

三角関数列のグラフに現れる空白域に関する考察

北海道千歳北陽高等学校 教諭 高 倉 亘

(Keywords: 三角関数、 極限現象、 同相写像)

1 緒 言

座標平面上に三角関数列 $\{\cos nx\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) あるいは $\{\sin nx\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) のグラフを重ね書きしたときに極限現象として現れる空白域、すなわち、点密度が密な領域の中に現れる疎な領域は鮮やかな「白い曲線」として現れる。本稿では、この「白い曲線」がどのような代数曲線上に存在するのか、また、その形成される機構について考察する。なお、グラフの描画には Grapes を用いた。

2 三角関数列 $\{\cos nx\}$ において現れる空白域

Fig.1(a)、(b)は、矩形 $A_c = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1\}$ の中に描いた $y = C_n(x) = \cos nx$ のグラフである。

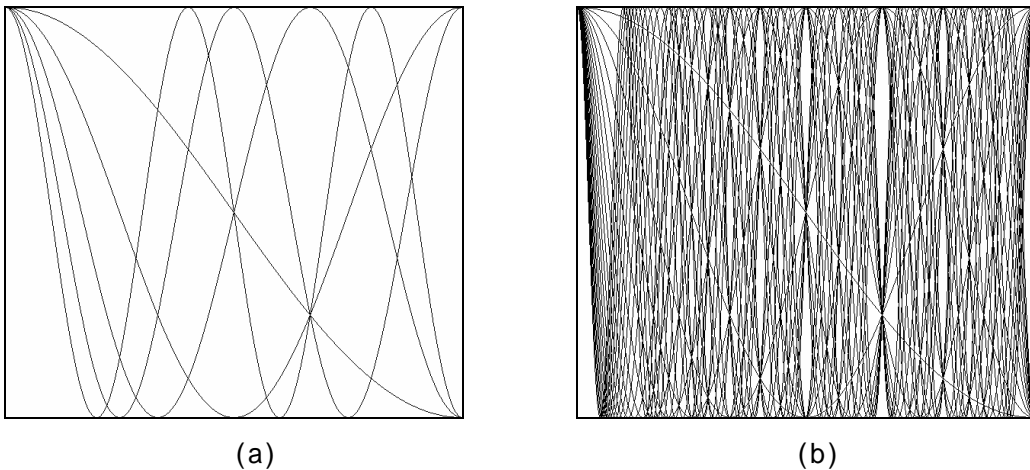


Fig.1 $y = \cos nx (0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1)$

(a) $n = 1, 2, \dots, 5$ (b) $n = 1, 2, \dots, 20$

Fig.1(b)において、いくつかの「白い曲線」が A_c の中で縞模様に見える。本章では、関数 C_m 、 C_n の組の交点の軌跡に「白い曲線」を関係づけることによって、この現象を考察する。

$1 \leq m < n$ として、 $C_m(x) - C_n(x)$ の零点は、

$$\cos nx - \cos mx = 0$$

を解くことによって求めることができる。この方程式は、

$$\sin \frac{n+m}{2} x \sin \frac{n-m}{2} x = 0$$

のように変形できる。 $0 \leq x \leq \pi$ ならば、次の場合のみ成立する。

$$x = \begin{cases} a_j = \frac{2j\pi}{n+m}, j = 0, 1, \dots, \left[\frac{n+m}{2} \right] \dots \\ b_k = \frac{2k\pi}{n-m}, k = 1, \dots, \left[\frac{n-m-1}{2} \right] \dots \end{cases}$$

ここで、 a_j タイプの交点の数 $n(a_j)$ と b_k タイプの交点の数 $n(b_k)$ について、Table 1 に示す関係が成立する。

Table 1 A_c におけるグラフの交点の個数

	$n(a_j)$	$n(b_k)$	$n(a_j) + n(b_k)$
n, m が even	$\frac{n+m}{2} + 1$	$\frac{n-m}{2} - 1$	n
n, m が odd	$\frac{n+m}{2} + 1$	$\frac{n-m}{2} - 1$	n
n が even、 m が odd	$\frac{n+m-1}{2} + 1$	$\frac{n-m-1}{2}$	n
n が odd、 m が even	$\frac{n+m-1}{2} + 1$	$\frac{n-m-1}{2}$	n

いずれの場合も交点の個数は n 個となる。したがって、重複も数えて n 個すべての零点は矩形 A_c 上に存在する。

補題 1

$$mC'_n(a_j) + nC'_m(a_j) = 0$$

$$mC'_n(b_k) - nC'_m(b_k) = 0$$

proof

$$mC'_n(a_j) + nC'_m(a_j) = m \left(-n \sin \frac{2j\pi n}{n+m} \right) + n \left(-m \sin \frac{2j\pi m}{n+m} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -mn \left(\sin \frac{2j\pi n}{n+m} + \sin \frac{2j\pi m}{n+m} \right) \\
&= -2mn \sin j\pi \cos \frac{j\pi(n-m)}{n+m} \\
&= 0 \\
mC'_n(b_k) - nC'_m(b_k) &= m \left(-n \sin \frac{2k\pi n}{n-m} \right) - n \left(-m \sin \frac{2k\pi m}{n+m} \right) \\
&= -2mn \left(\sin \frac{2k\pi n}{n-m} - \sin \frac{2k\pi m}{n-m} \right) \\
&= -mn \cos \frac{k\pi(n+m)}{n-m} \sin k\pi \\
&= 0
\end{aligned}$$

q.e.d.

補題 2

$(x, C_n(x))$ が A_c の内部にある C_n と C_m との交点ならば、 $C'_n(x)C'_m(x) \neq 0$ である。

proof

$C'_n(x)C'_m(x) = 0$ と仮定すれば、補題 1 より、 C_n と C_m との交点において、

$$C'_n(x) = C'_m(x) = 0$$

が成立する。したがって、

$$C_n(x) = C_m(x) = \pm 1$$

となり、 $(x, C_n(x))$ が A_c の内部に存在しないことになり矛盾する。

したがって、主張は示された。

q.e.d.

補題 1 より、 A_c の内部の交点で次式が成立する。

$$\frac{C'_n}{C'_m} = \begin{cases} -\frac{n}{m}, (x = a_j) \\ \dots \\ \frac{n}{m}, (x = b_k) \end{cases}$$

すなわち、 A_c の内部の点にある a_j タイプの C_n と C_m との各交点での接線の傾きが異符号であり、かつ、比の絶対値は $n:m$ であることを示している。また、

は「白い曲線」の存在を説明するうえで重要な式である。 $1 \leq m < n$ かつ $m, n \leq 20$ において、 \dots より、 A_c 上にある交点の総数は、

$$\sum_{i=1}^{19} i(i+1) = \frac{1}{3} \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 = 2660 \text{ 個}$$

である。そのうち、 a_j タイプの交点は b_k タイプの交点より多く、 a_j タイプ 2135 個に対して、 b_k タイプは 525 個（補遺 1、2 参照）である。「白い曲線」の説明はこの観察に基づいている。これらの交点での接線の傾きの開き具合から生じる空白域の連鎖の結果が「白い曲線」として見えるものである。

次に、「白い曲線」と交点との関係を考察する。

定理 1 ¹⁾

$$0 < m \leq n, \quad C_n(x) = C_m(x) = y \text{ ならば、} (1 - C_{n-m}(x))(2y^2 - 1 - C_{n-m}(x)) = 0$$

proof

$$p \geq q, \quad 2C_p C_q = C_{p+q} + C_{p-q} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} (C_n - C_m)^2 &= C_n^2 - 2C_n C_m + C_m^2 \\ &= \frac{1 + C_{2n}}{2} - (C_{n+m} + C_{n-m}) + \frac{1 + C_{2m}}{2} \\ &= 1 + \frac{C_{2n} + C_{2m}}{2} - (C_{n+m} + C_{n-m}) \\ &= 1 + C_{n+m} C_{n-m} - (C_{n+m} + C_{n-m}) \\ &= 1 - C_{n+m} - C_{n-m} (1 - C_{n+m}) \\ &= (1 - C_{n+m})(1 - C_{n-m}) \cdots \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} 2(1 - C_n C_m) &= 2 - 2C_n C_m \\ &= 2 - (C_{n+m} + C_{n-m}) \\ &= (1 - C_{n+m}) + (1 - C_{n-m}) \cdots \end{aligned}$$

の両辺に $(1 - C_{n-m})$ を乗じたものに を代入すると、

$$\begin{aligned} \text{の左辺} \times (1 - C_{n-m}) &= 2(1 - C_n C_m)(1 - C_{n-m}) \\ &= 2 - 2C_n C_m - 2C_{n-m} + 2C_{n-m} C_n C_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{の右辺} \times (1 - C_{n-m}) &= \{(1 - C_{n+m}) + (1 - C_{n-m})\}(1 - C_{n-m}) \\ &= (1 - C_{n+m})(1 - C_{n-m}) + (1 - C_{n-m})^2 \\ &= (C_n - C_m)^2 + (1 - C_{n-m})^2 \\ &= C_n^2 - 2C_n C_m + C_m^2 + 1 - 2C_{n-m} + C_{n-m}^2 \end{aligned}$$

左辺 = 右辺を整理すると、

$$C_n^2 - 2C_{n-m}C_nC_m + C_m^2 = 1 - C_{n-m}^2$$

が成立する。これより、

$$\cos^2 nx - 2\cos(n-m)x \cos nx \cos mx + \cos^2 mx = 1 - \cos^2(n-m)x \cdots$$

となる。次に、 $\cos nx = \cos mx = y$ とおけば、

$$y^2 - 2y^2 \cos(n-m)x + y^2 = 1 - \cos^2(n-m)x$$

$$2y^2 - 2y^2 \cos(n-m)x - 1 + \cos^2(n-m)x = 0$$

$$2y^2(1 - \cos(n-m)x) - (1 + \cos(n-m)x)(1 - \cos(n-m)x) = 0$$

$$(2y^2 - 1 - \cos(n-m)x)(1 - \cos(n-m)x) = 0$$

これは、 C_n と C_m のグラフの交点が、 $\cos(n-m)x = 1$ の代数曲線上に存在することを示している。

一方、 $x = b_k$ に対して、

$$C_{n-m}(b_k) = \cos(n-m) \frac{2k\pi}{n-m} = \cos 2k\pi = 1$$

であるから、 a_j タイプの交点はすべて曲線

$$2y^2 - 1 = \cos(n-m)x$$

すなわち、

$$y = \pm \cos \frac{qx}{2}, (n-m=q)$$

の上にある。

q.e.d.

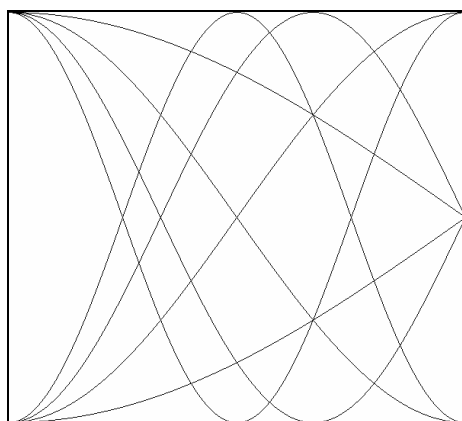


Fig.2 $y = \pm \cos \frac{qx}{2}$ ($0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1, q = 1, 2, 3, 4$)

Fig.2 において、 $q = 1, 2, 3, 4$ に対応する曲線は Fig.1(b) の最も鮮明な「白い曲線」に一致する。また、 a_j タイプの交点の多くは、 q の低い値 ($q = 1, 2, 3, 4$) の曲線上

($q=1$ のとき 209 個、 $q=2$ のとき 207 個、 $q=3$ のとき 187 個、 $q=4$ のとき 184 個 (補遺 3 参照)) に存在する。したがって、 $1 \leq m < n \leq 20$ で $q > 4$ に対応する曲線を見つけることは期待できない。

次に矩形 A_c に適切な同相写像を適用することによって、「白い曲線」に関する他の観点からの考察を行う。

Fig.3(a)、(b)は、写像 $S_c : (x, y) \rightarrow (x, \cos^{-1} y) = (x, y')$ によって、Fig.1(a)、(b)を矩形 A_c から矩形 $B_c = \{(x, y') | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y' \leq \pi\}$ の上への同相写像によって変換したものである。

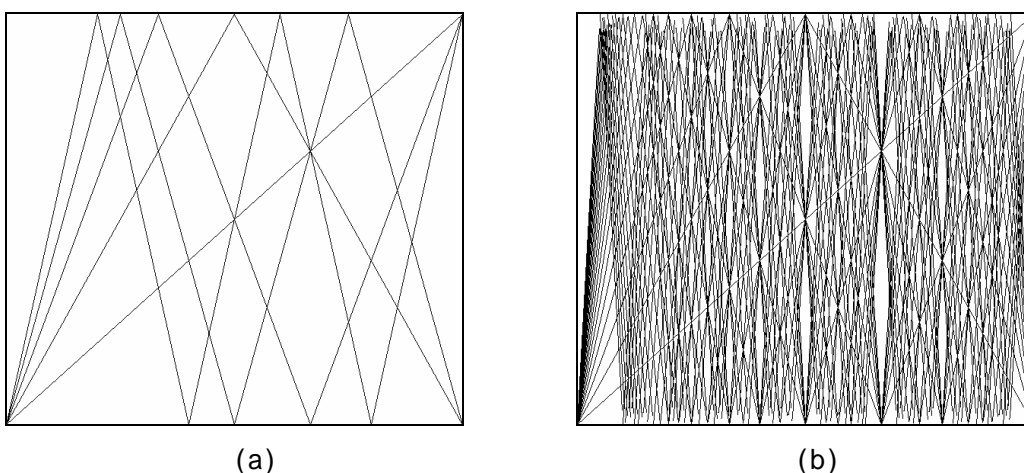


Fig.3 $y' = \cos^{-1}(\cos nx) (0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y' \leq \pi)$
 (a) $n = 1, 2, \dots, 5$ (b) $n = 1, 2, \dots, 20$

$$S_c : (x, C_n(x)) \rightarrow (x, U_n(x))$$

$y' = U_n(x)$ は $y = C_n(x)$ の像である。

$$\frac{k\pi}{n} \leq x \leq \frac{(k+1)\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

ならば、

$$\begin{aligned} y' = U_n(x) &= \cos^{-1}(C_n(x)) \\ &= \cos^{-1}(\cos nx) \\ &= \begin{cases} nx - k\pi, (k : \text{even}) \\ -nx + (k+1)\pi, (k : \text{odd}) \end{cases} \end{aligned}$$

すなわち、 $y' = U_n(x)$ は矩形 B_c にあり、傾き n で原点を起点とした折れ線である。その傾きは、絶対値 n を維持したまま、矩形 B_c の最上部と最下部で横座標の各

$\frac{j\pi}{n}, (j = 1, \dots, n-1)$ で符号が変化する。

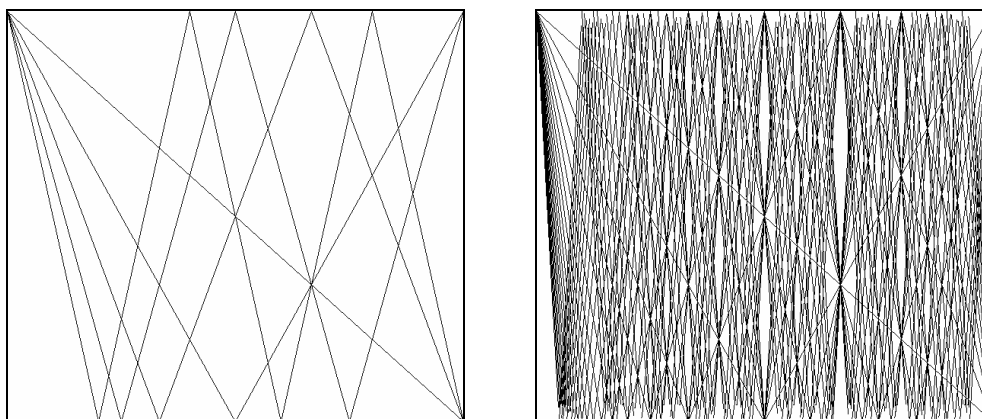
曲線 $y' = U_n(x)$ は $(0,0)$ を定点とし、 $y = C_n(x)$ は $(0,1)$ を定点としている。
 $y' = U_n(x)$ の定点は、その原像 $y = C_n(x)$ の定点とは異なる。 A_c に折れ線を置くこ
 とと、それらの定点を作ることによって直された欠点は、 $C_n(x)$ の定点と一致する。
 これは、矩形 B_c から矩形 A_c への線形写像によって行われる。

$L_c : (x, y') \rightarrow (x, y)$ は、 $y' = U_n(x)$ とするとき、

$$y = 1 - \frac{2}{\pi} y'$$

によって定義する。

Fig.4(a)、(b)は、写像 L_c によって、Fig.3(a)、(b)を変換したものである。



(a)

(b)

Fig.4 $y = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1}(\cos nx) (0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1)$

(a) $n = 1, 2, \dots, 5$ (b) $n = 1, 2, \dots, 20$

$$y = u_n(x) = 1 - \frac{2}{\pi} U_n(x)$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{2}{\pi} (nx - k\pi), (k : \text{even}) \\ 1 - \frac{2}{\pi} (-nx + (k+1)\pi), (k : \text{odd}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{2nx}{\pi} + 2k + 1, (k : \text{even}) \\ \frac{2nx}{\pi} - (2k + 1), (k : \text{odd}) \end{cases}$$

写像 $L_c S_c : (x, C_n(x)) \rightarrow (x, u_n(x))$ は A_c から A_c への同相写像である。「白い曲線」
 は区分的線形であるように見える。

補題3

$0 \leq m \leq n$ 、 $u_n(x) = u_m(x)$ ならば、交点は次のいずれかのタイプである。

$$c_j = \frac{2j\pi}{n+m}, j = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor$$

$$d_k = \frac{2k\pi}{n-m}, k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-m-1}{2} \right\rfloor$$

proof

$$u_n(x) = \begin{cases} -\frac{2nx}{\pi} + 2k + 1, (k : \text{even}) \\ \frac{2nx}{\pi} - (2k + 1), (k : \text{odd}) \end{cases}$$

$$u_m(x) = \begin{cases} -\frac{2mx}{\pi} + 2k' + 1, (k' : \text{even}) \\ \frac{2mx}{\pi} - (2k' + 1), (k' : \text{odd}) \end{cases}$$

より、

) k, k' が *even* の場合

$$-\frac{2nx}{\pi} + 2k + 1 = -\frac{2mx}{\pi} + 2k' + 1$$

$$x = \frac{\pi(k - k')}{n - m}$$

$$= \frac{2i\pi}{n - m}, (2i = k - k')$$

) k, k' が *odd* の場合

$$\frac{2nx}{\pi} - (2k + 1) = \frac{2mx}{\pi} - (2k' + 1)$$

$$x = \frac{\pi(k - k')}{n - m}$$

$$= \frac{2i\pi}{n - m}, (2i = k - k')$$

) k が *even*、 k' が *odd* の場合

$$-\frac{2nx}{\pi} + 2k + 1 = \frac{2mx}{\pi} - (2k' + 1)$$

$$x = \frac{\pi(k + k' + 1)}{n + m}$$

$$= \frac{2j\pi}{n+m}, (2j = k + k' + 1)$$

) k が *odd*、 k' が *even* の場合

$$\frac{2nx}{\pi} - (2k + 1) = -\frac{2mx}{\pi} + 2k' + 1$$

$$x = \frac{\pi(k + k' + 1)}{n + m}$$

$$= \frac{2j\pi}{n+m}, (2j = k + k' + 1)$$

q.e.d.

ここで、 c_j タイプの交点の数 $n(c_j)$ と d_k タイプの交点の数 $n(d_k)$ について、Table 2 に示す関係が成立する。

Table 2 B_c におけるグラフの交点の個数

	$n(c_j)$	$n(d_k)$	$n(c_j) + n(d_k)$
n, m が <i>even</i>	$\frac{n+m}{2} + 1$	$\frac{n-m}{2} - 1$	n
n, m が <i>odd</i>	$\frac{n+m}{2} + 1$	$\frac{n-m}{2} - 1$	n
n が <i>even</i> 、 m が <i>odd</i>	$\frac{n+m-1}{2} + 1$	$\frac{n-m-1}{2}$	n
n が <i>odd</i> 、 m が <i>even</i>	$\frac{n+m-1}{2} + 1$	$\frac{n-m-1}{2}$	n

系 1

$(c_j, u_n(c_j))$ が A_c の内点であるような各 c_j で、 $\pm n$ をとる u_n の傾きと、 $\pm m$ をとる u_m の傾きとは異符号である。

proof

u_n の傾きと u_m の傾きとが、 c_j で異符号かつ、

$$k < \frac{2jn}{n+m} < k+1$$

$$k' < \frac{2jm}{n+m} < k'+1$$

と仮定すれば、 k 、 k' は同じ偶奇性をもつ。したがって、

$$k+k' < 2j < k+k'+2$$

このとき、 $k+k'$ は偶数となり矛盾する。

したがって、主張は示された。

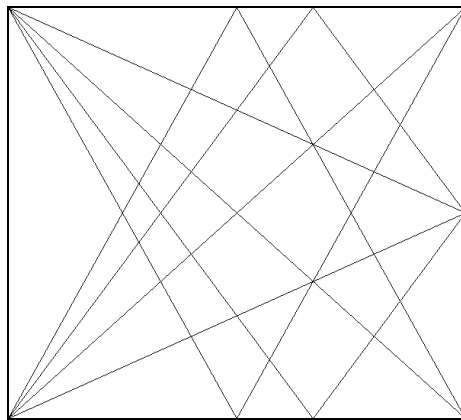
q.e.d.

これらのことから、 u_n の傾きと u_m の傾きの違い、すなわち、交点における接線の傾きの開き具合によって生じる空白域の連鎖の結果が「白い曲線」を生じさせる原因である。

次の関数は、 A_c の内部に $y = u_n(x) = u_m(x)$ の内点 $(c_j, u_n(c_j))$ を含む。

$$\begin{aligned} y &= 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\cos \frac{(n-m)x}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{(n-m)x}{2} - k\pi \right), (k: \text{even}) \\ 1 - \frac{2}{\pi} \left(-\frac{(n-m)x}{2} + (k+1)\pi \right), (k: \text{odd}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{(n-m)x}{\pi} + 2k+1, (k: \text{even}) \\ \frac{(n-m)x}{\pi} - (2k+1), (k: \text{odd}) \end{cases} \end{aligned}$$

Fig.5 は、Fig.4(b)の最も鮮明な「白い直線」に一致する。



$$Fig.5 \quad y = \pm \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\cos \frac{qx}{2} \right) \right\} \quad (0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1, q = 1, 2, 3, 4)$$

3 三角関数列 $\{\sin nx\}$ において現れる空白域

Fig.6(a)、(b)は、矩形 $A_s = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1\}$ の中に描いた $y = S_n(x) = \sin nx$ のグラフである。

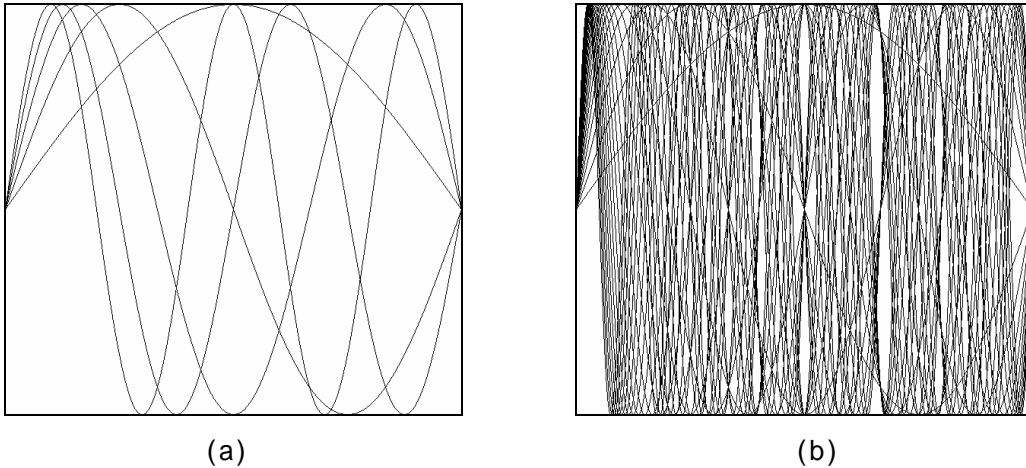


Fig.6 $y = \sin nx (0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1)$

(a) $n = 1, 2, \dots, 5$ (b) $n = 1, 2, \dots, 20$

Fig.6(b)において、いくつかの「白い曲線」が A_s の中で縞模様に見える。本章では前章と同様に、関数 S_m 、 S_n の組の交点の軌跡に「白い曲線」を関係づけることによって、この現象を考察する。

$1 \leq m < n$ として、 $S_m(x) - S_n(x)$ の零点は、

$$\sin nx - \sin mx = 0$$

を解くことによって求めることができる。この方程式は、

$$2 \cos \frac{n+m}{2} x \sin \frac{n-m}{2} x = 0$$

のように変形できる。 $0 \leq x \leq \pi$ ならば、次の場合のみ成立する。

$$x = \begin{cases} a_j = \frac{(2j+1)\pi}{n+m}, j = 0, 1, \dots, \left[\frac{n+m-1}{2} \right] \\ b_k = \frac{2k\pi}{n-m}, k = 1, \dots, \left[\frac{n-m}{2} \right] \end{cases}$$

ここで、 a_j タイプおよび b_k タイプの交点の個数については、Table 1 に示す関係が成立する。

補題 4

$$mS'_n(a_j) + nS'_m(a_j) = 0$$

$$mS'_n(b_k) - nS'_m(b_k) = 0$$

proof

$$\begin{aligned} mS'_n(a_j) + nS'_m(a_j) &= m \left(n \cos \frac{(2j+1)\pi n}{n+m} \right) + n \left(m \cos \frac{(2j+1)\pi m}{n+m} \right) \\ &= mn \left(\cos \frac{(2j+1)\pi n}{n+m} + \cos \frac{(2j+1)\pi m}{n+m} \right) \\ &= 2mn \cos \frac{(2j+1)\pi}{2} \cos \frac{(2j+1)\pi(n-m)}{2(n+m)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mS'_n(b_k) - nS'_m(b_k) &= m \left(n \cos \frac{2k\pi n}{n-m} \right) - n \left(m \cos \frac{2k\pi m}{n-m} \right) \\ &= mn \left(\cos \frac{2k\pi n}{n-m} - \cos \frac{2k\pi m}{n-m} \right) \\ &= -2mn \sin \frac{2k\pi(n+m)}{n-m} \sin k\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

q.e.d.

補題 2 と同様に、 $(x, S_n(x))$ が A_s の内部にある S_n と S_m との交点であるならば、 $S'_n(x)S'_m(x) \neq 0$ である。また、 A_s の内部の交点で次式が成立する。

$$\frac{S'_n}{S'_m} = \begin{cases} -\frac{n}{m}, (x = a_j) \\ \frac{n}{m}, (x = b_k) \end{cases}$$

すなわち、 A_s の内部の点にある a_j タイプの S_n と S_m との各交点での接線の傾きが異符号であり、かつ、比の絶対値は $n:m$ である。

定理 2

$$0 < m \leq n, S_n(x) = S_m(x) = y \text{ ならば、 } (1 - C_{n-m}(x))(2y^2 - 1 - C_{n-m}(x)) = 0$$

proof

定理 1 と同様に、

$$\sin^2 nx - 2\cos(n-m)x \sin nx \sin mx + \sin^2 mx = 1 - \cos^2(n-m)x \cdots$$

が成立する。 において、 $\sin nx = \sin mx = y$ とおけば、

$$y^2 - 2y^2 \cos(n-m)x + y^2 = 1 - \cos^2(n-m)x$$

$$2y^2 - 2y^2 \cos(n-m)x - 1 + \cos^2(n-m)x = 0$$

$$2y^2(1 - \cos(n-m)x) - (1 + \cos(n-m)x)(1 - \cos(n-m)x) = 0$$

$$(2y^2 - 1 - \cos(n-m)x)(1 - \cos(n-m)x) = 0$$

これは、 S_n と S_m のグラフの交点が、 の代数曲線上に存在することを示している。

一方、 $x = b_k$ に対して、

$$C_{n-m}(b_k) = \cos(n-m) \frac{2k\pi}{n-m} = \cos 2k\pi = 1$$

であるから、 a_j タイプの交点はすべて曲線

$$2y^2 - 1 = \cos(n-m)x$$

すなわち、

$$y = \pm \cos \frac{qx}{2}, (n-m=q)$$

の上にある。

q.e.d.

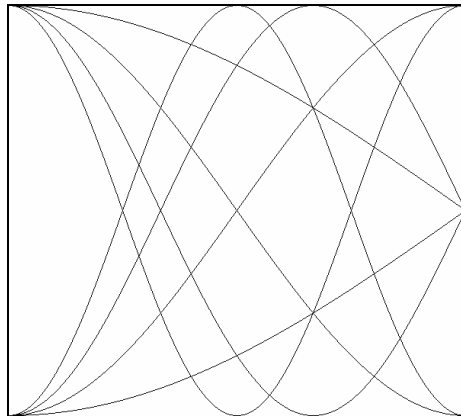


Fig.7 $y = \pm \cos \frac{qx}{2} (0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1, q = 1, 2, 3, 4)$

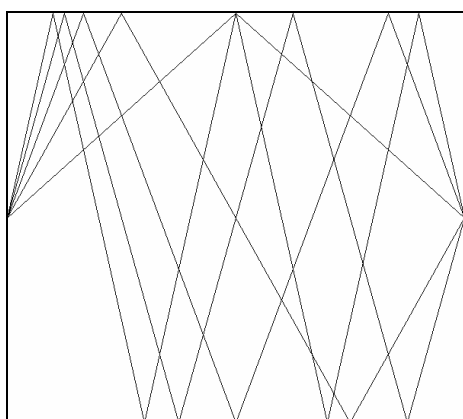
Fig.7 において、 $q = 1, 2, 3, 4$ に対応する曲線は Fig.6(b) の最も鮮明な「白い曲線」に一致する。また、 $S_n(x)$ と $S_m(x)$ との交点の多くは、 q の低い値 ($q = 1, 2, 3, 4$) の曲線上に存在する。したがって、 $1 \leq m < n \leq 20$ で $q > 4$ に対応する曲線を見つけ

ることは期待できない。

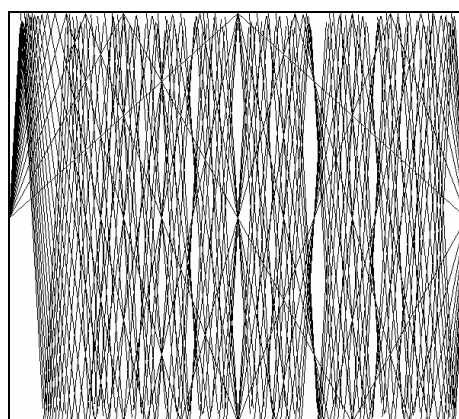
次に矩形 A_s に適切な同相写像を適用することによって、「白い曲線」に関する他の観点からの考察を行う。

Fig.8(a)、(b)は、写像 $S_s : (x, y) \rightarrow (x, \sin^{-1} y) = (x, y')$ によって、Fig.6(a)、(b)を

矩形 A_s から矩形 $B_s = \left\{ (x, y') \mid 0 \leq x \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq y' \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ の上への同相写像によって変換したものである。



(a)



(b)

$$\text{Fig.8 } y' = \sin^{-1}(\sin nx) \left(0 \leq x \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq y' \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(a) n = 1, 2, \dots, 5 \quad (b) n = 1, 2, \dots, 20$$

$$S_s : (x, S_n(x)) \rightarrow (x, V_n(x))$$

$y' = V_n(x)$ は $y = S_n(x)$ の像である。

$$\frac{(2k-1)\pi}{2n} \leq x \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n}, (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

ならば、 $y' = V_n(x)$ は矩形 B_s にあり、傾き n で原点を起点とした折れ線である。その傾きは、絶対値 n を維持したまま、矩形 B_s の最上部と最下部で横座標の各

$\frac{(2j-1)\pi}{2n}, (j = 1, \dots, n-1)$ で符号が変化する。

) n が even の場合

$$y' = V_n(x) = \sin^{-1}(S_n(x))$$

$$= \sin^{-1}(\sin nx)$$

$$= \begin{cases} nx, \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n}\right) \\ -nx + k\pi, (k : \text{odd}) \\ nx - k\pi, (k : \text{even}) \\ -nx + n\pi, \left(\frac{(2n-1)\pi}{2n} \leq x \leq \pi\right) \end{cases}$$

) n が *odd* の場合

$$y' = V_n(x) = \sin^{-1}(S_n(x))$$

$$= \sin^{-1}(\sin nx) \\ = \begin{cases} nx, \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n}\right) \\ -nx + k\pi, (k : \text{odd}) \\ nx - k\pi, (k : \text{even}) \\ nx - n\pi, \left(\frac{(2n-1)\pi}{2n} \leq x \leq \pi\right) \end{cases}$$

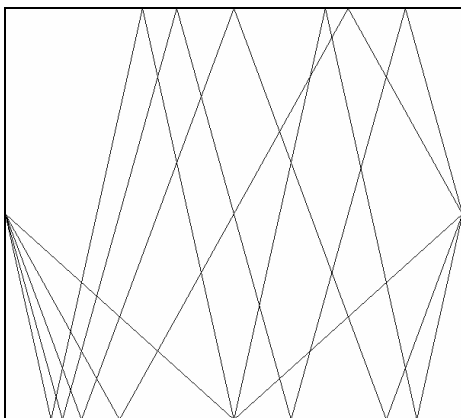
次に、矩形 B_s から矩形 A_s への線形写像を行う。

$L_s : (x, y') \rightarrow (x, y)$ は、 $y' = V_n(x)$ とするとき、

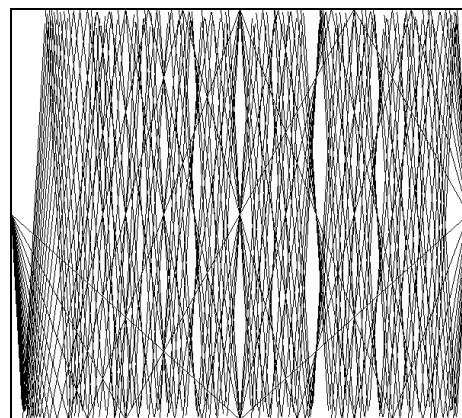
$$y = -\frac{2}{\pi} y'$$

によって定義する。

Fig.9(a)、(b)は、写像 L_s によって、Fig.8(a)、(b)を変換したものである。



(a)



(b)

$$\text{Fig.9 } y = -\frac{2}{\pi} \sin^{-1}(\sin nx) (0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1)$$

(a) $n = 1, 2, \dots, 5$ (b) $n = 1, 2, \dots, 20$

$$\begin{aligned}
y = v_n(x) &= -\frac{2}{\pi}V_n(x) \\
&= \begin{cases} \frac{2}{\pi}(-nx + k\pi), (k : \text{even}) \\ \frac{2}{\pi}(nx - k\pi), (k : \text{odd}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{2nx}{\pi} + 2k, (k : \text{even}) \\ \frac{2nx}{\pi} - 2k, (k : \text{odd}) \end{cases}
\end{aligned}$$

写像 $L_s S_s : (x, S_n(x)) \rightarrow (x, v_n(x))$ は A_s から A_s への同相写像である。「白い曲線」は区分的線形であるように見える。

補題5

$0 \leq m \leq n$ 、 $v_n(x) = v_m(x)$ ならば、交点は次のいずれかのタイプである。

$$c_j = \frac{(2j+1)\pi}{n+m}, j = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n+m-1}{2} \right\rfloor$$

$$d_k = \frac{2k\pi}{n-m}, k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-m-1}{2} \right\rfloor$$

proof

$$\begin{aligned}
v_n(x) &= \begin{cases} -\frac{2nx}{\pi} + 2k, (k : \text{even}) \\ \frac{2nx}{\pi} - 2k, (k : \text{odd}) \end{cases} \\
v_m(x) &= \begin{cases} -\frac{2mx}{\pi} + 2k', (k' : \text{even}) \\ \frac{2mx}{\pi} - 2k', (k' : \text{odd}) \end{cases}
\end{aligned}$$

より、

) k, k' が even の場合

$$-\frac{2nx}{\pi} + 2k = -\frac{2mx}{\pi} + 2k'$$

$$x = \frac{\pi(k - k')}{n - m}$$

$$= \frac{2i\pi}{n-m}, (2i = k - k')$$

) k, k' が *odd* の場合

$$\begin{aligned} \frac{2nx}{\pi} - 2k &= \frac{2mx}{\pi} - 2k' \\ x &= \frac{\pi(k - k')}{n - m} \\ &= \frac{2i\pi}{n - m}, (2i = k - k') \end{aligned}$$

) k が *even*、 k' が *odd* の場合

$$\begin{aligned} -\frac{2nx}{\pi} + 2k &= \frac{2mx}{\pi} - 2k' \\ x &= \frac{\pi(k + k')}{n + m} \\ &= \frac{(2j + 1)\pi}{n + m}, (2j + 1 = k + k') \end{aligned}$$

) k が *odd*、 k' が *even* の場合

$$\begin{aligned} \frac{2nx}{\pi} - 2k &= -\frac{2mx}{\pi} + 2k' \\ x &= \frac{\pi(k + k')}{n + m} \\ &= \frac{(2j + 1)\pi}{n + m}, (2j + 1 = k + k') \end{aligned}$$

q.e.d.

ここで、 c_j タイプおよび d_k タイプの交点の個数については、Table 2 に示す関係が成立する。

また、系 1 より、 $(c_j, v_n(c_j))$ が A_s の内点であるような各 c_j で、 $\pm n$ をとる v_n の傾きと、 $\pm m$ をとる v_m の傾きとは異符号である。これらのことから、 v_n の傾きと v_m の傾きの違い、すなわち、交点における接線の傾きの開き具合によって生じる空白域の連鎖の結果が「白い曲線」を生じさせる原因である。

次の関数は、 A_s の内部に $y = v_n(x) = v_m(x)$ の内点 $(c_j, v_n(c_j))$ を含む。

$$y = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left(\cos \frac{(n-m)x}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\frac{(n-m)x}{2} - k\pi \right), (k : \text{even}) \\ \frac{2}{\pi} \left(-\frac{(n-m)x}{2} + k\pi \right), (k : \text{odd}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(n-m)x}{\pi} - 2k, (k : \text{even}) \\ -\frac{(n-m)x}{\pi} + 2k, (k : \text{odd}) \end{cases}
\end{aligned}$$

Fig.10 は、Fig.9(b)の最も鮮明な「白い直線」に一致する。

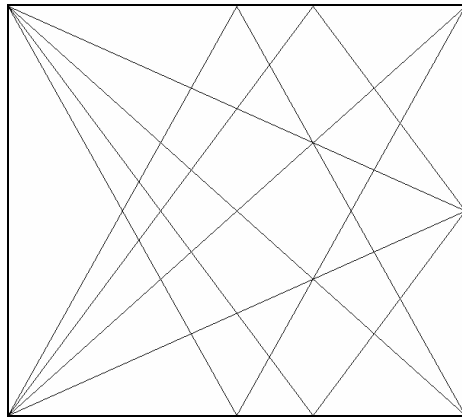


Fig.10 $y = \pm \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left(\cos \frac{qx}{2} \right) (0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1, q = 1, 2, 3, 4)$

4 結 言

本稿では、三角関数列 $\{\cos nx\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) および $\{\sin nx\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のグラフを重ね書きしたときに極限現象として現れる空白域である「白い曲線」について、その形成される機構を考察した。これらの関数列のグラフにおいては、共に空白域が曲線 $y = \pm \cos \frac{nx}{2}$ として現れることが明らかとなった。考察で用いた数学的事項のほとんどは高等学校で履修する内容である。このことは、高等学校における新たな教材開発に資するものと思われる。本稿をもとに、新たな問題提起がなされることを期待したい。

参 考 文 献

- 1) T.J.Rivlin 「Chebyshev Polynomials」 Wiley-Interscience.

<補遺1> グラフの交点の個数 (a_j タイプ、 c_j タイプ)

Table A $n(a_j)$ 、 $n(c_j)$ ($1 \leq m < n \leq 20$)

m n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11
2		3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12
3			4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12
4				5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13
5					6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
6						7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14
7							8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14
8								9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15
9									10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15
10										11	12	12	13	13	14	14	15	15	16
11											12	13	13	14	14	15	15	16	16
12												13	14	14	15	15	16	16	17
13													14	15	15	16	16	17	17
14														15	16	16	17	17	18
15															16	17	17	18	18
16																17	18	18	19
17																	18	19	19
18																		19	20
19																			20

<補遺2> グラフの交点の個数 (b_k タイプ、 d_k タイプ)

Table B $n(b_k)$ 、 $n(d_k)$ ($1 \leq m < n \leq 20$)

m n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
2		0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8
3			0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4				0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7
5					0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
6						0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
7							0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
8								0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
9									0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
10										0	0	1	1	2	2	3	3	4	4
11											0	0	1	1	2	2	3	3	4
12												0	0	1	1	2	2	3	3
13													0	0	1	1	2	2	3
14														0	0	1	1	2	2
15															0	0	1	1	2
16																0	0	1	1
17																	0	0	1
18																		0	0
19																			0

<補遺3> 「白い曲線(直線)」上の交点の個数 $n(q)$ (a_j タイプ、 c_j タイプ)

Table C $n(q)$ ($n-m=q$, $1 \leq m < n \leq 20$)

q	$n(q)$
1	209
2	207
3	187
4	184
5	165
6	161
7	143
8	138
9	121
10	115
11	99
12	92
13	77
14	69
15	55
16	46
17	33
18	23
19	11