

134回数実研レポート 2025. 8. 30

続・効用関数で考える ～ 数学村は限界集落？

横山 徹

【はじめに】

前回は限界効用理論から効用関数を「借用」して2変数関数で表される曲面を切断して無理関数や2次曲線を考える「読み物」に仕上げました。今回は曲面を考え、その過程でベクトル方程式を用いて空間図形も考察します。後半は余談として大学で学ぶ様々な数学を高校数学の視点で考えます。

【前回のあらすじ】

消費財の購入量を x 、満足度を効用関数 $u(x)$ で表すと正常財の場合には「限界効用逓減の法則」が成り立ち、購入量が増えると効用は増加しますが、当初の感動（限界効用）は減少し、 $u'(x) > 0$ と $u''(x) < 0$ が成り立ちます。

2つの正常財XとYの効用関数を $f(x)$ 、 $g(y)$ とし、2つを同時購入したとき、互いの効用に影響がないと仮定すると $u(x, y) = f(x) + g(y)$ が成り立ちます。2つの消費財の単価をそれぞれ p_x 、 p_y とし、予算を p とすると予算式は $p_x x + p_y y = p$ で表されます。予算を表す領域 $D = \{(x, y) \mid p_x x + p_y y \leq p, 0 \leq x \leq p\}$ において、 $u(x, y)$ の最大値を求める方法は2つあり、1つは定義域を予算線上に制限して最大値を求める方法、もう1つは同じ効用を持つ等位曲線（経済学では無差別曲線という）を考え、予算式との接点を求める方法です。

*詳細は文献[1]を参照。

*このレポートの例題番号は文献[1]からの通し番号になっています。

【プロローグ】



効用関数を2変数関数で考えてきましたが、3変数になると効用関数は $w = u(x, y, z)$ になるのでグラフで表すことはできなくなりますが、どう考えたらよいでしょうか？



$w = u(x, y, z)$ という3変数関数ではなく、効用を c として $u(x, y, z) = c$ と考えれば曲面になるのではないのでしょうか？

【ボイル・シャルルの法則】

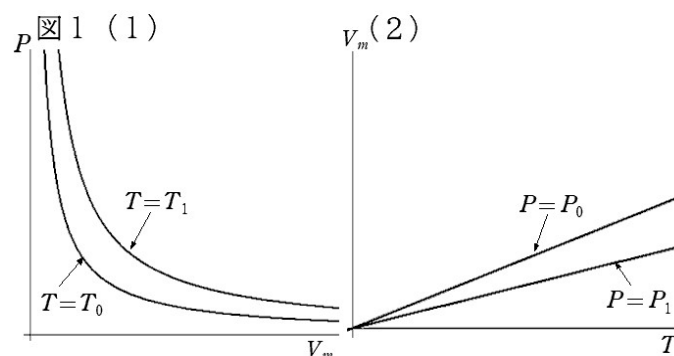


そうですね。日常的に良く使われるのは3変数関数ですが、その前にボイル・シャルルの法則を考えてみましょう。理想気体の状態方程式は圧力を P 、体積を V 、温度を T とすると $PV = nRT$ でした。ここで n はモル数、 R は気体定数で $R = 8.31 \text{ J/mol K}$ です。

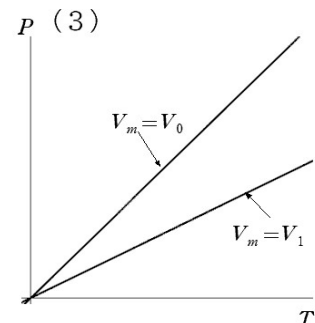
体積を $V_m = \frac{V}{n}$ として1 mol当たりの体積で考えると $PV_m = RT$ で、3変数のうちの1つを定数にすると3種類の等位線を考えることができます。

$T = T_0$ または $P = P_0$ として値を固定すると、それぞれ $PV_m = RT_0$ (定数)、 $\frac{V_m}{T} = \frac{R}{P_0}$ (定数) になります。

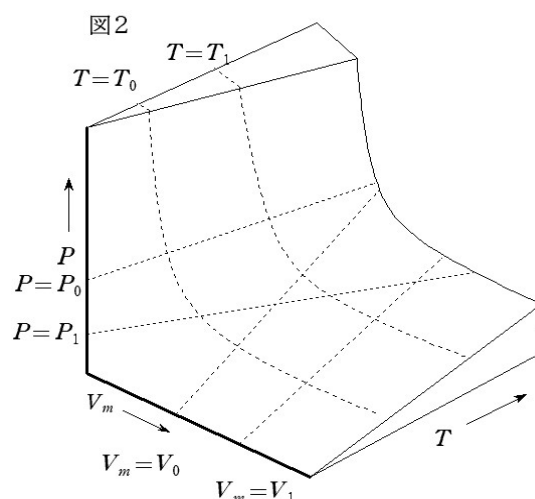
この2つの式がそれぞれボイルの法則、シャルルの法則でしたね。このときの等位線がそれぞれ等温線と等圧線になります。2つの等位線で $T_0 < T_1$ 、 $P_0 < P_1$ として図示したものが図1の(1)(2)になります。



また $V_m = V_0$ として値を固定すると $\frac{P}{T} = \frac{R}{V_0}$ (定数) になり、等容線になります。 $V_0 < V_1$ として図示したものが図1の(3)です。



3つの図からボイル・シャルルの法則としてまとめたものが図2になります。



【等電位面】

では3変数の関数で等位面を考えてみましょう。等位面が対称な図形として表れるのは電場における電位ですね。Qクーロンの点電荷が原点にあるとき、点 $P(x,y,z)$ における電位はどう表されるのでしょうか？

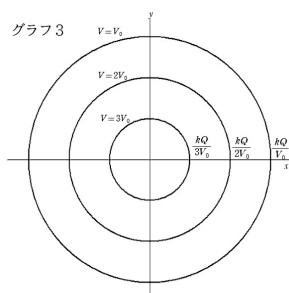


原点から r だけ離れた点 P の電位 ϕ は $\phi(r)=k\frac{Q}{r}$ です。点 P に座標を導入すると

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ですから $P(x,y,z)$ における電位は $\phi(x,y,z)=\frac{kQ}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ になります。電位が V_0 のときは $\phi(x,y,z)=V_0$ となり、等電位面は球面で、方程式は $x^2+y^2+z^2=\left(\frac{kQ}{V_0}\right)^2$ になります。



この等電位面を xy 平面で切り取ると原点を中心とする半径 $\frac{kQ}{V_0}$ の円になります。



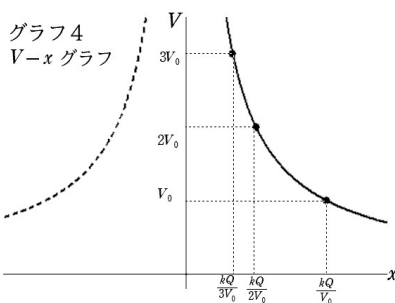
ます。これが等電位線で効用関数では無差別曲線に該当する曲線ですね。

ここで電位を $V_0, 2V_0, 3V_0, \dots$ として変化させると等電位線の半径は

$$\frac{kQ}{V_0}, \frac{kQ}{2V_0}, \frac{kQ}{3V_0}, \dots \text{となり、}$$

グラフ3の x と電位 V の関係はグラフ4になります。

では次に平面の方程式を考えてみましょう。



【平面の方程式】

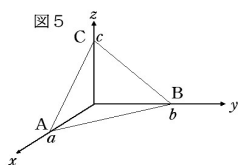


点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り $\vec{n}=(l, m, n)$ に垂直な平面の方程式は平面上の点 $P(x, y, z)$ に対して $\vec{P_0P} \cdot \vec{n}=0$ になるので、成分で表すと $l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$ になります。

【例題8】



x 軸、 y 軸、 z 軸上の3点 $A(a,0,0)$ $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ を通る平面の方程式はどうなるでしょうか？



平面の法線ベクトル $\vec{n}=(l, m, n)$ は平面上にある2つのベクトル $\vec{CA}=(a, 0, -c)$ と $\vec{CB}=(0, b, -c)$ に垂直になるので $\vec{CA} \cdot \vec{n}=al-cn=0$
 $\vec{CB} \cdot \vec{n}=bm-cn=0$

から $l:m:n=bc:ca:ab$ になり、平面は点 $A(a, 0, 0)$ を通ることから $bc(x-a)+cay+abz=0$ となり、この式を整理すると $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ になります。

【例題9】



球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ の接平面の方程式も求めてみましょう。



球面上の点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ における接平面の法線ベクトルは $\vec{OP_0}=(x_0, y_0, z_0)$ ですから接平面上の任意の点 $P(x, y, z)$ に対して $\vec{OP_0} \cdot \vec{P_0P}=0$ から $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$ になります。この式を整理すると

$$x_0x+y_0y+z_0z=x_0^2+y_0^2+z_0^2=r^2 \text{ になります。}$$



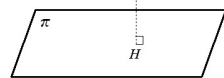
例題8と例題9は z の項が増えただけで、平面の場合の直線や接線の方程式と同じ形をしていますね。そうなると点から平面までの距離も z の項が増えただけで同じ形になるのではないのでしょうか？

【例題10】



平面 $\pi: ax+by+cz+d=0$ と点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ の距離を求めましょう。

図6



平面 π の法線ベクトルは $\vec{n}=(a, b, c)$ で、点 P_0 から平面 π に下ろした垂線の足を H とすると $\vec{P_0H}$ は法線ベクトルに平行になるので $\vec{P_0H}=t(a, b, c)$ で表すことができます。このとき

$\vec{OH}=\vec{OP_0}+\vec{P_0H}=(x_0+ta, y_0+tb, z_0+tc)$ になり、点 H が平面 π 上にあることから

$a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c(z_0+tc)+d=0$ になります。 t について解くと $t=\frac{d-ax_0-by_0-cz_0}{a^2+b^2+c^2}$ になるの

で、これを $\vec{HP_0}=t(a, b, c)$ に代入すると

$$|\vec{HP_0}|=|t|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \text{ です。}$$



予想通り z の項が増えただけで直線の場合と同じですね。では次の問題はどうか？

【例題 1 1】

例題 8 の平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ に接するように原点を中心とする球面の方程式を求めて下さい。



例題 1 0 からすぐに半径は求まりますが、接点から半径を求めてみますね。

接点を $P_0(x_0, y_0, z_0)$ とすると $\overrightarrow{OP_0}$ は平面に垂直になり、平面の法線ベクトルと平行になります。 $\overrightarrow{OP_0} = t\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ とします。ここで P_0

が平面上にあることから $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ に代して t を求めると $t = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ になります。よって

$$\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0) = \frac{abc}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}(bc, ca, ab)$$

になり、半径を r とすると

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

になるので、球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

です。



3 変数関数として電位を考えましたが、 $u(x, y, z)$ を点 $P(x, y, z)$ における温度分布と考えれば $u(x, y, z) = c$ は空間上で同じ温度になる領域を表すことになります。空間や曲面を定義域とする関数は身近にもたくさんあります。

研究

空間や曲面上に関数が定義されている（または定義できそうな）事例を考えよう。



思いつかない場合にはどうすればよいでしょうか？



理工系や経済学など、数学と関係のありそうな分野について、図書館などで調べて多変数関数や曲面の図が掲載された書籍を探すとよいでしょう。またキーワードになる単語をネットで検索すると数学の研究対象になる題材や数学を道具とする分野を発見できます。進学を考えている人にとっては進路の道標になるかもしれません。

【ベクトルの外積】



次にベクトルの外積を説明します。外積を定義する方法はいろいろありますが、ここでは後のことを考えて行列式を借用して定義しましょう。

2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ を $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ で定義します。

3×3 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対しては

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

で定義します。

$n \times n$ 行列の行列式 $|A|$ は 1 行目の a_{1n} を使い、1 行目と n 列目を取り除いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列の小行列式を使って同様に逐次展開します。

基本ベクトルを $\vec{i} = (1, 0, 0)$ 、 $\vec{j} = (0, 1, 0)$ 、 $\vec{k} = (0, 0, 1)$ とし、 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ に行列式を借用することで

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

として定義できます。行列式の定義から分かるように外積はベクトルになりますが、外積は次の 2 つの性質をもちます。

- (1) 向きは $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に向かう右ねじの方向
- (2) 大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 1 辺とする平行四辺形の面積を表す

例題 8 を使って確認してみましょう。

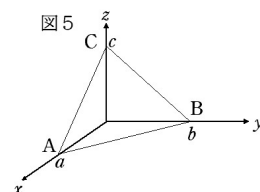
【例題 1 2】



$\overrightarrow{CA} = (a, 0, -c)$
 $\overrightarrow{CB} = (0, b, -c)$
 で $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ を計算すると

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & -c \\ 0 & b & -c \end{vmatrix} = (bc, ca, ab)$$

になり、例題 8 で求めた平面の法線ベクトルになりました。3 点 A, B, C を通る平面に垂直で向きは平面を原点から外側に突き抜けるので $\overrightarrow{CA}$ から $\overrightarrow{CB}$ に回転するときの右ねじの方向です。





$\vec{CA} \times \vec{CB}$ の大きさは

$$|\vec{CA} \times \vec{CB}| = \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$$
 になります。

$\vec{CA}$ と $\vec{CB}$ を 1 辺とする平行四辺形の面積は $\triangle ABC$ の面積の 2 倍になりますから三角形の面積を求めてみます。3 辺の長さは $|\vec{CA}|^2 = a^2 + c^2$

$$|\vec{CB}|^2 = b^2 + c^2 \quad |\vec{AB}|^2 = a^2 + b^2$$
 になるので余弦定理

$$\text{から } \cos C = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + c^2}} \text{ となり}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + c^2}} \text{ から } \triangle ABC \text{ の面積は}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \text{ になります。2 倍したものが}$$

$\vec{CA}$ と $\vec{CB}$ を 1 辺とする平行四辺形ですから外積の大きさに一致します。



外積を使うと平面の法線ベクトルをすぐに求めることができますね。それに三角形の面積も余弦定理やヘロンの公式を使わずに求めることができるので便利ですね。



右ねじと言えば「右ねじの法則」を思い出しますが、関連性はあるのでしょうか？



電磁気学などで外積は大活躍しますよ。

中国の歴史ドラマ
みたいです。



それは「外戚」でしょ！

【ベクトル値関数】



ここで少し曲線と曲面を整理しておきましょう。値域の値がベクトルになる関数をベクトル値関数といいます。

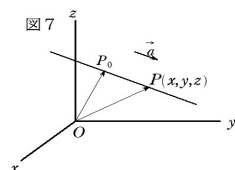
$$p(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$p(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

とし、 $x(t), y(t), z(t)$ と $x(s, t), y(s, t), z(s, t)$ はそれぞれ 1 変数と 2 変数の関数とします。

【例題 1 3】

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り、 $\vec{a} = (l, m, n)$ に平行な直線を求めてみましょう。



直線上の点を $P(x, y, z)$ とすると

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{P_0P} = \vec{OP}_0 + t\vec{a}$$

$$= (x_0 + tl, y_0 + tm, z_0 + tn)$$

になりますから $x = x_0 + tl$ 、 $y = y_0 + tm$ 、 $z = z_0 + tn$ で、これを t について解くと

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

が求める直線の方程式になります。



$p(t) = \vec{OP}$ とすると

$p(t) = (x_0 + tl, y_0 + tm, z_0 + tn)$ となり、直線を表しています。

例題 7 で考えた効用関数

$$u(x, y) = -x^2 + 8x - 4y^2 + 32y$$

は曲面を表していましたが、 $p(x, y) = (x, y, u(x, y))$ とおけば 2 変数のベクトル値関数として考えることもできます。

この曲線を予算式 $x + y = p$ 上に制限すると曲面上の曲線

$$u(x, p - x) = -5\left(x - \frac{4p - 12}{5}\right)^2 + \frac{-4p^2 + 64p + 144}{5}$$

になりますから、 $p(x) = (x, p - x, u(x, p - x))$ とおけば 1 変数のベクトル値関数と考えることもできます。

一般にベクトル値関数 $p(t) = (x(t), y(t), z(t))$ は曲線を、 $p(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ は曲面を表します。

【例題 1 4】



原点を中心とする半径 r の球面の上半部分をベクトル値関数で表してみましょう。



$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ は球面の上半部分を表すので $p(x, y) = (x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$ で定義域は $0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2$ になります。

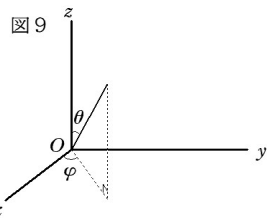
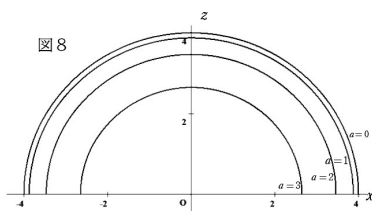
ここで $p_a(x) = p(x, a) = (x, a, \sqrt{r^2 - a^2 - x^2})$ とおくと球面上の等位線になります。

$r = 4$ 、 $a = 0, 1, 2, 3$ とすると等位線は図 8 になります。



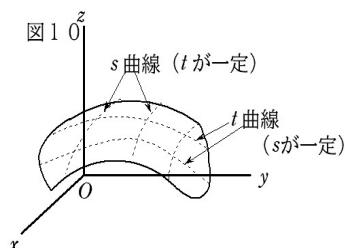
極座標で表す方法もありますね。図 9 のように 2 つの角 θ, φ を用いて

$$p(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$
 で表すこともできます。



曲面を表す方程式を
 $p(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$
 とおき、 t を固定して s だけを変化させた

曲線を s 曲線といいます。
 逆に s を固定して t だけ
 を変化させた曲線が t 曲
 線です。



$p(x, y) = (x, y, f(x, y))$ のときは $z = f(x, y)$
 で曲面を表すことができ、 $z = f(x, b)$ と
 $z = f(a, y)$ は曲面上の曲線を表すわけですね。



s 曲線や t 曲線にも接線の傾きを考える
 ことができますよね。



平面が $p(x, y) = (x, y, f(x, y))$ で表されると
 き、 $y = b$ のときの曲線 $z = f(x, b)$ について
 $x = a$ における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

で定義できます。この値を
 $f(x, y)$ の (a, b) における「 x
 に関する偏微分係数」とい
 い、 $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ で表しますが、
 混乱しなければ $f_x(a, b)$ で表
 すこともあります。

同様に y に関する偏微分係数も

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

で定義します。言葉は長いですが、曲面 $z = f(x, y)$ を
 平面 $y = b$ で切り取った曲線が $z = f(x, b)$ で、その曲線
 の $x = a$ における傾きを求めているだけです。

(x, y) に対して $f_x(x, y)$ （または $f_y(x, y)$ ）を対応させ
 る規則を f の x に関する（または y に関する）偏導関
 数といいます。



でも効用関数では予算式の $p_x x + p_y y = p$
 上で定義される曲線 $u\left(x, \frac{p - p_x x}{p_y}\right)$ を考え
 て微分しましたよ。



方向微分もあります。点 $P_0(a, b)$ を通り、
 $\vec{e} = (\cos \theta, \sin \theta)$ に平行な直線を l とすると、
 l 上の点 $P(x, y)$ は

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{e} = (a + t\cos \theta, b + t\sin \theta)$$

ですから $f(x, y) = f(a + t\cos \theta, b + t\sin \theta)$ は l 上で定義
 された曲線になります。ここで (a, b) における方向微分
 係数として

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a, b) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\cos \theta, b + t\sin \theta) - f(a, b)}{t}$$

を定義します。特別な場合として $\theta = 0$ のときは

$$\frac{\partial f}{\partial e} = f_x(a, b) \text{ になるので } x \text{ に関する偏微分係数、また}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のときは } \frac{\partial f}{\partial e} = f_y(a, b) \text{ になるので } y \text{ に関する偏}$$

微分係数になります。



すべての方向に偏微分ができれば接平面
 を持つことになりますよね？



そう考えたくりますが、すべての方向
 に微分が可能なのに接平面を持たない関数
 もあります。たとえば

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^6} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

を考えると、 $(0, 0)$ における方向微分は

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\cos \theta, t\sin \theta) - f(0, 0)}{t}$$

で、 $\sin \theta \neq 0$ のとき 0 、 $\sin \theta = 0$ のとき $\cos \theta$ になり、
 すべての方向に対して微分できます。

しかし (x, y) を $y = x^2$ に沿って原点に近付けると極限
 を持たないので原点では不連続になります。

ここまで曲線の変化を通して曲面の様子を調べてき
 ましたが限界があります。結局最後は接平面をきちん
 と定義して曲面を考えることになりますね。



接平面はどう定義
 するのでしょうか？

詳しくはWebで！



研究

(興味のある人は) ネットで全微分を検索し、方向微分や偏微分、1変数の微分と比較してみよう。



概要は分かりました。細部で特殊な問題が発生することもあるわけですね。



直感的に考えて概要を知ることは大切ですし、見通しはよくなります。工学系や経済学では自然な状態を仮定して数学を「道具」として使います。目的から考えて数学を細部まで検証するとは言い難いですね。数学が用語を正確に定義して話を進める点は法律の条文を読むことに似ているかもしれません。ユークリッドの「原論」は様々な国の言葉に翻訳され、ヨーロッパでは19世紀まで高等教育機関でそのまま教科書として使われていたそうです。法律家を目指す人の中には法律を学ぶためのトレーニングとして原論を学んだ人もいたそうで、原論は2000年以上も読まれてきたロングセラーであり、人類史上2番目に読まれた書籍だと言われています。



1番読まれている本は日本のマンガですね！



法学部に進学する人は数学を学んだ方が良いでしょうか？



数学が法律の条文解釈の妨げになると考える人もいます。



なぜ真逆の考え方になるのでしょうか？



100人いれば考え方も100通り、成功体験も失敗談も100通りあるでしょう。法学部の他にも商学部では商法や民法を学ぶことができます。法律の解釈は言葉の定義だけではなく、制定した意味も加味しますから、ある意味では数学よりも難しいのかもしれませんが、判例集を読むと面白いですよ。

同じように英語を学ぶのは英文科の他に商学部もありますし、数学も理工系の学部や経済学部、商学部でも学びます。内容は類似していますが、目的が違います。数学村の住人は少数でも道具として数学を使うことを考えると多くの人が必要とする分野と言えるでしょう。数学村の特産品は商品価値が高く、出荷先は多いですね。

【エピローグ】



前は2変数の効用関数の話でしたが、今回は等電位面などの話になってしまいました。変数が4つ以上になると対応できませんが...



数学的には極値問題や数理計画法として扱います。



えっ極地の問題ですか？
やっぱり数学村は人口減で過疎化対策が必要なんですね？



「極地」ではなく「極値」です。確かに少子化と数学離れで数学村の過疎化は進んでいるようにも感じますが、限界集落ではありません。数学離れではなく、数学の「場慣れ」をして数学の極致を味わって下さいね。

【コラム～前編のおわりに】

私の高校時代は理系コースを選択する生徒の大半が物理と化学を選択していましたが、退職する時点では物理を履修する生徒は非常に少なく、数学Ⅲの教材として物理の内容を題材としても伝わらない生徒が多いことを考え、経済学を題材にした読み物として書き始めましたが、数理計画法へ誘導することは容易でも、解析学へと誘導するには工学系の題材を避けて通ることは難しいので最後は物理を題材としての読み物になりました。

後半は理工系に進む生徒を対象にした、少し発展的な内容になるため、これまで以上に数学を専攻とする者には違和感のある進め方になりますが、扱いは「雑談」なのでご容赦ください。