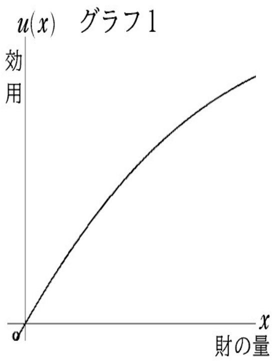
１３３回数実研レポート　２０２５．６．７

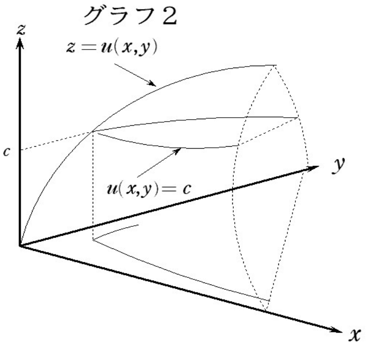
効用関数で考える～鮭と鮪の関係とは

横山 徹

【はじめに】

効用関数 $u(x)$ は消費財の購入量を定義域とし、満足度（効用）を表す関数（グラフ１）で、消費財が２つの場合は曲面を表す２変数関数 $z=u(x,y)$（グラフ２）になります。現在の経済学では序数として効用関数を考えますが、ここでは数学Ⅲや数学Cの教材として借用するので便宜上測定可能なものとして扱うことで様々な曲線を考察します。





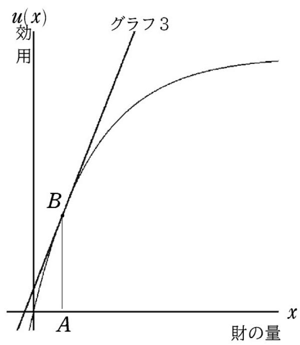
【効用関数と限界効用理論】

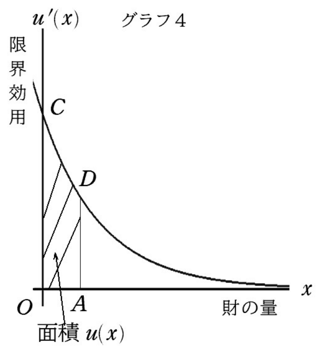
効用関数が「正常財」の場合には次の２つの法則が成り立つと考えられています。

（１）限界効用逓減の法則

消費財の購入量が増加すると効用も増加しますが、増加率（限界効用）は減少します。（グラフ３）

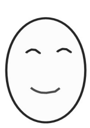
グラフ３のBにおける傾きとABの長さはそれぞれグラフ４のADの長さとCDAOの面積になります。





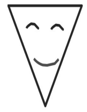
（２）限界効用均等の法則（２つの消費財の場合）

２つの消費財から得られる効用が最大のとき、１円当たりの限界効用は等しくなります。



最初に限界効用逓減の法則について説明しましょう。消費財の購入量を x、満足度（以下「効用」とよびます）を $u(x)$ とすると購入量が増えれば効用も増加しますから $u'(x)>0$ ですね。しかし購入量が増えると当初の感動は減少します。感動を表すのものが変化率 $u'(x)$ で「限界効用」です。したがって $u''(x)<0$ になります。「正常財」の効用関数 として条件を満たす関数にはどのようなものがあるでしょうか？

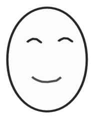
【例題１】



$u(x)=\sqrt{x}$ は

$$u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0 \qquad u''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}<0$$

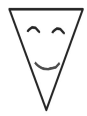
で正常財の条件を満たしています。



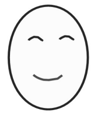
それではXとYの２つの消費財があり、２つを同時に購入しても互いの効用に影響を及ぼさないと仮定しましょう。２つの効用が同じ 関数 $u(x)=\sqrt{x}$ で表されるとき、２つの消費財による効用は $u(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ になります。２つの消費財の単位あたりの価格をそれぞれ p_x、p_y、予算を p とすると $p_x x+p_y y=p$ が成り立ちますね。 $p_x=p_y=1$ として予算線を l_p ： $x+y=p$ とすると効用関数 $z=u(x,y)$ の定義域 D は

$$D=\{(x,y)\mid x+y\leqq p,\ 0\leqq x\leqq p\}$$

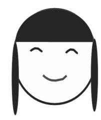
になります。 D における効用 u を最大にするためには２つの消費財をどのように購入したらよいでしょうか？



効用が最大になるのは予算をすべて使い切る時なので最大値となるときの (x,y) は $x+y=p$ を満たすときですね。



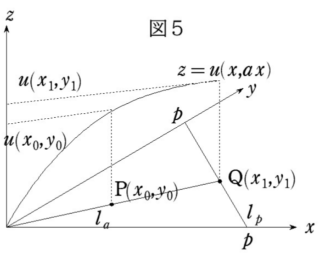
直感的にはそうですが、数学的にはどう考えたらよいでしょうか？

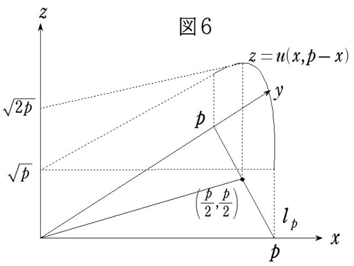


原点を通る直線 l_a ： $y=ax$ （ $a>0$ ）を考えます。 このとき $z=u(x,ax)$ は l_a で定義された 曲面 $z=u(x,y)$ 上の曲線 u_a で

$$u_a(x)\equiv u(x,ax)=\sqrt{x}+\sqrt{ax}$$

になりますから $u_a'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}>0$ となり u_a は増加関数になります。ここで D の内部に任意の点 $P(x_0,y_0)$ をとり、 l_a を $a=\dfrac{y_0}{x_0}x$ として予算線 l_p との交点 を $Q(x_1,y_1)$ とすると $x_0<x_1$ であり、 u_a は増加関数であることから $u_a(x_0)<u_a(x_1)$ が成り立ちます。すなわち D の内部にある任意の点よりも効用が大きくなる点が必ず予算線 l_p 上にあることになります。よって 領域 D における u 最大値は l_p ：$x+y=p$ 上にあることが分かります。（図５）





あとは予算線 l_p で制限された曲線である $z=u(x,y)$ 上の境界

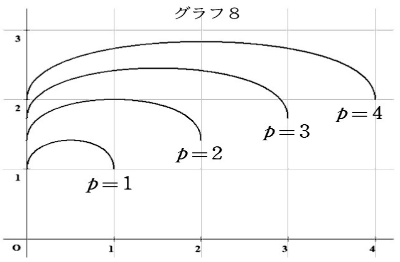
$$u_p(x)\equiv u(x,p-x)=\sqrt{x}+\sqrt{p-x}$$

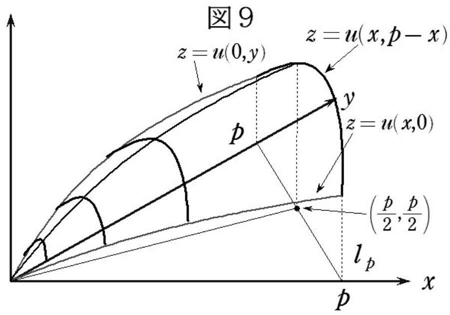
で最大値を求めればよいですね。（図６）

微分すると増減表は表７になり、 $x=y=\dfrac{p}{2}$ のとき最大値が $\sqrt{2p}$ であることが分かります。 予算 p を変化させると境界曲線 u_p はグラフ８、図９のように変化します。

表7

x	0		$\frac{p}{2}$		p
u_p'		+	0	−	
u_p	$\sqrt{p}$	↗	$\sqrt{2p}$	↘	$\sqrt{p}$





消費財の単価を p_x、 p_y とすると予算線は l_p ： $p_x x+p_y y=p$ になり、曲面の境界を表す曲線 u_p は

$$u_p(x)\equiv u\left(x,\frac{p-p_x x}{p_y}\right)=\sqrt{x}+\sqrt{\frac{p-p_x x}{p_y}}$$

になるので増減表は表１０になります。

表１０

x	0		$\frac{p p_y}{p_x(p_x+p_y)}$		$\frac{p}{p_x}$
u_p'		+	0	−	
u_p	$\sqrt{\frac{p}{p_y}}$	↗	$\sqrt{\frac{p(p_x+p_y)}{p_x p_y}}$	↘	$\sqrt{\frac{p}{p_y}}$

【無差別曲線】

次に曲面 $z=u(x,y)$を xy 平面と平行な平面 $z=c$ （$c>0$ ）で切り取ってみましょう。 等位曲線 $u(x,y)=c$ をミクロ経済学では無差別曲線といいますが、地図の等高線をイメージすると良いでしょう。例題１の効用関数に用いると $\sqrt{x}+\sqrt{y}=c$ ですが、どのようなグラフになるでしょうか？

微分して y' を求めると $y'=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}<0$ になりますから y を x の関数として考えると減少関数になります。もう一度微分して y''を求めると

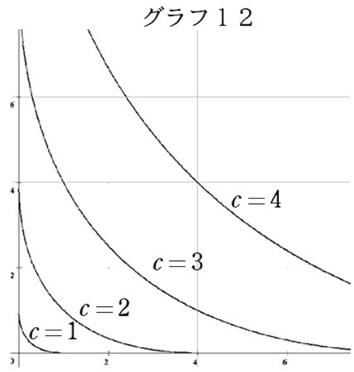
$$y''=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-1}(y')^2>0$$

ですから原点に向かって凸になり、増減表は表１１のようになります。

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=c$ は対称式ですからグラフは $y=x$ に関して対称で $\lim\limits_{x\to 0}y'=-\infty$ $\lim\limits_{x\to c^2}y'=0$ から c を変化させるとグラフ１２になります。

表１１

x	0		c^2
y'		−	
y''		+	
y	c^2	↘	0



無差別曲線を立体的にすると図１３のようになります。正常財の無差別曲線は次の４つの特徴を持つと考えられています。

１　上方の無差別曲線上の点は下方にある無差別曲線の点よりも好まれている。
２　右下がりの曲線である
３　 無差別曲線どうしは交わらない
４　原点に向かって凸である

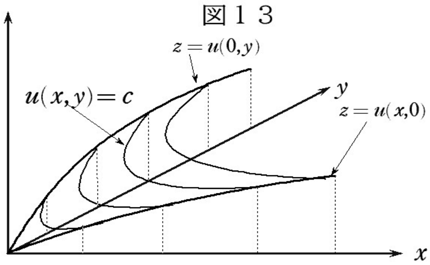


図１３から「１」と「３」は明らかですし、表１１とグラフ１２から「２」と「４」も明らかですね。

【予算線に接する無差別曲線を求める】

例題１の予算線 l_p： $x+y=p$ に接する無差別曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=c$ は１つだけ存在します。同一の無差別曲線上では同じ効用をもつので、l_p 上で効用が最大になるのは無差別曲線と接するときで、効用の最大値が c になります。計算して表７と比較してみましょう。

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=c$ に $y=p-x$ を代入し、２乗して整理すると

$$2\sqrt{x(p-x)}=c^2-p$$

になります。もう一度２乗して整理すると

$$4x^2-4px+c^4-2pc^2+p^2=0$$

で、判別式を０として計算すると $c=\sqrt{2p}$ になります。このとき重解は $x=\dfrac{p}{2}$ で、 $y=\dfrac{p}{2}$ になります。

したがって $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2p}$ が予算線に接する無差別曲線で、効用の最大値は $\sqrt{2p}$ であることが分かります。

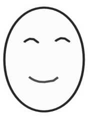
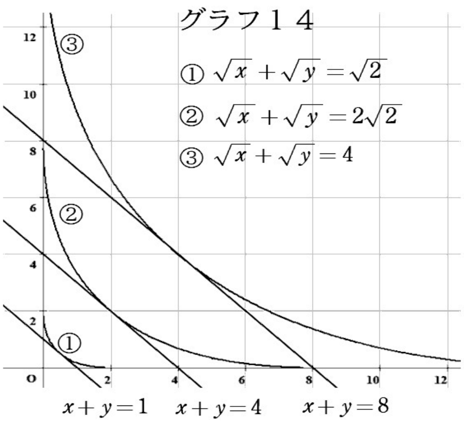
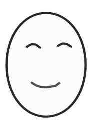


表７の増減表と同じ結果を得ましたね。p の値を変化させるとグラフ１４になります。



【曲線の回転】



ところで 判別式を計算するために $\sqrt{x}+\sqrt{p-x}=c$ として２乗の計算を２回繰り返しましたが、$\sqrt{x}+\sqrt{y}=c$ を２乗して根号をはずすととどうなりますか。

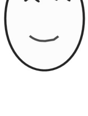
２乗して整理すると

$$2\sqrt{xy}=c^2-x-y$$

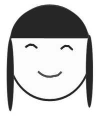
もう一度２乗して整理すると

$$x^2+y^2-2xy-2c^2x-2c^2y+c^4=0$$

になります。



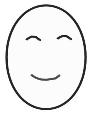
２次曲線ですね。対称式なので４５度回転させると xy の係数がなくなります。計算して下さい。



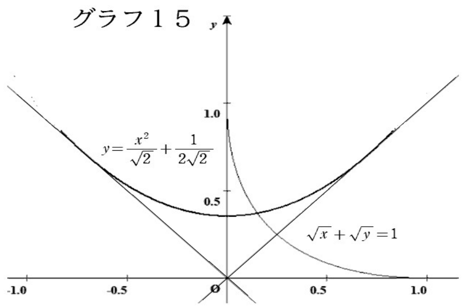
原点の周りに θ だけ回転する変換を表す式は

$$w=(\cos\theta+i\sin\theta)z$$

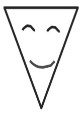
で $z=x+iy$、 $w=u+iv$ とおくと 逆回転は $z=(\cos\theta-i\sin\theta)w$ になるので $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ とすると $x+iy=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)(u+iv)$ になります。この式から x と y が $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$　$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-u+v)$ になるので $x^2+y^2-2xy-2c^2x-2c^2y+c^4=0$ に代入して整理すると　$v=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u^2+\dfrac{c^2}{2\sqrt{2}}$　で２次関数になりました。



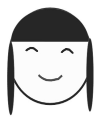
x 軸と y 軸を原点の周りに４５度回転すると $v=u$ と $v=-u$ に変換されるので $c=1$ の場合はグラフ１５になり、２次関数の一部であることが分かります。



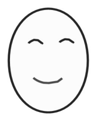
【例題２】



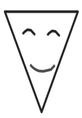
$u(x,y)$ が 和ではなく $u(x,y)=\sqrt{xy}$ のときはどうなるのでしょうか？無差別曲線を $u(x,y)=c$ とおくと $xy=c^2$ になるので、双曲線になりませんか？



x と y をそれぞれ $x=a$、 $y=b$ で固定して $u_b(x)=\sqrt{bx}$、 $u_a(y)=\sqrt{ay}$ にするとそれぞれ正常財の条件を満たしていると思います。 $u(x,y)=\sqrt{xy}$ も効用関数として考えてよいのではないでしょうか？



でも $b=0$ では $u_0(x)=0$、 $a=0$では $u_0(y)=0$になり、もう一方の消費財をどれだけ購入しても効用は０のままです。 かなり特殊なケースですね。どのような消費財が考えられるでしょうか。



消費財が両方揃わないと効用を得られない関係なので、コーヒー豆とペーパーフィルターのような関係ではないでしょうか？

でもコーヒーが１０ｋｇにペーパーフィルター１枚だったり、ペーパーフィルター１００枚にコーヒー豆１０ｇでは量を増やしても十分な効用は得られませんよ。

該当する消費財はすぐには思いつきませんが、数学的には効用関数として成立しそうなので無差別曲線から最大値を求めてみましょう。

それでは予算線を l_p ： $p_x x+p_y y=p$ とし、これに接するを無差別曲線を

$$u(x,y)=\sqrt{xy}=c \quad x\geqq 0 \quad y\geqq 0$$

として計算してみます。 l_p から y を x の式で表して無差別曲線に代入して整理すると

$$p_x x^2-px+c^2 p_y=0$$

になります。判別式を用いると予算線が無差別曲線と接するのは $p^2-4c^2p_xp_y=0$ のときですから最大値は $c=\dfrac{p}{2\sqrt{p_xp_y}}$ で、このとき $x=\dfrac{p}{2p_x}$、 $y=\dfrac{p}{2p_y}$ になります。

【別解】

$u(x,0)=u(0,y)=0$ という特殊性はありますが、それ以外は正常財と考えてもよさそうなので $u(x,y)$ を予算線 l_p で制限された曲線とすると最大値は l_p 上にあると考えられますね。

$u(x,y)=\sqrt{xy}$ の l_p 上で定義された曲線を $u_p(x)$ とすると

$$u_p(x)\equiv u_p\left(x,\frac{p-p_x x}{p_y}\right)=\sqrt{\frac{x(p-p_x x)}{p_y}}$$

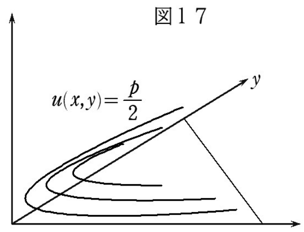
ですから $u_p{}'(x)=\dfrac{p-2p_x x}{2\sqrt{p_y x(p-p_x x)}}$ になります。

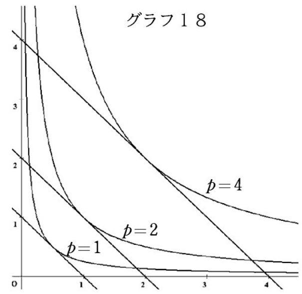
増減表は表１６になるので、最大値は無差別曲線から求めた値と同じになります。

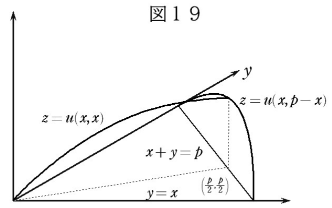
表１６

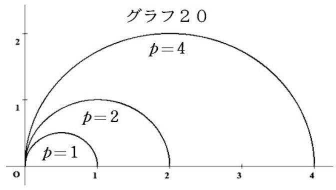
x	0		$\frac{p_y}{2p_x}$		$\frac{p}{p_x}$
$u_p{}'$		＋	0	−	
u_p	0	↗	$\frac{p}{2\sqrt{p_xp_y}}$	↘	0

$p_x=p_y=1$ のとき、p を変化させると無差別曲線は図１７、グラフ１８、予算線上に制限された曲線は図１９、グラフ２０のように変化しますね。









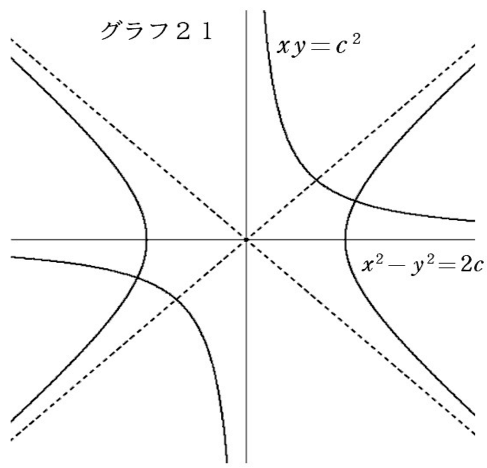
【回転】

$u(x,y)=\sqrt{xy}=c \quad x\geqq 0 \quad y\geqq 0$ も対称式なので、次にすることは原点を中心とする回転移動ですね。 原点を中心にして $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転する変換は

$$w=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}z$$

ですから、 $w=u+iv$ 、 $z=x+iy$ とおくと逆変換の式から $x+iy=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)(u+iv)$ になるので

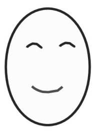
$x=\dfrac{u-v}{\sqrt{2}} \quad y=\dfrac{u+v}{\sqrt{2}}$ です。これを $xy=c^2$ に代入すると $u^2-v^2=2c^2$ になるので頂点は $(\pm\sqrt{2}c,0)$ 、焦点は $(\pm 2c,0)$ 、漸近線 $y=\pm x$ の双曲線の一部になります。



計算も慣れてきたので、そろそろ本題に入りましょうか？

えっ！

【限界効用均等の法則】



「限界効用均等の法則」を２つの消費財の場合で考えてみましょう。

限界効用均等の法則（２つの消費財の場合）
２つの消費財から得られる効用が最大のとき１円当たりの限界効用は等しくなる。

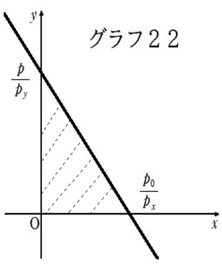
順を追って考えましょう。消費財XとYはどちらも正常財と仮定します。「限界効用逓減の法則」を式で表しましょう。 $f(x)$ を効用関数 とすると

$$f(0)=0 \qquad f'(x)>0 \qquad f''(x)<0$$

が成り立ちます。正常財XとYの効用関数をそれぞれ $f(x)$、 $g(y)$、２つを購入したときの効用関数を $u(x,y)=f(x)+g(y)$ とします。XとYの単価が それぞれp_x とp_y、予算をp、XとYの購入量をそれぞれ x、 y とすると予算式は

$$p_x x+p_y y=p$$

になりますから、購入できる消費材の組み合わせはグラフ２２の斜線部分です。



特にXだけを購入するときは $u(x,0)=f(x)$、Yだけを購入するときは $u(0,y)=g(y)$になります。効用関数 $z=u(x,y)$ は予算領域

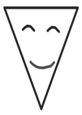
$D=\left\{(x,y) \mid p_x x+p_y y=p_0,\ 0\leqq x\leqq\dfrac{p_0}{p_x}\right\}$で定義され、

$u(x,0)=f(x)$ と $u(0,y)=g(y)$ はそれぞれ

$$f(0)=0 \qquad f'(x)>0 \qquad f''(x)<0$$
$$g(0)=0 \qquad g'(x)>0 \qquad g''(x)<0$$

を満たします。

このときの効用 $u(x,y)$ の最大値が予算線上にあることは例題１で示した通りです。大丈夫ですか？

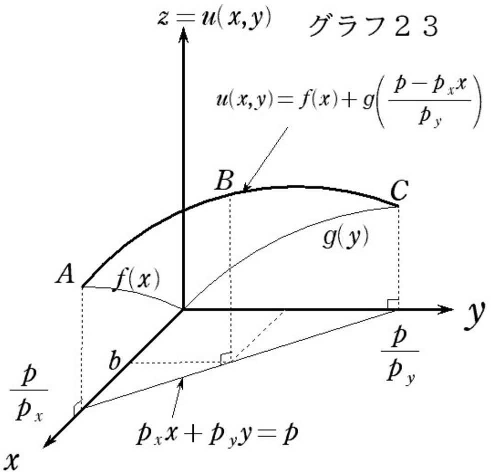


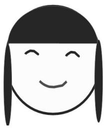
はい。最大値をとるときの (x_0,y_0) はD の内部の点のときであると仮定して $y=\dfrac{y_0}{x_0}x$ と予算線の交点を (x_1,y_1) とすると $y=\dfrac{y_0}{x_0}x$ 上で効用関数は増加関数になるので $x_0<x_1$ から $u(x_0,y_0)<u(x_1,y_1)$ となり (x_0,y_0) で最大になるという仮定に反します。よって D の内部の点 (x_0,y_0) で $u(x,y)$ は最大になりません。

予算をすべて使い切ったときに効用は最大になるので $u(x,y)$ の最大値は (x,y) が予算線$p_x x+p_y y=p$ 上にあるとき、すなわち

$$u_p(x)\equiv u\left(x,\frac{p-p_x x}{p_y}\right)=f(x)+g\left(\frac{p-p_x x}{p_y}\right)$$

の最大値を求めればよいことになります。



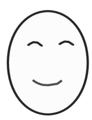


では計算してみましょう。合成関数の微分になりますから

$$\frac{du_p}{dx}=\frac{d}{dx}\left(f(x)+g\left(\frac{p_0-p_x x}{p_y}\right)\right)$$
$$=f'(x)-\frac{p_x}{p_y}g'\left(\frac{p_0-p_x x}{p_y}\right)$$
$$\frac{d^2u_p}{dx^2}=f''(x)+\frac{p_x^2}{p_y^2}g''\left(\frac{p_0-p_x x}{p_y}\right)<0$$

となるので、 (x,y) を予算線上に制限すると極大値になるのときは $\dfrac{f'(x)}{p_x}=\dfrac{g'(y)}{p_y}$ が成り立ちます。この式で左辺と右辺はそれぞれ消費財XとYの１円当たりの限界効用を表しています。

【価格の変化】
【例題３】



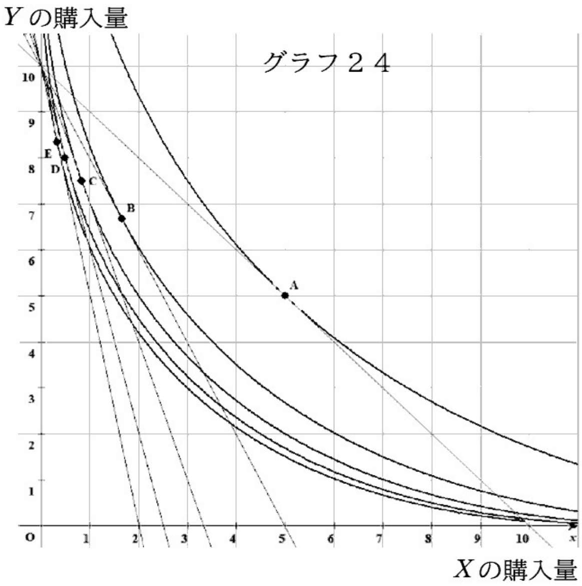
例題１で p_x だけを変化させたらどうなるかを考えてみましょう。効用関数と予算式をそれぞれ

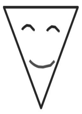
$$u(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$
$$l_{10}\ :\ p_x x+y=10$$

としましょう。 $p_x=1,2,3,4,5$とすると予算式に接する無差別曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=c_n$ は

$$c_n=2\sqrt{5},\ \sqrt{15},\ \frac{2\sqrt{30}}{3},\ \frac{5\sqrt{2}}{2},\ 2\sqrt{3}$$

と変化し、グラフ２４になります。ここからどんなことが分かるでしょうか。





消費財 X の価格が上昇すると無差別曲線は原点に近付くので予算が同じなら効用は低下しますし、購入量は X が次第に減って Y は増えます。接点 A～ E の座標はそれぞれの購入量で、

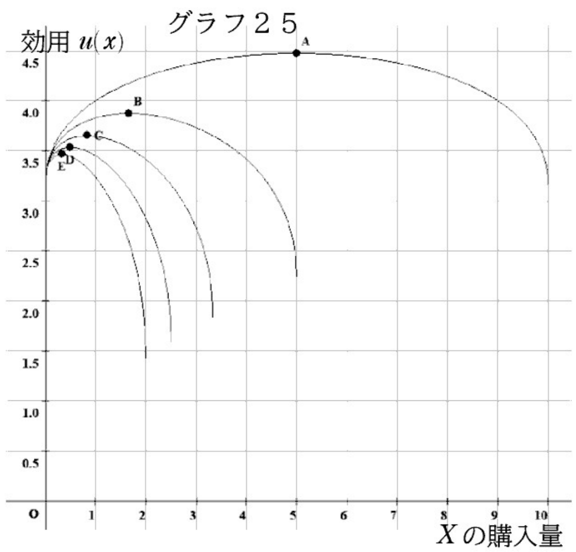
$$(X,Y)=(5,5),\left(\frac{5}{3},\frac{20}{3}\right),\left(\frac{5}{6},\frac{15}{2}\right),\left(\frac{1}{2},8\right),\left(\frac{1}{3},\frac{25}{3}\right)$$

のように変化します。

また、予算線　l_{10} ： $p_n x+y=10$ 上の効用関数

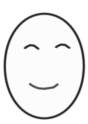
$$u(x)=\sqrt{x}+\sqrt{10-p_x x}$$

はグラフ２５になります。ここからも Xの 価格が上昇すると効用は下がり、 X の購入量は減少することが分かります。



では値段を変えずに品質を上げたり内容量を増やすなど、効用を変化させたらどうなるでしょうか？

【例題４】

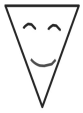


効用関数と予算式をそれぞれ

$$u(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{ay}$$

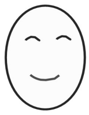
$$l_p ： p_x x+p_y y=p$$

として、 a の値を変化させてみましょう。



$f(x)=\sqrt{x}$　　$g(y)=\sqrt{ax}$ とすると $u(x,y)=f(x)+g(y)$ ですから限界効用均等の法則から $\dfrac{f'(x)}{p_x}=\dfrac{g'(y)}{p_y}$ を使って

$y=\dfrac{ap_y^2}{p_y^2}x$ になります。予算式 $p_x x+p_y y=p$ に代入すると $(x,y)=\left(\dfrac{pp_y}{p_x(ap_x+p_y)},\dfrac{app_x}{p_y(ap_x+p_y)}\right)$ になるので効用の最大値は $\sqrt{\dfrac{p(ap_x+p_y)}{p_x p_y}}$ になります。



それでは $p_x=p_y=1$ 、 $p=10$ として、 a の値を $a=0.5$ ，２，４，８としてグラフにしてみましょう。予算線が l_p ： $x+y=p$ で

効用は $(x,y)=\left(\dfrac{10}{a+1},\dfrac{10a}{a+1}\right)$ のとき最大値 $\sqrt{10(a+1)}$ になりますから

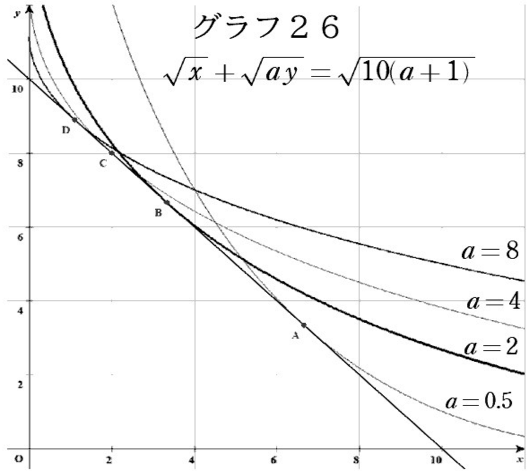
$a=0.5$のとき、 $(x,y)=\left(\dfrac{20}{3},\dfrac{10}{3}\right)$ で最大値 $\sqrt{15}$

$a=2$のとき、 $(x,y)=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{20}{3}\right)$ で最大値 $\sqrt{30}$

$a=4$のとき、 $(x,y)=(2,8)$ で最大値 $5\sqrt{2}$

$a=8$のとき、 $(x,y)=\left(\dfrac{10}{9},\dfrac{80}{9}\right)$ で最大値 $3\sqrt{10}$

です。グラフ２６からどんなことが分かるでしょうか？



a の値が増えると効用が最大となる接点が予算線上を左上に移動するので、消費財 X が減り、消費財 Y は増えます。また a の値が大きくなるほど効用を表す c の値は 大きくなるので効用は増えます。

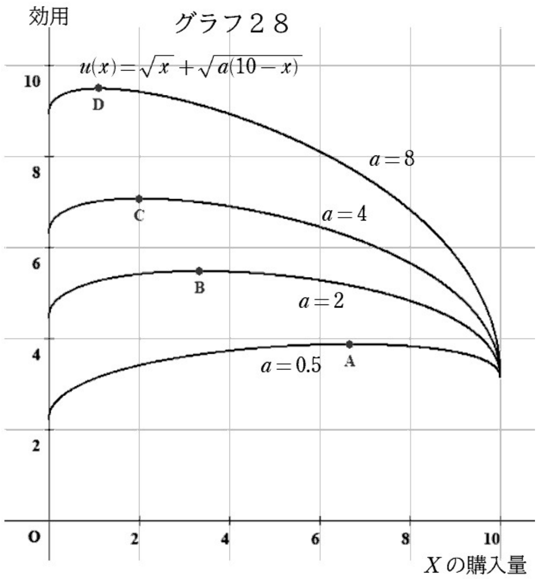
【別解】

では 予算式 $x+y=10$ 上に制限した効用関数 $u(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a(10-x)}$ からも最大値を求めてみましょう。

微分すると増減表は表２７になります。$a=0.5$ ，２，４，８のとき消費財 X と効用関数 $u(x)$ の関係はグラフ２８になります。

表２７

x	0		$\dfrac{10}{a+1}$		10
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	$\sqrt{10a}$	↗	$\sqrt{10(a+1)}$	↘	$\sqrt{10}$



a の値が大きくなるほど効用は大きくなり、 消費財 X の購入量は減少するので、消費財 Y の購入量は増加することが分かります。

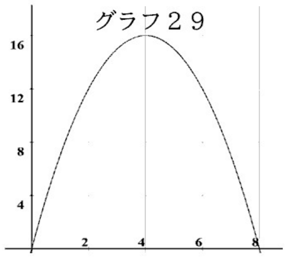
価格が上がると、その消費材の購入を減らして他の消費財の購入量を増やしますが、それを避けるために企業が値段を据え置いて内容量を減らせば効用は下がるので、結局は別の商品の購入量を増やして補うことになります。「ステルス値上げ」をしても購入量は減りますね。インフレで値上げしても、または内容量を減らしても消費者は他の消費財で効用を補うことが数学的にも理解できました。

【番外編：いろいろな無差別曲線】

ここまでは限界効用逓減の法則が成り立つことを前提に考えてきました。すなわち「効用は消費財の購入量を増やすと増加するが、増加率（限界効用）は減少する」という前提でした。前提を少し変えてみましょう。

> 課題1
> 購入量を増やすと途中から効用が減少するような消費財はあるでしょうか？あるとしたら無差別曲線はどうなるのでしょうか？

効用関数を $f(x)=-x^2+8x$ にしたらどうでしょうか？消費財として該当するものはあるでしょうか？



回転寿司で本当はトロを食べたいけど高いからサーモンを注文して我慢するときに似ています。臨時収入でお金がたくさんある時はトロを注文するので、その分だけサーモンを消費しなくなります。サーモンはトロの代用品ですね。

世の中にはサーモンが好きな人だっていますよ。その考え方はちょっと失礼ですね。鮭に謝って下さい！

好みは人それぞれですが、美味しいものでも食べ過ぎは体に良くないので数量を増やすと不安になって満足度が下がるかもしれませんよ。

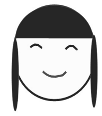
なるほど！消費量が増えて痛風が気になりだすと満足度が低下し、発作が起きると足の痛みで効用はマイナスになるわけですね。先生の説明は体験の基くので説得力があります。

見学旅行の当日に痛風の発作が起きて出張を取り消したという都市伝説は本当ですか？

ちゃんと
引率しましたよ。
見学旅行は！

では効用関数を $u(x,y)=f(x)+f(y)$ として無差別曲線を考えてみましょう。

【例題５】 $f(x)=-x^2+8x$ 、 $u(x,y)=f(x)+f(y)$

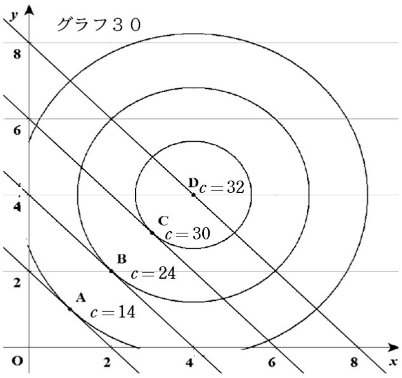


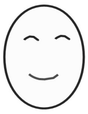
から無差別曲線を

$u(x,y)=-x^2+8x-y^2+8y=c$

とすると $(x-4)^2+(y-4)^2=32-c$

で、予算線 l_p ： $p_x x+p_y y=p$ が $u(x,y)=c$ と接するのは $c=\dfrac{16(p_x-p_y)^2+8p(p_x+p_y)-p^2}{p_x^2+p_y^2}$ のときです。$p_x=p_y=1$ のとき、 $p=2,4,6,8$ として c を求めるとグラフ３０になります。





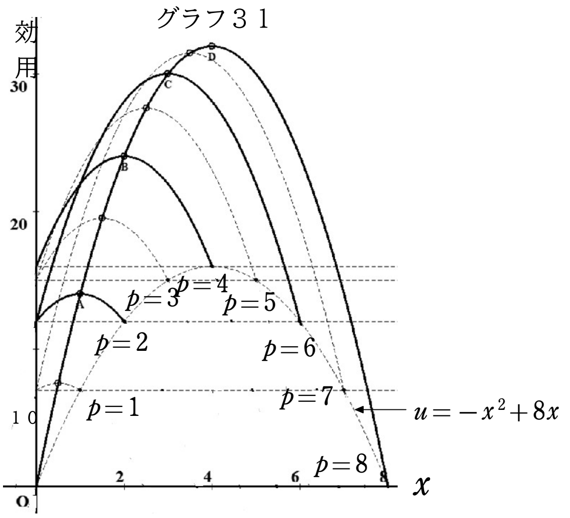
無差別曲線が円になりましたね。効用が最大値になるのは円の中心で、２つの消費財をそれぞれ４だけ購入した時で、効用は 32 です。予算を８以上にしても効用は増えません。では予算式 l_p 上で定義域を制限した式から効用を求めてみましょう。

$u(x,y)=f(x)+f(p-x)\equiv u(x) \quad 0\leqq x\leqq p$

とすると

$$u(x)=-2\left(x-\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{2}+8p$$

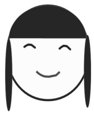
になるので、 $p=2,4,6,8$ として p の値を変化させたらグラフ３１になり、 最大値はグラフ３０と一致します。



【例題６】

次に Y の価格は例題５と同じ $p_y=1$ とし、予算を $p=8$ で固定して X の価格 p_x を変化させてみましょう。

$p_x=1,2,3,4,5$ と変化させて値上げするとどうなるでしょうか？



$u(x,y)=-x^2+8x-y^2+8y=c$

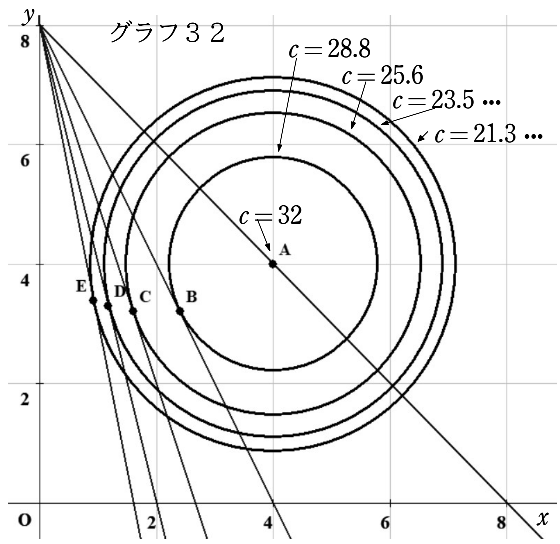
l ： $p_x x+y=8$

を考えればよいので、接するのは

$c=\dfrac{(4p_x+4)^2}{p_x^2+1}$ のときで、接点は

$$(x,y)=\left(\frac{4p_x+4}{p_x^2+1},\frac{4p_x^2-4p_x+8}{p_x^2+1}\right)$$

です。無差別曲線と予算線はグラフ３２になります。



X の価格が上がると接点はAからEへと移動するので効用は低下して X の購入量も減少します。

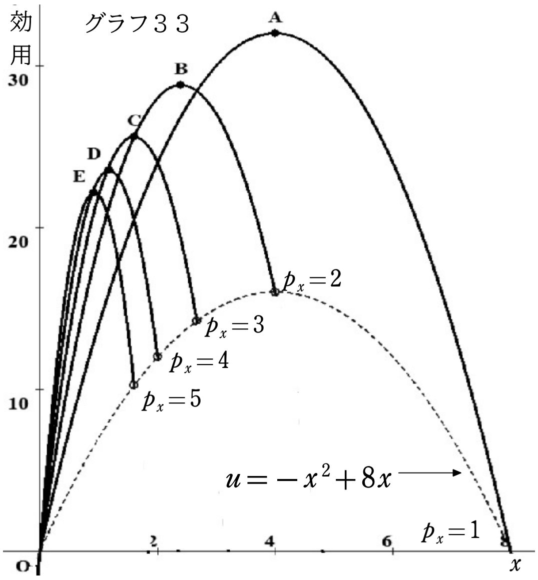
l ： $p_x x+y=8$ で $p_x=1,2,3,4,5$ のとき、効用の変化を確認してみます。グラフ３２から、この範囲では効用は予算線上で最大値をとることが分かります。

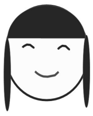
$u(x,y)=f(x)+f(8-p_x x)\equiv u(x) \quad 0\leqq x\leqq p$

ですから

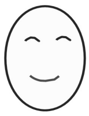
$$u(x)=-(p_x^2+1)\left(x-\frac{4p_x+4}{p_x^2+1}\right)^2+\frac{(4p_x+4)^2}{p_x^2+1}$$

で、 $(x,y)=\left(\dfrac{4p_x+4}{p_x^2+1},\dfrac{4p_x^2-4p_x+8}{p_x^2+1}\right)$ のとき、最大値は $\dfrac{(4p_x+4)^2}{p_x^2+1}$ になるので、 X の効用はグラフ３３のように変化します。

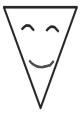




何となく先が見えてきました。２次曲線の中で楕円だけがまだ出てきていません。次は予算線を固定して効用関数を異なる２次関数にしてから無差別曲線を求めるのではないでしょうか？

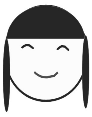


学習は基礎から模倣、そして新しい発想へと発展しますから、「先を見通せる」ことは学習が進んできた証拠ですね。そして最後は「考えるな。感じろ！」です。

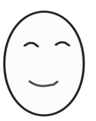


それってドラゴン桜ですか？

燃えよドラゴンです。ブルース･リーが弟子に Don’t　think. Feel.と言いました。



スターウォーズでもヨーダが使ったヨーダけど、これも模倣でしょうか？



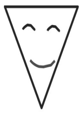
模倣というよりオマージュですね。
皆さんには新しい発想が求められています。「時代の旗手」になれるように頑張って下さい。では楕円に登場してもらいましょう。

【例題７】

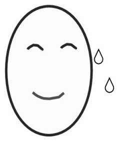
$f(x)=-x^2+8x$ に対して、効用関数を $u(x,y)=f(x)+4f(y)$ とすると無差別曲線は

$$u(x,y)=-x^2+8x-4y^2+32y=c$$

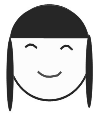
になります。



消費材 X がトロで Y がサーロインですね。ある程度までは消費とともに効用は増えますが、食べ過ぎると健康不安で満足度が低下します。
これは限界痛風理論ですね。



単価を $p_x=p_y=1$ 、予算式 を l_p ：$x+y=p$ として p を変化させてみましょう。

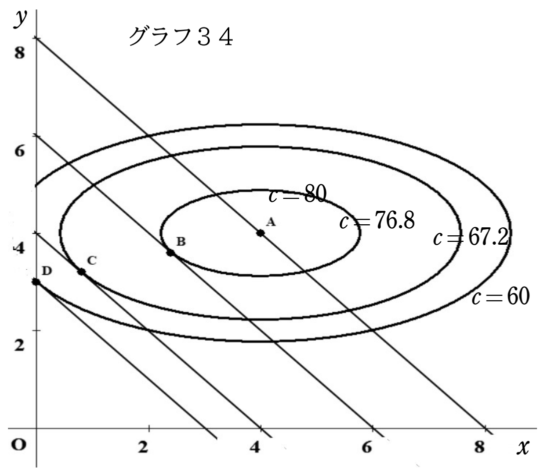


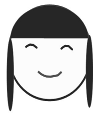
$x+y=p$ が $u(x,y)=c$ と接するのは

$(x,y)=\left(\dfrac{4p-12}{5},\dfrac{p+12}{5}\right)$ のときで、

このとき $c=\dfrac{-4p^2+64p+144}{5}$ になります。

$p=3,4,6,8$ とすると無差別曲線と予算線はグラフ３４のように変化します。

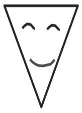




予測通り無差別曲線は楕円になりました。効用が最大になるのは２つの購入量がそれぞれ４のときで効用は 80 です。

２つの消費材の価格が $p_x=p_y=1$ なら効用を最大にするためには予算は８で十分であることが分かります。それ以上予算を増やして消費しても効用は低下するので、無駄なく食事を楽しむには予算は８までにし、それ以上消費すると健康不安で効用が低下しますから予算に余裕がある時には野菜を注文しましょうね！

【別解】



では予算線上での効用も調べてみましょう。予算線 l_p： $x+y=p$ 上での制限は

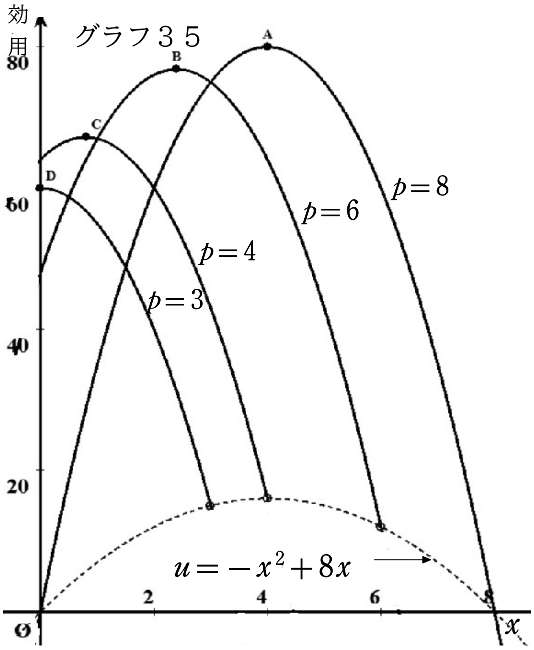
$$u(x,p-x)=f(x)+4f(p-x)\equiv u_p(x)$$

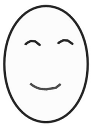
で表されるので

$$u_p(x)=-5\left(x-\frac{4p-12}{5}\right)^2+\frac{-4p^2+64p+144}{5}$$

$$(0\leqq x\leqq p)$$

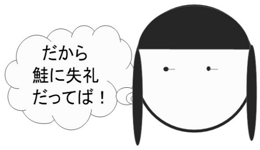
となり、 $p=3,4,6,8$ と p を変化させたものがグラフ３５です。予算を減らせば効用が減っていく様子が分かります。

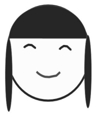




収入が増えたとき（価格が下がったとき）に購入量が増えるものが正常財ですが、逆に所得が増えると購入量が減少するものを下級財といいます。つまり「限界効用逓減の法則」は正常財を仮定しているわけですね。

なるほど。やはりサーモンは下級財でしたか！





価格の問題だけではなくSDGｓや健康志向で数量が増えると効用が減少する製品もありそうですね。

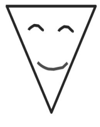
経済学の本を読むと「合理的な消費者」という言葉が出てきます。企業も収益を上げるために様々な宣伝や営業、経営戦略を採用するので消費者は迷います。次のような身近な事例を考えてみましょう。

課題２
企業が消費者対してにより多くの消費財を購入したくなるように工夫している戦略を考えてみよう。

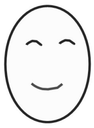
課題３
企業が薄利多売から高機能の製品販売へと移行する例を挙げ、その戦略の可否を考えてみよう。

課題４
「破壊的なイノベーション」によって市場から撤退した消費材にはどのような物があるでしょうか？また、後発メーカーに市場を奪われた企業の事例も探してみましょう。

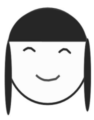
シャープや富士フィルムという会社は何を製造する会社でしょうか？



シャープは液晶で、富士フィルムは医薬品や化粧品を製造する会社です。でも社名からは想像できない製品を製造していますね。昔はそれぞれシャープペンシルやフィルムを製造していたとか？



その通りです。シャープは金属加工メーカーでしたがシャープペンシルが爆発的なヒット商品でしたし、富士フィルムはフィルムメーカーでした。その後シャープは家電から液晶へ、富士フィルムは医薬品や化粧品を製造するメーカーへと変貌を遂げました。技術革新でこれまでの正常財が下級財に変わることもあります。企業の業績も経営戦略や技術革新によって大きく変化します。技術力や資本の蓄積があっても衰退する企業があります。長いスパンで企業の沿革を調べると様々なことが分かりますよ。



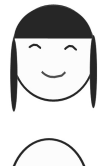
コンピュータでは昔はIBMが大きなシェアを占めていましたが、富士通などが互換機を発売し、その後はDosVが発売され、パソコン部門を中国の企業に売却しましたね。

昔はビール市場でキリンが８割り近くのシェアを占め、サッポロが２割近くでアサヒは一部の飲食店が購入する程度でしたが、今ではアサヒが８割近くのシェアを占めています。キリンも味を変えることで新しい顧客を獲得できる可能性はありましたが、これまでの顧客が離れることを心配して、他社の新製品開発によ

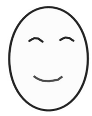
ってシェアを奪われました。IBMも多くの顧客がいましたから方針転換することが難しい状況だったのかもしれませんね。互換機を開発するメーカーは顧客に縛られているIBMの動きを予想できたでしょうし、当時はガリバーと小人たちに例えられましたが、後発メーカーはしがらみもないので新しい製品や規格で市場に参入できます。

【エピローグ】

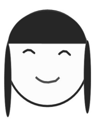
これまでは効用関数を２変数関数で考えてきましたが、３変数になると効用関数は $w=u(x,y,z)$ になるのでグラフで表すことはできなくなりますが、どう考えたらよいでしょうか？



$w=u(x,y,z)$ という３変数関数ではなく、効用を c として $u(x,y,z)=c$ と考えれば曲面になるのではないでしょうか？



そうですね。無差別曲線と同じ考え方で今度は曲面として考えればよいです。数学では等位曲面と言いますが、電場や重力場ではポテンシャルとの関係で学習することになります。偏微分や線形代数学の知識が必要になりますね。



レポートが長くなったので後半から書くのが面倒になってきたのでしょうか？何だか急に説明が雑になったような・・・・・

Ｔｏ　ｂｅ　ｃｏｎｔｉｎｕｅｄ

【参考文献】

退職して授業をすることもなく、前回からはレポートのコンセプトを授業教材ではなく、生徒向けの読み物として書くことにしました。今回はミクロ経済学から限界効用理論を「借用」して数学Ⅲと数学Cの内容を含んだ読み物に仕上げました。６校勤務した中で数学Ⅲを配置している学校で勤務した時期は短く、数学Ⅲの教材を作る機会はほとんどありませんでした。また配置している学校は受験対応も必要で特殊な教材を使う余裕もなく、今回初めて読み物として作成することができました。クリステンセンが「破壊的イノベーション」の概念を提唱して３０年ほど経ち、日本でも彼の著書

[１] イノベーションのジレンマ
　　C.クリステンセン　（翔泳社）

が２００１年に訳本として出版されました。昨年出版された

[２] イノベーションの科学～創造する人・破壊される人
　　清水 洋（中公新書）

は進路指導で生徒に読ませたい本の１つです。新卒者の初任給が上昇する一方で人員削減のために退職者を募る企業が増加し、これまで以上に学び直しが必要な時代になってきました。

また人生１００年時代を生きる私たちにとって「余生の過ごし方」という課題解決のためにも学生時代にはしっかりとした基礎基本を身に付ける必要があります。しかしながら現状は（前回のレポートでも記載した通り）高校生の「学習意欲の希薄化」、「受験に最小限必要な科目以外を真剣に学ぶ動機が低下」といった問題が中教審に諮問される時代です。職種を紹介し、関連する学部学科と受験科目を説明する流れ作業とは別に、学習することの意義そのものを問うことが特別活動だけではなく教科指導でも重要だと思います。

数学は理系分野だけに必要な科目ではありませんが、生徒に理解させるには教科横断的な教材や話題を提示することが大切だと思います。[２]はホームルームで使えそうな内容ですので、ぜひご一読ください。

退職後は古典文学や歴史書を中心に毎日読書を楽しんでいますが、理系だったこともあり、古典はあまり勉強する機会はありませんでした。それでも基本的なことを授業で習ったので今も楽しむことができます。高校生に還暦後の話をしても響かないでしょうが、指導する立場として生涯学習の観点から学習の意味を考えさせることも必要だと感じています。

今回のレポートを書くために４０年ぶりに大学時代に読んだ

[３]近代経済学Ｉ～ミクロ経済の理論
　　奥田・岸本・酒井 他（有斐閣）

を引っ張り出しました。最近の本も書店で確認しましたが、効用関数を扱う書籍を発見できませんでした。（専門分野ではないので見つけられなかっただけかもしれませんが）今回のレポートのために古本屋で購入した

[４]マンキュー経済学１ミクロ編（第４版）
　　Ｎ．グレゴリー・マンキュー（東洋経済）

では無差別曲線を用いた説明が中心でアプローチもかなり違います。結果として効用関数は[３]、無差別曲線は[４]を参考にレポートをまとめることができて、私自身の勉強にもなりました。

残念ながら
　活用する場面は
　　ありませんが・・・・