「タイル割り問題」の考察

北海道札幌丘珠高等学校　教諭　高　倉　亘

（*Keywords*：点集合、最大公約数、互いに素）

1　緒　言

平成２７年栃木県公立高校入試において、次のような趣旨の問題が出題された。[1]

> $AD=a$、$AB=b$（a、$b\in\mathbb{Z}^+$）の長方形$ABCD$において、辺ADと辺BCの間にそれらと平行な長さaの線分を１間隔に引く。同様に、辺ABと辺DCの間に長さbの線分を１間隔に引く。更に、対角線ACを引き、これらの線分と交わる点の個数をnとする。ただし、２点A、Cは個数に含めないものとし、対角線ACが縦と横の線分と同時に交わる点（格子点）は１個として数える。$a=9$、$n=44$のとき、考えられるbの値をすべて求めなさい。

この問題を一般化し、次のような問題を考える。

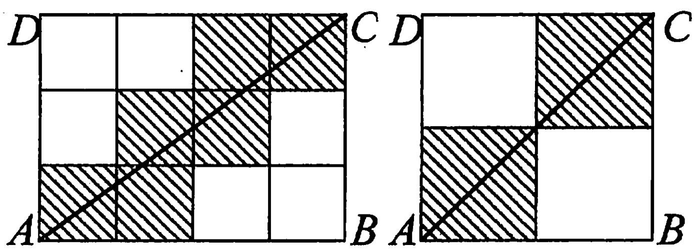
> 辺の長さが１の正方形のタイルがab枚ある。（a、$b\in\mathbb{Z}^+$）これらを敷き詰めて２辺の長さがaとbであるような長方形$ABCD$を作る。長方形の対角線ACが内部を通過するようなタイル（こわれるタイル）の個数$f(a,b)$を求めなさい。

2　考　察

この種の問題を考えるには、試行錯誤が必要である。例えば、Fig.1(a)、(b)より、

$$f(3,4)=6、f(2,2)=2$$

である。



(a)　(b)

Fig.1：「こわれるタイル」の個数の例

また、aとbの若干の場合に、実際に図を描いて、「こわれるタイル」の個数$f(a,b)$を調べたものを Table1 に示す。

Table1：$f(a,b)$ の値

$b \setminus a$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	2	4	4	6	6	8	8
3	3	4	3	6	7	6	9	10
4	4	4	6	4	8	8	10	8
5	5	6	7	8	5	10	11	12
6	6	6	6	8	10	6	12	12
7	7	8	9	10	11	12	7	14
8	8	8	10	8	12	12	14	8

$f(a,b)=f(b,a)$ は明らかであるから、$b \geqq a$ としても一般性は失われない。この表から明らかな性質は、

$$f(1,b)=b$$

$$f(a,a)=a$$

$$f(2,b)=\begin{cases} b(b:even) \\ b+1(b:odd) \end{cases}$$

程度であり、容易に汎用性のある規則性が見えて来る訳でもない。確実に言えることは次のことである。

命題

$f(a,b)$ は対角線 AC がタイル群によって生じた $a+1$ 本の水平線と $b+1$ 本の鉛直線によって分割される区間の数に等しい。

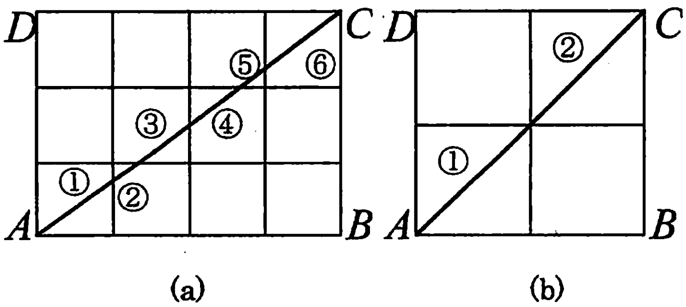


Fig.2：対角線 AC の分割と「こわれるタイル」の個数との対応

この命題が成立する理由は、「こわれるタイル」の内部を通る対角線 AC の一部分が、ちょうど水平線群、鉛直線群によって分割される AC の各区間と１対１に対応しているからである。ここで、A を原点とし、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ を x 軸、y 軸にとって、対角線 AC の方程式を作ると、

$$y=\frac{a}{b}x\left(0\leqq x\leqq b\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

となる。これと鉛直線群 $x=0$、$x=1$、・・・、$x=b$ との交点はそれぞれ、

$$(0,0)、\left(1,\frac{a}{b}\right)、\left(2,\frac{2a}{b}\right)、\cdots、(b,a) \qquad \cdots\cdots ②$$

となり、合計 $b+1$ 個ある。同様に、①と水平線群 $y=0$、$y=1$、・・・、$y=a$ との交点はそれぞれ、

$$(0,0)、\left(\frac{b}{a},1\right)、\left(\frac{2b}{a},2\right)、\cdots、(b,a) \qquad \cdots\cdots ③$$

となり、合計 $a+1$ 個ある。したがって、②と③とを合わせた点集合 X がいくつの点からなるかを調べるとよい。X が N 個の点からなることがわかった場合、対角線はこれらの N 個の点により、Fig.3 のように $N-1$ 個の区間群に分割される。

Fig.3：対角線 AC の分割

したがって、$f(a,b)=N-1$ となる。また、②と③に共通な点（格子点）の個数を M とすれば、

$$N=(b+1)+(a+1)-M \qquad \cdots\cdots ④$$

が成立する。②の中の点の一般形は、

$$\left(i,\frac{ia}{b}\right)\ (i\in\mathbb{Z},0\leqq i\leqq b)$$

また、③の中の点の一般形は、

$$\left(\frac{jb}{a},j\right)\ (j\in\mathbb{Z},0\leqq j\leqq a)$$

である。したがって、M を求めるには、

「$i=\dfrac{jb}{a},\dfrac{ia}{b}=j,0\leqq i\leqq b,0\leqq j\leqq a$」

$\Leftrightarrow$ 「$ai=jb,0\leqq i\leqq b,0\leqq j\leqq a$」　　・・・・・⑤

⑤をみたす整数解(i,j)の個数を求めればよい。aとbの最大公約数をdとし、$a=\alpha d$、$b=\beta d$とおくと、⑤は、

「$\alpha i=j\beta,0\leqq i\leqq b,0\leqq j\leqq a$」　　・・・・・⑥

と書ける。αとβは互いに素であるから、⑥の$\alpha i=j\beta$より、$i=\beta x$、$j=\alpha y$とおくと、⑥は次のようになる。

「$\alpha\beta x=\alpha\beta y,0\leqq \beta x\leqq \beta d,0\leqq \alpha y\leqq \alpha d$」

$\Leftrightarrow$ 「$x=y,0\leqq x\leqq d,0\leqq y\leqq d$」　　・・・・・⑦

⑦の整数解は、

$(0,0)$、$(1,1)$、$(2,2)$、・・・、(d,d)

の$d+1$個である。よって、

$$M=d+1$$

④に代入して、

$$N=(b+1)+(a+1)-(d+1)=a+b+1-d$$

したがって、

$$f(a,b)=N-1=a+b-d$$

と結論づけられる。

3　まとめ

この問題において、最も重要な解決の鍵は、「こわれるタイルの個数は、対角線が水平線群と鉛直線群とによって分割される区間数に等しい」ということに着眼することである。上記の考察のように、「うまい対応」を見つけて１つの問題を別の問題に置き換えることは数学的発想の基本事項である。

さて、冒頭で示した高校入試の問題において、$n=N-2$であるから、$a=9$、$n=44$は、$f(9,b)=45$を意味する。したがって、

$$f(9,b)=9+b-d=45$$

をみたすbの値を求めればよいことがわかる。

すなわち、

$$d = b - 36$$

をみたす b の値であるから、９の正の約数が $\{1,3,9\}$ であることより、

$$b-36=1,3,9 \Leftrightarrow b=37,39,45$$

これらが求めるべき b の値である。Fig.4 にこの３通りの状況を示しておく。斜線部分は「こわれるタイル」である。対角線 AC が通過する格子点の個数に注目して欲しい。

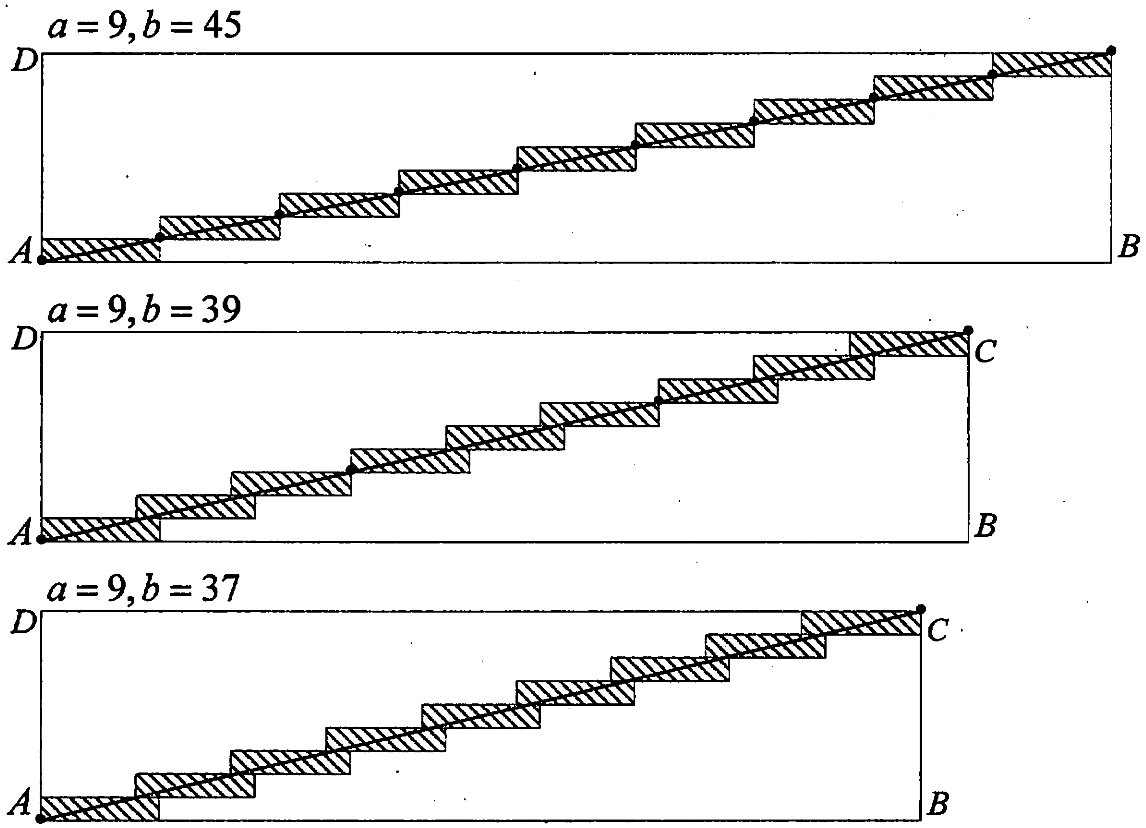


Fig.4：冒頭の問題の状況を図示したもの

本稿で扱ったものは高校入試問題であるが、その内容は憧憬度の高い大学の入学試験としても十分な内容であると思われる。

参 考 文 献

1）平成２７年　栃木県公立高校入学試験問題．数学　大問６の３

＜補遺＞平成27年　栃木県公立高校入学試験問題．数学　大問6

6　AB ＝ a cm，AD ＝ b cm（a，b は正の整数）の長方形ABCDがある。図1のように，辺ABと辺DCの間にそれらと平行な長さ a cmの線分を1 cm間隔にひく。同様に，辺ADと辺BCの間に長さ b cmの線分を1 cm間隔にひく。

さらに，対角線ACをひき，これらの線分と交わる点の個数を n とする。ただし，2点A，Cは個数に含めないものとし，対角線ACが縦と横の線分と同時に交わる点は，1個として数える。

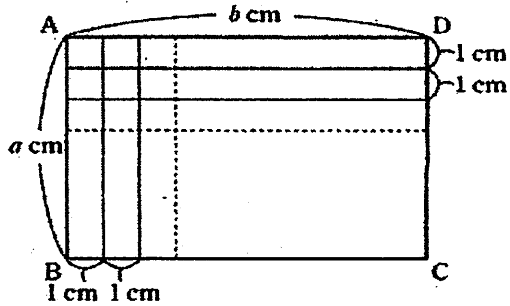


図 1

また，長方形ABCDの中にできた1辺の長さが1 cmの正方形のうち，ACが通る正方形の個数を考える。ただし，1辺の長さが1 cmの正方形の頂点のみをACが通る場合は，その正方形は個数に含めない。

例えば，図2のように $a = 2$，$b = 4$ のときは，$n = 3$ となり，ACが通る正方形は4個である。図3のように $a = 2$，$b = 5$ のときは，$n = 5$ となり，ACが通る正方形は6個である。

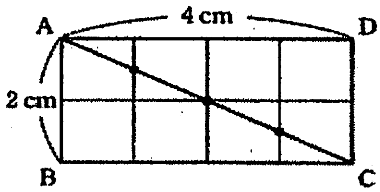


図 2

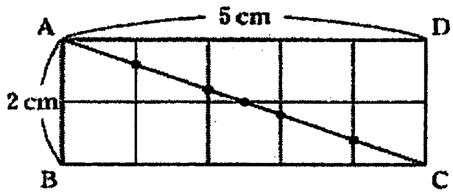


図 3

このとき，次の1，2，3の問いに答えなさい。

1　$a = 3$，$b = 4$ のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　n の値を求めなさい。

(2)　ACが通る正方形の個数を求めなさい。

2　b の値が a の値の3倍であるとき，長方形ABCDの中にできた1辺の長さが1 cmのすべての正方形の個数から，ACが通る正方形の個数をひくと168個であった。このとき，a の方程式をつくり，a の値を求めなさい。ただし，途中の計算も書くこと。

3　$a = 9$ のとき，$n = 44$ であった。このとき，考えられる b の値をすべて求めなさい。