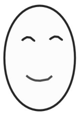
１３４回数実研レポート　２０２５．８．３０

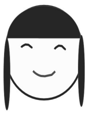
続･効用関数で考える　余談（総合的な雑談の時間）　横山 徹

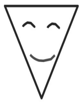
【発展～考えてみよう】

ここからは放課後の

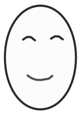


総合的な
「雑談」の時間です！

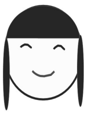




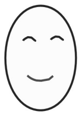
数学の使い方が少し分かってきました。数学を事前にしっかりと学習しておかなければ大学で勉強するときに困るわけですね。



専門科目を受講する前に必要な数学の学習を終えることができると良いのですが、そう単純なものでもないようです。先に専門科目で数学が登場したり、平行して学習する場合もあります。



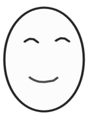
順序が逆転すると困りませんか？



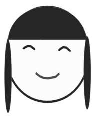
そこを自分で調べて補うのが大学です。

自分で調べる課題学習や探究学習は大切ですね。

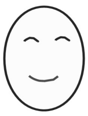
【ポテンシャル】



理工系で使う数学の概要を少しだけ紹介しておきましょう。
Qクーロンの点電荷が原点にあるとき、原点から r だけ離れた $P(x,y,z)$ に qクーロンの点電荷を置くとどうなるでしょうか？



$F=k\dfrac{Qq}{r^2}$ の大きさの力が働きます。電荷が同符号のときは斥力で力の向きは$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と同じ向き、異符号のときは逆向きです。



そうですね。定義域は x,y,z の３変数で表され、値域も x,y,z 方向の成分を持つベクトルになりますから３変数のベクトル値関数ですね。このベクトル値関数を $F(x,y,z)=(f_1,f_2,f_3)$ とおくと、 f_i はそれぞれどのように表すことができるでしょうか。

まず$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と同じ向きで大きさが１の単位ベクトル$\vec{e}$を求めます。 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ですから$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を r で割ると

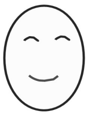
$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{r}=\frac{1}{r}(x,y,z)$$

になるので、力の大きさ $k\dfrac{Qq}{r^2}$ をかけて

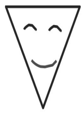
$$F(x,y,z)=k\frac{Qq}{r^3}(x,y,z)=(f_1,f_2,f_3)$$

から、 $f_1=\dfrac{kQq}{r^3}x$、 $f_2=\dfrac{kQq}{r^3}y$、 $f_3=\dfrac{kQq}{r^3}z$

になります。

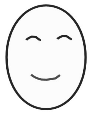


では電位 $\phi(x,y,z)=\dfrac{kQ}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ を x で偏微分してみましょう。



$$\phi_x=-\frac{kQx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}=-\frac{kQx}{r^3}$$ です。

あれ？ $f_1=-q\phi_x$ になりました。

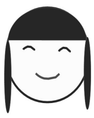


そうですね。 点Pに１クーロンの電荷を置いたときには受ける力は

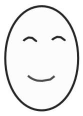
$$F(x,y,z)=-(\phi_x,\phi_y,\phi_z)$$

で表すことができます。電位を表す関数ϕは等電位面だけではなく、電荷が受ける力の成分表示にも使えます。 $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ という記号を使って表される$\nabla\phi\equiv(\phi_x,\phi_y,\phi_z)$ をϕの勾配ベクトルといい、 F は$F(x,y,z)=-\nabla\phi$として簡略化します。

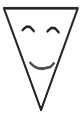
力学でも電場と同じような式が出てきましたよね。万有引力の法則も考えてみましょう。



２つの物体の質量をそれぞれ m 、 M、距離を r とすると $F=G\dfrac{Mm}{r^2}$ の力がはたらきます。



質点 M を原点に置き、無限遠点を基準にして原点からの距離を $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ にすると質点 m の位置エネルギー U に対して $F(x,y,z)=-\nabla U$ が成り立ちます。



ちょっと待ってください。少し飛躍しすぎですよ。もう少し丁寧に説明して下さい。

大学では自分で調べることになるかもしれませんが、少しだけ解説しましょう。
質量 m の質点を$P_0(x_0,y_0,z_0)$ から引力に逆らって $P(x,y,z)$ まで動かすときの仕事をWとします。
原点から P_0、 P までの距離をそれぞれ r_0、 r とし、 $\overrightarrow{r_0 r}$ の長さを n 等分した分点を r_i とすると

$r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n = r$

で、ξ_i を $r_{i-1} < \xi_i < r_i$ になるように選びます。n を十分大きくとると、r_{i-1} から r_i まで動かすときの仕事 W_i は $F(\xi_i)(r_i - r_{i-1})$で近似できるので、r_0 から rまで動かすときの仕事 W は $W \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)(r_i - r_{i-1})$ですね。

これを図示したものが グラフ１２です。

$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)(r_i - r_{i-1})$はリーマンの和 とよばれ、

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)(r_i - r_{i-1})$$

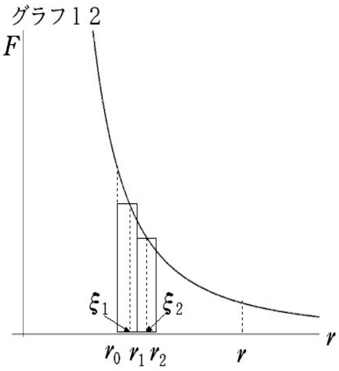
になりますが、この値は

$$\int_{r_0}^{r} F dr = \int_{r_0}^{r} G\frac{Mm}{r^2}\,dr = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0}$$

になります。無限遠点を基準にとるので $r_0 \to \infty$ で考えて

$$W = -\frac{GMm}{r}$$

を得ることができます。



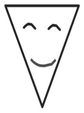
この値が位置エネルギー U で、無限遠点では 0 になり、引力で原点に近付くと位置エネルギーは小さくなってその分だけ運動エネルギーが増加するわけですね。

力の向きは原点に向かう方向ですから Fをベクトルと考えて、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とすることでポテンシャルの場合と同じように計算できるので

$$\overrightarrow{F(r)} = \frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{\mathrm{PO}} = -\frac{GMm}{r^3}(x,y,z)$$

になり、$U(r) = -\frac{GMm}{r}$ を x,y,z で表して偏微分することで$\vec{F} = -\nabla U$ になります。

数学ではマイナスをとって $\vec{F} = \nabla U$でポテンシャルを定義することもあります。



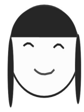
なるほど。全く違う話だと思っていましたが、数学的には同じ問題として扱うことができるわけですね。

【収束の考え方】

一般化したり抽象化することで共通の性質を研究することが数学の醍醐味ですね。

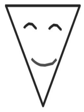
しかしリーマンの和$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)(r_i - r_{i-1})$ は常に収束するとは限りません。

区間 $a \leqq x \leqq b$ で定義された関数$f(x)$ が連続でない場合、つまり所々値が違う場合にはどうなるでしょうか？

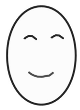


$x = c$ で値が違っても積分区間を分けて計算するだけなので定積分に影響しないと思うのですが？

異なる値が有限個の時には問題ありませんが、無限個「穴があいた」状態の関数のときはどうでしょうか？その前に関数列 $\{f_n(x)\}$ の収束とは何かを考えてみましょう。$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ の意味をどう考えますか？



定義域のどの点に対しても数列 $\{f_n(x)\}$が収束するという意味です。



その収束を各点収束といいます。

$f_n(x) = x^n \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

は各点収束します。極限を表す関数 $f(x)$ は

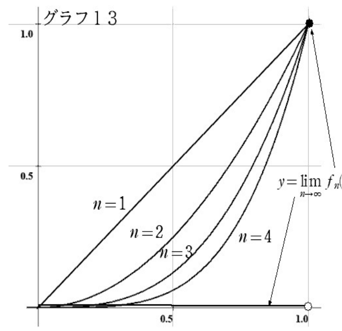
$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

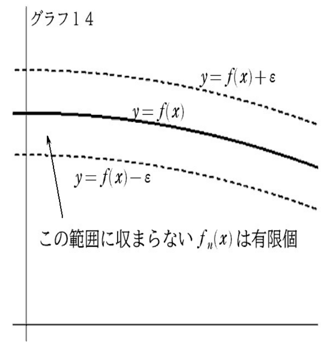
ですが、$x = 1$ では不連続です。もとの関数が連続でも極限関数が連続になるとは限りません。また $x = 1$ に近付くほど極限関数への近付き方は遅くなります。

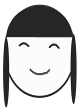
（グラフ１３）

これに対して$g_n(x) = x^n$ $(0 \leqq x \leqq 0.5)$ の極限関数は $g(x) = 0$ となり連続です。この時の収束は一様になっています。

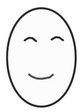
一般に関数列 $\{f_n\}$ と極限関数 f があるとき、小さな値εに対して、$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ にほとんどの f_n の値が 収まっているとき、いい変えれはこの範囲に収まらない f_n が有限個しかないとき、一様収束といい各点収束と区別して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$（一様）で表します。







極限の考え方を変えるということは関数の間の「距離」の考え方を変えるということでしょうか？



その通りです。f と g の距離を

$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ で考えることもできます。

でも全く収束しない点があるのに２つの関数が同じ関数として扱うことになりませんか？

そうですね。でも囲まれた面積が0という意味では「同じ」ですね。

数学は厳密に定義すると思っていましたが、意外でした。数学にもアバウトなところがあるわけですね。

【リーマン対ルベーグ】
【例題１５（ディリクレの関数）】

Qは有理数全体を表す集合です。
$0 \leqq x \leqq 1$で定義された関数として
$f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ をディリクレの関数といいます。この関数に対して$\int_0^1 f(x)dx$を求めることはできるでしょうか？

有限個の点だけで値が異なるときは積分の値に影響しませんが、これだけの数になると分点を増やしてもリーマンの和は収束しないのではないでしょうか？

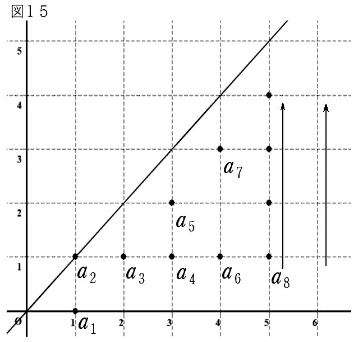
もしも机の上に硬貨が50円,10円,1円,50円,5円,10円,10円として一列に並んでいたら、どうやって合計金額を求めますか？

$50+10+1+50+5+10+10=136$円です。

ところがルベーグは
$1\cdot1+5\cdot1+10\cdot3+50\cdot2=136$円として計算しました。ルベーグの考え方は銀行家の数え方に例えられることがあります。

なるほど。値は0と１だけなので、有理数を寄せ集めたときの長さに１をかけたものを積分の値として考えるわけですね。でも無限に点在する有理数の長さをどうやって調べるのでしょうか？

まず0から１の間にある有理数を数えてみましょう。有理数は２つの整数m,nを組み合わせて$\dfrac{n}{m}$で表すことができる数ですから定義域$0\leqq x\leqq 1$に含まれる有理数を座標上に点(m,n)として取り、重複しないようにして図１５の格子上の点として表示することができます。つまり順番に番号を付けることができるわけです。



ここで十分に小さな数εを使ってｎ番目の点a_nを$\dfrac{\varepsilon}{2^n}$の長さの区間で覆うと区間の長さの和は$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$になりますが、$\varepsilon$はいくらでも小さな値として考えることができるので0から１の間にある有理数をすべて集めても長さは0です。したがってルベークの考え方では$\int_0^1 f(x)dx=0$になります。リーマンの考え方で積分できなかった関数もルベーグの考え方なら積分を定義することができます。

つまりディリクレの関数は「だいたい」$f(x)=0$と考えてよいことになります。

ディリクレの関数のように値域が有限個の値なら計算できそうですが、一般の関数ではどうなるのでしょうか？

リーマンは定義域を分割して近似しましたが、ルベーグは値域の方を分割して階段関数を使って近似しました。

イメージとしてリーマンは縦に切って短冊の面積で近似し、ルベーグは横に切って点を寄せ集めて近似したわけですね。「だいたい」という考え方は値の異なる部分の点を集めても長さに影響のない程度ということですね。

条件を強めて一様収束を条件にすると連続関数の極限関数も連続になるという利点はありますが、ルベーグのように条件を弱めることで何か利点はありますか？

関数列$\{f_n\}$が極限関数fをもち、積分可能で$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$も存在するとしましょう。

でも$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$になるとは限りません。そもそも極限関数$f$が積分できないかもしれません。

【例題１６】

例題１５で順番をつけた有理数a_nに対して$0\leqq x\leqq 1$を定義域とする次の関数列を考えます。

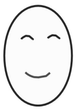
$$f_n(x)=\begin{cases}1 & x=a_1,a_2,a_3\ ...\ a_n\\ 0 & その他\end{cases}$$

値が１になる点は有限個なので$\int_0^1 f_n(x)dx=0$となり、

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$ですが、$f_n(x)$の極限関数はディリクレの関数になるので、リーマンの意味では積分はできません。

ルベーグの方法で積分を考えることで様々な収束を考えることができるようになりました。関数の近似は関数列だけではなく近似方法、すなわち関数の距離をどう定義するかも示さなければなりません。

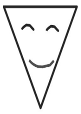
最も適切な距離や収束の考え方はどれでしょうか？



平均にも相加平均、相乗平均、調和平均などがあり、使い分けするように関数列の収束や距離の考え方も扱う問題によって適切な方法を選びます。それぞれの専門分野で距離の定義は異なります。関数列の近似を考えるときには収束の意味に注意する必要があります。

【「のような」もの？】

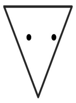
工学系の分野では大学２年で関数ではないけど関数「のような」ものが出てきます。



数学の定義は厳格だと思っていましたが、「だいたい」とか「のような」とは大学で学ぶ数学は随分イメージが違いますね。
「のような」とは何ですか？

数学科の学生は４年生で勉強しますが、工学系の学科では２年生で登場するので、正確な説明はできず「のような」ものという表現になります。歴史的には２０世紀初頭にディラックが便利さから使い始めたようで、数学的に説明がついたのは２０世紀半ばになってからです。「のような」ものの正体は汎関数です。ディラックの考えた汎関数を高校生に説明するのはちょっと難しいので、一般的な汎関数について少しだけ説明しましょう。工学系で重要なのは「関数の関数」です。

よくわかりませんが‥‥



たとえば $D: f(x)\to f'(a)$ 　や　 $L: f\to\int_a^b f(x)dx$

はいずれも定義域が関数で、値域が実数になる写像ですね。これらはすべて汎関数です。工学系で特に重要なのは

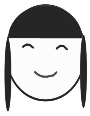
$$L_g(f)=\int_a^b g(x)f(x)dx$$

のようなタイプの汎関数で、gの値を変えれば別の汎関数になります。

逆に関数を定義域とする汎関数$L(f)$はある特殊な条件のもとですが、関数$g(x)$を用いて

$$L(f)=\int_a^b g(x)f(x)dx$$

として表すことができます。（リースの表現定理）



どんな条件でどうやって求めるのでしょうか？

説明は難しいので簡単な汎関数を例にして説明しましょう。２変数関数fを

$$f(x,y)=2x+3y$$

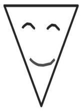
とし、$\vec{a}=(2,3)$、$\vec{z}=(x,y)$とおくと 関数fは

$$f(\vec{z})=\vec{a}\cdot\vec{z}$$

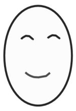
で表すことができます。$f(\vec{z})=f(x,y)=2x+3y$も平面ベクトルを定義域とする汎関数です。逆にある一定の条件を満たす汎関数は$\vec{a}$を用いて

$$f(\vec{z})=\vec{a}\cdot\vec{z}$$

で表現できますよね。



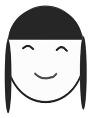
でもかなり狭い範囲の汎関数だけですよ。$f(\vec{z})$がx,yの１次式で、しかも定数項がないときだけです。



関数上で定義された汎関数もごく限られた場合だけですが、平面ベクトルを関数に変えるだけでもルベーグ積分や新しい収束の考え方を使うので話は複雑になります。

$\int_a^b f(x)g(x)dx$をfとgの内積とよぶこともあります。

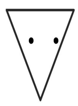
研究
$\langle f、g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$とベクトルの内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$に共通する性質を考えてみよう。



大学ではそれぞれの専攻に必要な数学を学んでから工学の専門分野を学ぶと思っていました。

専門科目と数学を平行して学習する場合は結構多いですし、順序が逆転することも珍しくはないです。

習っていない内容は
どうなるんですか？



自分で調べてくださいね。

今何をすべきでしょうか？また、習っていない内容が出てきたら授業についていけるでしょうか？

人それぞれですね。習っていない数学を調べているうちに数学の魅力に取り付かれて編入試験を受けて数学科に入る人もいます。

卒業が遅れますよね？

そのまま工学系の学科を卒業し、大学院から数学を専攻する人もいます。

入学試験があるのではないでしょうか？

試験科目は事前に分かっているので独学で勉強して入試に備えます。テキストに何を選んだらよいか相談されたこともあります。一方で数学が好きで数学科に入学しても単位を落とす人もいます。

「数学が先か、それとも専門科目が先か」ということではなく、相互に関連しているので両方をバランスよく学ぶことで理解が深まります。結局は今できることを手を抜かずに頑張るしかありませんね。

他に質問は？

【電子の綱引き】

電子同士は同じ負の電荷を帯びているのでクーロン力は斥力になりますが、質量もあるので万有引力の影響も受けます。電子はどうなるのでしょうか？

電子の電荷は $-1.6\times10^{-19}\ c$で真空の誘電率 は$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\ F/m$ ですから

$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^9\ Nm^2/c^2$$ となり

rだけ離れた２つの電子のクーロン力 は

$$F_1=9\times10^9\times\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{r^2}\ \ N$$

です。一方電子の質量は $9.11\times10^{-31}\ kg$ で万有引力定数は $G=6.67\times10^{-11}\ Nm^2/kg^2$になるので万有引力は

$$F_2=6.67\times10^{-11}\times\frac{(9.11\times10^{-31})^2}{r^2}\ \ N$$

です。$\dfrac{F_1}{F_2}=4.16\times10^{42}$ になるので万有引力に比べてクーロン力の方が圧倒的に大きいことが分かります。

でもイメージが湧きません。$1\,c$の電荷を帯びた物質同士にはたらく力はどの程度になりますか？面積や体積のように東京ドーム何個分のような説明をしてもらえると分かりやすいのですが。

$1\,c$の電荷を帯びた２つの物質を$1m$ 離して置いたときの斥力は $9\times10^9\ N$になりますから、この力を地球の重力で比較してみましょう。重力加速度は $9.8\ m/s^2$ですから質量 M の物質にかかる力に等しいとすると $9.8M=9\times10^9$ が成り立つので$M=9.2\times10^8$ になります。$1\ c$の電荷を帯びた２つの物質を $1\ m$ 離したときに受ける力は$9.2\times10^8\ kg$ の質量にはたらく重力に相当します。

なるほど。
かなり大きな力ですね。

【いろいろな積分】

万有引力のときの定数は Gだけですが、クーロン力のときにだけ$k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ という式が登場します。4π にはどのような意味があるのでしょうか？

$k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ だけを見ても分かりませんが、電界の強さを表す式全体を$E=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{4\pi r^2}$ に変形しましょう。何か気付きませんか？さらに式を変形すると $4\pi r^2E=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$になりますが。

$4\pi r^2$ は半径 r の球の表面積ですね。$\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ を球の表面積で割ったものが電界の強さになるということですね。

電界の強さが何かの密度になっているという式ですね。$\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ がその「何か」を表していますが、正体は不明です。

電界の強さを表すものには何があるでしょうか？しかも $4\pi r^2E$ が総量を表し、単位面積あたりの値は球の半径が大きくなるほど逆に小さくなるものですよ。

$4\pi r^2 E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ が電気力線の本数で、電界の強さEは電気力線の単位面積当たりの本数になるのではないでしょうか？ そう考えると原点から離れれば電気力線の密度が下り、電界の強さも小さくなるので説明がつきますよ。

その通りです。ε_0 は真空の誘電率なので点電荷を遮る媒体があれば電気力線の本数も変化します。物質ごとに誘電率εは異なりますが、$\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ を比誘電率といい、紙は２～2.6、水は81です。

「単位面積当たり」とはいっても球面の場合には電気力線はすべて球面に垂直なので簡単ですが、平面や一般的な曲面上では垂直になりません。どうすればよいのでしょうか？

説明するのはちょっと大変ですね。続きは大学で勉強して下さい。

レポートが長くなったのでまた手抜きですか？

ではアウトラインだけ説明しましょう。ベクトルの演算を含む積分として $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{r}$ や $\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$ が登場します。

$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{r}$ の例として仕事があります。一定の力 f で同じ方向に r だけ移動したときの仕事は $W = fr$ ですが、方向が違う場合にはベクトルの内積を使って $W = \vec{f}\cdot\vec{r}$ になります。

図１６

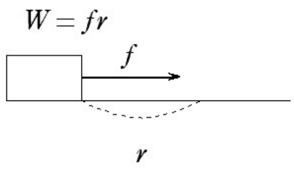
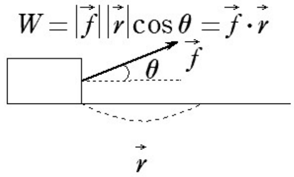


図１７



r が１変数のベクトル値関数 $r(t)$ のときには曲線を表します。その曲線上で力が変化する場合には曲線上に分点 r_i をとり、$\overrightarrow{r_{i-1}r_i}$ で曲線を近似し、力も r_{i-1} の地点でのベクトル$\vec{f_i}$を用いることで 曲線 C を移動するときの仕事を$W \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} \vec{f_i}\cdot\overrightarrow{r_{i-1}r_i}$で近似します。その極限が $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{r}$ になるわけです。

図１８

そうすると $\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$ は 曲面 S 上で定義された２変数のベクトル値関数を平面 で近似するわけですね。

$d\vec{S}$ は $\vec{n}dS$ で表すこともあり、このときの dS は面積で、$\vec{n}$ は単位法線ベクトルです。

近似する平面が平行四辺形なら２つのベクトルの外積ですね。

$\vec{f}\cdot d\vec{S}$ は外積の微小変化 と$\vec{f}$ の内積 で近似すると考えてもよいですね。

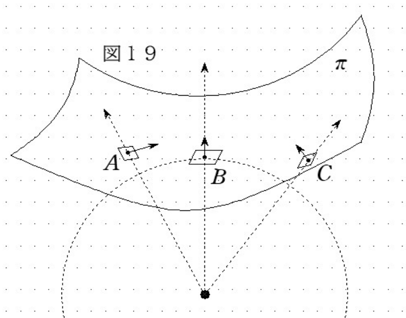
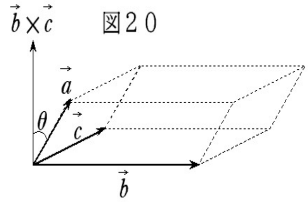


図１９の点Bでは電気力線と接平面の法線ベクトルは同じ向きですが、点Aと点Bでは向きが違うので平面の垂直方向を通る電気力線の本数を求める必要があります。そこで内積を計算するわけです。



数学では $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ をスカラー三重積といい、絶対値は３つのベクトルでつくられる平行六面体の体積になっています。図２０では $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = |\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\theta$ ですが、$|\vec{b}\times\vec{c}|$ は平行六面体の底面積で $|\vec{a}|\cos\theta$ の絶対値は高さになります。

１変数のときの定積分が面積の近似になるのと同様に曲面 S を平面で近似し、各平面を垂直に通過する電気力線の総和がリーマンの和に相当し、分割を増やしたときの極限が $\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$ です。

実際には$|\vec{a}|$ が様々な単位面積あたりの物理量を表し、底面は曲面を近似する微小な平面ということですね。

$\vec{f}$が電場の強さを表すベクトルでSが点電荷を囲む閉曲面のとき、$\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$になります。この式はガウスの法則として知られています。 一方、数学では$\iiint_V div\vec{f}dV=\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$を発散定理として習います。ガウスの 法則や流体の説明を聞いていれば当然に思えても、知らなければ象形文字や甲骨文字を解読するのと同じかもしれません。

数学と工学は鶏と卵の関係みたいで、 どっちが先なのか分かりませんね。

若い皆さんには「コロンブスの卵」の話の如く、何事も最初の１人であってほしいです。

$\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$の具体的な計算方法はどうなるのでしょうか？

多変数関数の積分になるため、工学系の学科では１年生で重積分を終えてから、つまり２年生の授業でベクトル解析として学ぶことになるでしょう。しかし１年生の専門科目でベクトルを含む積分の式として法則や現象の説明に使われる可能性があります。高校では入試問題を解くだけではなく、定積分の定義やリーマンの和など、基本的な内容をしっかり理解しておくことが大切です。

仕事や電気力線以外にベクトルを含む積分を使うことはありますか。

空間上でベクトルが定義されていれる現象の説明に積分は出てきます。理工系の多くの分野で使うことになるでしょう。

研究
空間や曲面上にベクトル値関数が定義されている（または定義できそうな）事例を考えよう。

【法令の条文や判例を調べよう】

数学と法律の条文の記述が類似しているとのことでしたが、具体的にどのような点が似ているのでしょうか？

法律用語を正確に把握しなければ条文を理解できないという点でしょうか。例えば人は自然人で、民法では産まれたときから人権を有すると規定されています。自然人という言葉も独特ですが、出生の時期は刑法では身体の一部、民法では全部が露出したときと考えるようです。ところが損害賠償や遺産相続では胎児も人としての権利を認められています。相続は自然人の死亡で始まるので死亡にも定義が必要です。病気や事故で亡くなる以外にも失踪宣告による死亡がありますよね。

自然人という言葉があるということは自然じゃない人もいるのですか？

法的な手続きにより人格を有するのが法人です。法人ではない団体にも権利や義務は生じますけどね。

そう考えると条文を読むのも一苦労ですね。

でも数学の得意な人は法律家に向かないという考え方があるのは何故でしょうか？

大学で受講した法学の試験で「恵庭事件で考えられる判決を７つ書きなさい」という問題が出題されました。
６０年以上前の事件ですが、恵庭の自衛隊演習場近くの酪農家は騒音が原因で搾乳量が減ったことから「演習の際には事前に連絡をする」と確約を受けたにもかかわらず、無断で演習が行われたことに抗議し、演習で使用する通信回線を切断した事件ですが、無罪になりました。

器物損壊で有罪では？

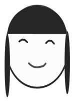
検察が刑法第261条の器物損壊罪で起訴していたら有罪判決になったでしょうが、自衛隊法１２１条で起訴したので無罪判決になったのでしょう。条文には「自衛隊の所有し、又は使用する武器、弾薬、航空機その他の防衛の用に供する物を損壊し、又は傷害した者は、五年以下の懲役又は五万円以下の罰金に処する」となっています。

なるほど。自衛隊法では無罪というわけですね。

大きな争点が２つあり、１つは通信回線が自衛隊法の「武器、弾薬、航空機その他」に該当するかどうか、もう一つは自衛隊法そのものが合憲なのかということです。裁判所は通信回線が「武器、弾薬、航空機その他」に該当しないと判断して無罪にしました。報道機

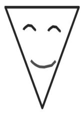
関は自衛隊の違憲問題に焦点を当てていたので、憲法問題に触れることなく判決が確定したことに対して「肩すかし裁判」と揶揄されましたが、搾乳量の減少で被害を訴える酪農家に対して最高裁まで争わせるのは酷ですよね。

他にどのような判決が
考えられるのでしょうか？



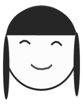
訴因変更して刑法第261条の器物損壊罪で有罪判決にすることもできたでしょうが、６０年前ではハードルを下げて起訴する可能性はなかったでしょう。他にも答案には何かを書きましたが、４６年前の答案なので記憶にありません。上告の場合分けを考えていくとかなりの判決がありますね。ちなみに後期試験はアメリカの公民権法でした。

なるほど。解釈や運用方法を
考えると数学とは少し違うよ
うにも感じますね。



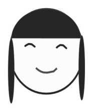
そうとも言えません。数理モデルを考える場合には厳密さはあまり気にせず、実態の表現が問題になります。ボイル･シャルルの法則では気体が液化すると修正が必要になります。その１つがファン･デル･ワールスの状態方程式です。どこまでを「数学」と定義するかにもよりますが、学問分野に境界を設けて「それは数学ではない」と主張する必要もないでしょう。数学村に住むか、その生産物を活用するかの違いですし、生産物を消費するだけの人もいれば加工品の材料にする人もいます。数学の活用までを数学と考えるなら法学に似ているのかもしれません。

数学科で法学は
必修ですか？

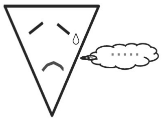


一般教養では基本的に好きな科目を選択できました。私は社会科学で法学と政治学を選びました。政治学の先生は「政治学は政治学者の数だけあるので、私の政治学をお話します」と言って自分の著書「セルゲイ･ウィッテとロシアの工業化」について講義をしました。政治学というよりも帝政ロシア時代の経済政策にかかわる内容が中心でした。専門科目では内容が理解できずに頭を抱えることもありましたが、一般教養の授業は楽しかったですよ。

大学では専門以外の授業も
楽しそうですね。

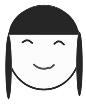


高校の授業も同じように楽しいと思います。新しい知識を得るということは喜びでもあります。受験科目以外は不要と考えている生徒が近年増えているそうですが、皆さんは自ら授業を楽しめない状態にしていませんか？



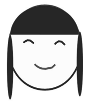
文系の学科で一般教養として数学を学んでから興味を持ち、数学科に入学した人もいましたし、逆に数学科に入学したのに授業が分からなくなる人もいました。

好きな科目を勉強するために
入学してもですか？

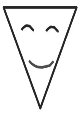


地区大会で圧倒的な強さで優勝しても全道大会で苦戦し、全国大会で初戦敗退することもあります。好きなことを仕事ではなく趣味として割り切ることも１つの生き方かもしれませんね。実際には大学の求人の多くは「学部学科不問」のようです。

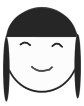
「〇〇の職種に就くには△学科、
そのために受験に必要な□を履
修する」という考え方はどうで
しょうか？



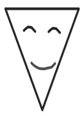
それも一つの考え方ですね。しかし大学生になってからも進路が変わり、編入して専攻を変える人もいますから、高校生でも進路が変わることもあります。「学ぶことは変わること」でもあります。就職したら嫌でも仕事に関係する勉強をしなければならないので、学生時代は好きな勉強するという人もいます。退職したら勉強も不要になるかもしれませんが・・・



そうでしょうか？先生もそろそろスマホを買って、使い方を学んだ方が良いと思いますよ。



ミラノ風ドリアを食べに行くたびにスマホで注文できる友人を誘うという都市伝説は本当ですか？

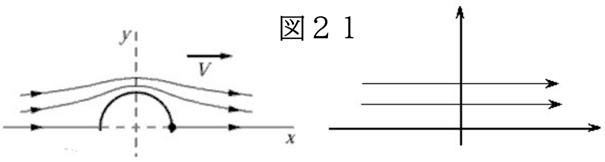


電子決済だけではなく、注文するときもスマホが必要な時代ですよ。私たちが引率してもいいですよ。

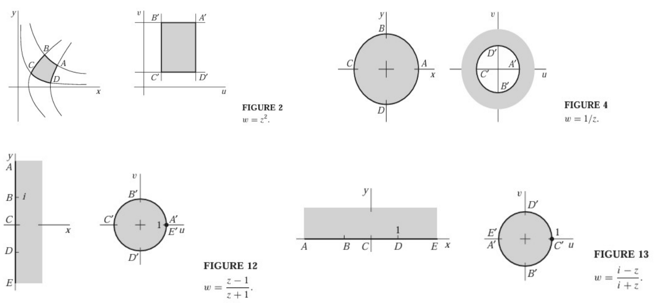
【おわりに】

今回のレポートでは校正の段階で本文から削除した内容が１つあります。機械工学や土木工学の授業の中で扱われる流体の内容で、図２１はシリンダーの周りの流れを表す図です。これを$w=z+\dfrac{1}{z}$で領域変換すると、流れは座標軸に平行な直線に変換されることが知られています。

図２１



Kelloggがポテンシャル論に関する書籍を出版して100年あまりが経過し、国内でも様々な和書が出版されましたが、それらも出版から６０～７０年が経過し、私の学生時代には神田の古本屋巡りをしても見つけることはできませんでした。最近ではポテンシャル論という言葉を耳にする機会もあまりありませんが、複素ポテンシャル、調和解析の問題として文献［４］（その原書が［５］）に応用例として登場する問題の１つが上記の流体の問題です。原書も初版からすでに７０年以上が経過し、訳本も全訳ではなく応用部分の一部を欠いていたそうですが、現在は絶版です。内容はともかくとして、巻末の等角写像による領域変換の図表は興味深いので一部を抜粋して紹介します。



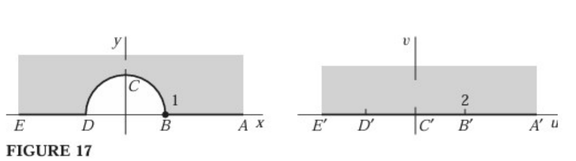


FIGURE 17

$w = z + \frac{1}{z}$.

最後のFIGURE17の等角写像による領域変換が先ほどの「流れ」の問題に利用されています。この事例を活用して様々な領域変換を考えさせたり、行列による１次変換を検索させて比較させれば探究学習や課題学習のテーマにすることもできるわけですが、「時代遅れ」だと考えて本文からは削除しました。

行列を用いた１次変換も学習指導要領から削除されて、かなり経過しています。１９８０年代には大学でも研究室にコンピュータが入り始め、９０年代以降は日進月歩で性能が上がり、数学の研究領域も線形から非線形、確率過程、数理モデルやシミュレーション等、それまでは経営工学科などで扱われた領域も含まれるようになり、研究領域も様変わりしました。３０年前には流体を専門とする研究者がコンピュータを使って有限要素法を利用していました。等角写像はすでに古典ですが、私の学んだ数学はアナログ時代の旧式の数学で、これから課題研究や探究学習を生徒に取り組ませるにはアップデートが必要です。

「教科横断的」という文言が平成１１年告示の学習指導要領から継続的に使用されていますが、学問的な研究領域が縦割りであるはずもなく、数学が多くの分野で活用されてきたことを考えると学習指導要領の改訂はそれまでの「便宜上の縦割り」から「実態に即した運用」に舵を切ったようにも感じます。実際にはそれまでも他分野の内容を教材にしてきましたが、生徒の進路の変化への対応が可能になる他にも「教科横断的な学習」の意義は２つあると考えます。１つは文科省の平成３０年度の諮問内容にある「家庭学習時間の減少、受験に関係のない教科に対する意欲の欠如」への対応で、「教科横断的な考え方」で履修する科目すべての学習意欲を高めることです。

もう１つは数学を「道具として活用する分野」の進歩が早く、１０年毎の学習指導要領の改訂では追いつけない部分に対応するため、教材のアップグレードをすることです。私が大学を卒業して４０年以上が経過し、数学科のサイトで教官の研究分野を読んでも理解できないことが増えてきました。また、書店に並ぶ専門書のタイトルも１０年一区切りで考えれば書棚に新しい区分の書籍が出現しています。課題学習、探究学習、課題研究、教科「理数」の教材を継続的に手直しすることは重要だと思います。その意味で、若い先生の研究には興味があり、教えを乞う必要があると思います。

【参考文献】

［１］効用関数で考える～鮭と鮪の関係とは
１３３回数実研レポート

では限界効用理論を題材にし、今回は電磁気学、力学、熱力学の内容を題材にして曲面や曲線を考えました。物理や化学、工学に関わる参考文献は記載しませんが、工業高等専門学校の教科書は理解しやすいと思います。後編の超関数論を短期間で読める書籍として

［２］フーリエ解析と超関数　垣田高夫（日本評論社）

［３］関数解析入門　州之内治男　（サイエンス社）

を紹介します。［２］は概要を理解できる程度ですが、コンパクトにまとまっています。［３］は理工系の学生用のシリーズとして出版され、リースの表現定理を含むヒ

ルベルト空間や超関数に関する基本的な内容が記載され、付録にはルベーグ積分やノルム空間などの記載もあります。

　ポテンシャル論に関する書籍はすでに絶版になってから半世紀以上が経過していますが

[４]複素関数論入門　R.V.チャーチル　J.W.ブラウン（マグロウヒル社）

[５]Complex Variables And Applications
Churchill,R.V. & Brown,J.W.(McGraw－Hill)

について、前半分部は複素関数論の標準的な教科書ですが、後半には複素ポテンシャルに関する記述があり、等角写像の応用について書かれています。

[６]等角写像図集　渡辺昇（朝倉書店）

は私の学生時代に土木工学分野の専門書として出版されましたが、発行部数が少なくて現在も古書としての入手は困難です。すでに流体力学の分野では古典となり、活用することもなさそうですが、誰かが新しい活用方法を思いつけば日の目を見ることがあるかもしれません。

[７]線形代数　田河･岡部･斎藤･高遠･山本（大日本図書）

は高専の２，３年生のテキストとして（改訂はされているようですが）使用され、高校生には読みやすい内容です。

　月刊「ジュリスト」には分かりやすく判例の解説が書かれていますが、（法律の専門家ではない私には難しい部分もありますが）増刊では分野ごとの特集があり様々な判例を紹介しています。月刊では今話題の判例を、増刊からは民法のように身近な判例を題材として、数学との類似性を考えさせながら教材に追加することで文系に興味のある生徒に対しても数学を学ぶ動機付けになるかもしれません。ユークリッド原論の全訳は共立出版から出版されていますが、

[８]古典幾何学　田代嘉宏　（新曜社）

[９]幾何学基礎論　D.ヒルベルト（ちくま学芸文庫）

も読みやすく、面白い書籍だと思います。

　「生徒の興味関心、進路希望は学習によって常に更新され変化するもの」だと思いますが、数学は受験科目としての比重が大きく、授業中に余談を語る時間はありません。授業には生徒との出会いがあり、筋書きのない１時間のドラマでもあります。教育課程の編成や運用に対してはドラスティックに、そして授業はドラマテックに向き合うことが大切だと感じています。

【追記～アンケートに思うこと】

　7月4日 に開かれた第１０回教育課程企画特別部会の「豊かな学びに繋がる学習評価の在り方」の資料には「 指導と評価の一体化は道半ば」という箇所で、次の２つが問題点として記載されていました。

１ 形成的評価と総括的評価が依然として十分に区別されず、学習評価の全てが評定のために行われることが多い

２ 学期ごとに評定を細分化して確定し、その後の学習状況の如何にかかわらず、変更しない取扱が多い

　観点別評価の導入前から学習意欲は「平常点」として評定に加味し、研究会等でも学習意欲喚起のための評価法は主要な研修テーマであったことから観点別評価の導入そのものは学校にとって大きな変化ではなかったと思います。評価法は指導法でもあり、現在では簡潔に「指導と評価の一体化」という便利な言葉で表現されていますが、それに対して評定（総括的評価）は１年間の学習成果をまとめる作業にすぎません。特に学習意欲の評価は「評価は生徒のためのもの」という視点で考えると重要な項目であり、評価法でありながら指導法として教員が能動的に取り組むべき問題でもあります。数学では同値な命題はどちらを定義に採用しても同じですが、その後の展開は大きく異なります。観点別評価を「指導法」として定義すると「意欲の評価」は「意欲を持たせるための指導」に置き換わり、生徒個々の状況に応じて指導を行い、その変容を成果として評価点を付与するだけだと思います。言い換えれば「主体的に取り組む態度」の評価に必要なことは「扱う対象に対して位相の入れ方を変え、距離の測り方を変えること」と同じだと思います。指導内容や評価内容は同じである必要はなく、逆に同一基準で指導、評価を行うと習熟度別のクラス編成では混乱をきたします。個に応じた内容で指導したときの変容を「主体的に取り組む態度」として評価すれば良いのではないでしょうか？また、同じ生徒でも年間を通して興味関心は変化するため、指導法（評価法）も変える必要があります。どの時点においても「主体的に取り組む態度」に満点を付与できるように指導することが大切であり、評価であれ評定であれ、その変容を認めることができなければ、それは指導する側の負の評価として指導法の改善や教材の工夫が求められるのだと思います。教員数の多い大規模校では今も昔も意思統一には苦労するでしょうが、観点別評価は小規模校ではそれほど難しい事案ではなかったように感じます。

　評定の算出方法そのものは法的にも文科省の通知によって学校が定めるべき内容なので、通知に変更がなければ「主体的に取り組む態度」の評定の取り扱いは最終的に学校の判断になるのかもしれません。私は昔も今もこれからも大切な項目だとは思いますが…