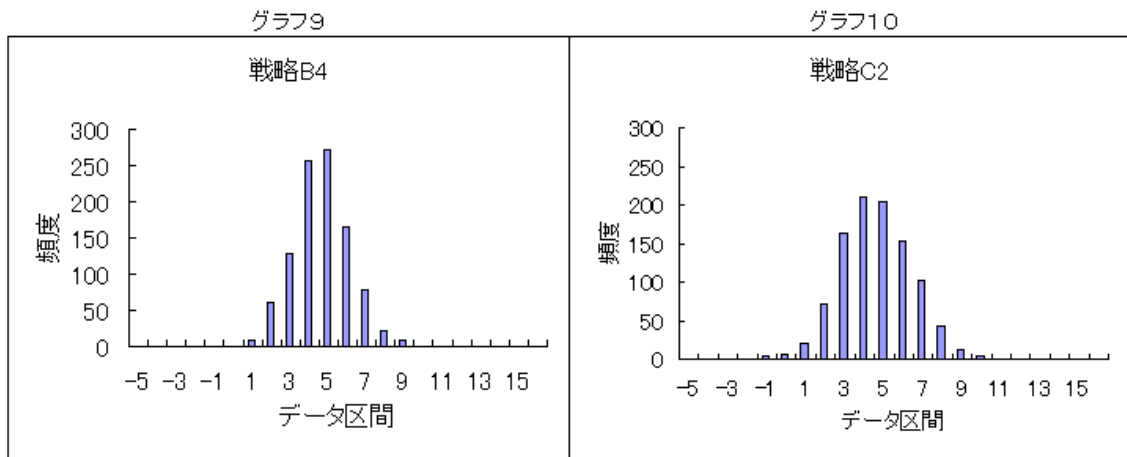
グラフ8



上部C群の戦略とその下部になるB群の戦略をもう少し詳しく考察しよう。戦略B4とC2を比較すると収益はほぼ同じ値であるが、リスクは僅かにC2が高い。そこでこの2つのデータをもとに正規乱数を発生させるとグラフ9、グラフ10のようになり、戦略C2では赤字になる場合のあることが分かる。

表5

	B4	C2
単位あたりの収益	4.20	4.17
標準偏差	1.45	1.80

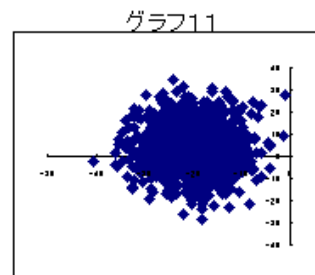
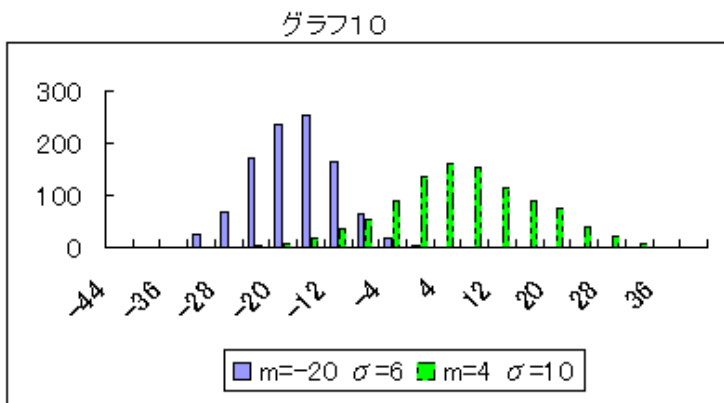


問題 なぜ有効フロンティアが生じるのか
 ～戦略群は直線にならないのか～

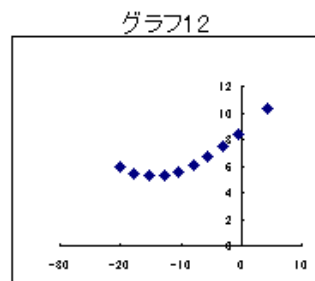
戦略 A 群でみた通り、異なる平均と分散をもつ商品の比率を変えながら組み合わせると平均と分散をグラフ化すると有効フロンティアが生じることがある。何故このようなことが生じるのか。

比率を変えたときに直線的に変化しないのはなぜだろうか。

問題を簡単にするために2つの異なる平均と分散をもつデータで考察しよう。グラフ 10 はそれぞれ $m=-20, \sigma=6$ 、 $m=4, \sigma=10$ となるようにデータを正規乱数で発生させて、その頻度をグラフにしたものである。また、グラフ 11 はこれらの相関をグラフにしたものである。

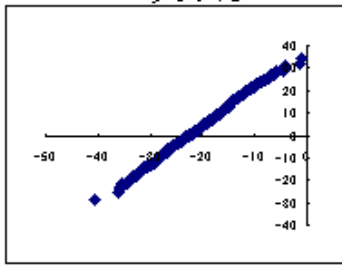


このデータを用いて、先の戦略群と同様に2つの比率を変化させた混合戦略の平均と分散をグラフにしたのがグラフ 12 であり、連続的に変化させると有効フロンティアとなる部分が生じる。

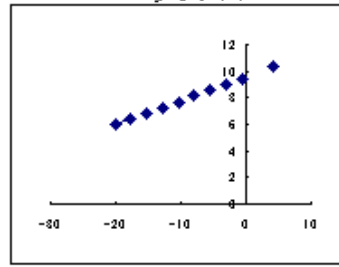


次に正規乱数で得た同じデータを、それぞれ昇順に並び替えて相関図を作成するとグラフ 13 が得られる。この並び替えたデータで2つの比率を変化させて組み合わせると、その平均と分散をグラフ化するとグラフ 14 になり、直線的に変化することが分かる。

グラフ13

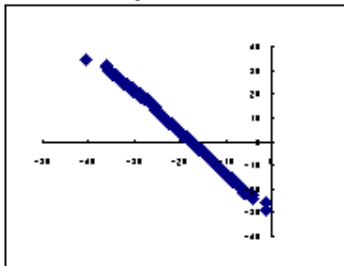


グラフ14

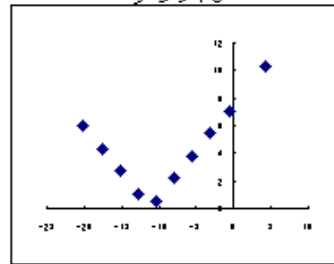


最後にデータ的一方を昇順、もう一方を降順に並べ替えて同様にグラフ化したのがグラフ15及びグラフ16である。グラフが折れ線になっている。

グラフ15



グラフ16



グラフ17はグラフ12,14,16をまとめたものである。相関係数の変化に伴って平均と標準偏差とが変化していく様子が見える。組み合わせによる平均と分散の関係が直線的か曲線的か、有効フロンティアが生じるか否かは、実施のところデータの相関に依存しているのである。

したがって、平均、分散の異なる作物を作付けする場合、データ間の相関の違いを利用することでも多様な戦略を得ることができる。個々の要求に応じた収益やリスクを得る戦略は無数にある。

グラフ17

