

2次形式と2次代数的数に関する考察

北海道千歳北陽高等学校 教諭 高倉 亘

(Keywords: 2次形式、対等、modular 変換、類数、2次代数的数)

1 緒言

本稿では、整係数2次形式の間に対等と呼ばれる同値関係を導入し、対等な2次形式が同じ判別式を有することを示す。これより、同じ判別式を有する2次形式がいくつかの同値類に分割され、これらの同値類の個数として、その判別式の類数が定義される。まず、2次形式、判別式、特殊1次変換、2次形式の間に対等および正に対等などの基本概念を導入する。次に特殊1次変換により、modular 変換が定まること、modular 変換が整係数既約2次式の根である2次代数的数の上の変換を引き起こすことなどを示す。このことから、2次代数的数の間にも対等および正に対等という同値関係が定義される。最後に、2次形式に対応する2次式の根を第1根、第2根に区別し、同じ判別式を有する2つの2次形式が正に対等であることと対応する2次式の第1根が正に対等であることが同値であることを示す。^{1) - 6)}

2 群に関する準備事項

(1) 特殊1次変換のなす群

整数を成分とする2次行列のなす集合を次のように定める。

$$SL(\mathbb{Z})^{\pm} = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \mid r, s, t, u \in \mathbb{Z}, ru - st = \pm 1 \right\}$$

$$SL(\mathbb{Z})^{+} = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \mid r, s, t, u \in \mathbb{Z}, ru - st = 1 \right\}$$

$$SL(\mathbb{Z})^{-} = SL(\mathbb{Z})^{\pm} - SL(\mathbb{Z})^{+}$$

$SL(\mathbb{Z})^{\pm}$ の元を特殊1次変換、 $SL(\mathbb{Z})^{+}$ の元を正の特殊1次変換、 $SL(\mathbb{Z})^{-}$ の元を負の特殊1次変換という。

定理 1

$SL(\mathbb{Z})^{+}$ および $SL(\mathbb{Z})^{\pm}$ は行列の乗法に関して群をなす。

proof

$A, B \in SL(\mathbb{Z})^{\pm}$ に対して、 $|AB| = |A||B| = \pm 1$ であるから、 $AB \in SL(\mathbb{Z})^{\pm}$ である。

また、 $A = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ に対して、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} u & -s \\ -t & r \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ である。以上から、 $SL(\mathbb{Z})^\pm$ は $GL(2, \mathbb{Q})$ の部分群であり、それ自身群である。

q.e.d.

(2) modular 変換

$SL(\mathbb{Z})^\pm$ の元 $T = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ と $t\xi + u \neq 0$ を満たす $\xi \in \mathbb{C}$ に対して、

$$T(\xi) = \frac{r\xi + s}{t\xi + u}$$

により 1 つの複素数が定まる。この対応 $\xi \mapsto T(\xi)$ を modular 変換という。

ここで、 $SL(\mathbb{Z})^\pm$ の元

$$T = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} r' & s' \\ t' & u' \end{pmatrix}$$

に対して、 $T'(\xi)$ 、 $T(T'(\xi))$ が定まるとき、

$$T(T'(\xi)) = \frac{rT'(\xi) + s}{tT'(\xi) + u} = \frac{r \frac{r'\xi + s'}{t'\xi + u'} + s}{t \frac{r'\xi + s'}{t'\xi + u'} + u} = \frac{(rr' + st')\xi + (rs' + su')}{(tr' + ut')\xi + (ts' + uu')}$$

となるので、 $T(T'(\xi)) = TT'(\xi)$ が成立する。

定理 2

$T, T' \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ に対して、 $T'(\xi)$ 、 $T(T'(\xi))$ が定まるとき、 $T(T'(\xi)) = TT'(\xi)$ が成立する。

3 2 次形式と 2 次形式の対等

整数 a 、 b 、 c を係数とする x 、 y についての同次 2 次式

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を整係数 2 元 2 次形式という。また、

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

を f の行列といい、

$$D = b^2 - 4ac = -4 \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix}$$

を f の判別式という。以下、単に 2 次形式といえば、特に断らない限り、整係数 2 元 2 次形式を指すものとする。また、 a 、 b 、 c が互いに素であるとき、 f を原始的 2 元 2 次形式という。

2 次形式 f の判別式が平方数ならば f は 1 次式の積に分解され、 f に関する問題が 1 次式の問題に帰着される。したがって、特に断らない限り 2 次形式の判別式は非平方数であるとする。

ここで、2 つの 2 次形式、

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と

$$f'(x', y') = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 = (x' \ y') \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

に対して、

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

を満たす $T = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ が存在するとき、 $f(x, y)$ と $f'(x', y')$ は対等であると

いい、 $f(x, y) \sim f'(x', y')$ と表す。特に、 $T \in SL(\mathbb{Z})^+$ のとき、正に対等であるといい、 $T \in SL(\mathbb{Z})^-$ のときは負に対等であるという。 $f(x, y) \sim f'(x', y')$ であるとき、 $f'(x', y')$ は $f(x, y)$ に次の変数の変換を行って得られる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

このとき、

$$\begin{cases} a' = ar^2 + brt + ct^2 \\ b' = 2ars + b(ru + st) + 2ctu \\ c' = as^2 + bsu + cu^2 \end{cases}$$

が成立する。以下に簡単のため、2次形式 f 、 f' 、 f'' 、 \dots に対して、その行列をそれぞれ、

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'' & \frac{b''}{2} \\ \frac{b''}{2} & c'' \end{pmatrix}, \dots$$

と置くことにする。

定理3

2次形式における対等および正に対等の関係は同値関係である。

proof

単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ により、

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので、 $f \sim f$ である。また、 $f \sim f'$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} = {}^t T \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} T$$

を満たす $T \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ が存在する。このとき、

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} = {}^t (T^{-1}) \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} T^{-1}$$

が成立するので、 $f' \sim f$ である。また、 $f \sim f'$ かつ $f' \sim f''$ とすれば、

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} = {}^t T_1 \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} T_1, \quad \begin{pmatrix} a'' & \frac{b''}{2} \\ \frac{b''}{2} & c'' \end{pmatrix} = {}^t T_2 \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} T_2$$

を満たす $T_1, T_2 \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ が存在する、このとき、

$$\begin{pmatrix} a'' & \frac{b''}{2} \\ \frac{b''}{2} & c'' \end{pmatrix} = {}^t(T_1 T_2) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} T_1 T_2$$

が成立するので、 $f \sim f''$ である。正に対等の関係についても同様である。

q.e.d

定理 4

$f \sim f'$ のとき、整数 n については次の事項は同値である。

$f(x, y) = n$ が整数解をもつ。 \Leftrightarrow $f'(x, y) = n$ が整数解をもつ。

proof

仮定より、

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

を満たす $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ が存在する。このとき、

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -t \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -s \\ -t & r \end{pmatrix}$$

が成立する。 $f(x, y) = n$ が整数解 (α, β) をもつとすれば、

$$\begin{aligned} n &= (\alpha \quad \beta) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= (\alpha \quad \beta) \begin{pmatrix} u & -t \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -s \\ -t & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -s \\ -t & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

とおけば、 $f'(\alpha', \beta') = n$ となるので、 $f'(x, y) = n$ は解をもつ。逆に、 $f'(x, y) = n$ が解をもつと仮定しても同様である。

q.e.d.

定理 5

f が原始的で $f \sim f'$ ならば f' も原始的である。

proof

仮定より、 a 、 b 、 c は互いに素であり、

$$\begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

を満たす $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ が存在する。このとき、

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -t \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -s \\ -t & r \end{pmatrix}$$

を得る。これより、

$$\begin{cases} a = a'u^2 - b'ut + c't^2 \\ b = -2a'su + b'(ru + st) - 2c'rt \\ c = a's^2 - b'rs + c'r^2 \end{cases}$$

となる。ここで、 a' 、 b' 、 c' の公約数は、 a 、 b 、 c の公約数でもあるから、 a' 、 b' 、 c' も互いに素である。したがって、 f' も原始的である。

q.e.d.

定理 6

対等な 2 次形式 f 、 f' の判別式をそれぞれ D 、 D' とすると、 $D = D'$ が成立する。

proof

$$D' = -4 \begin{vmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -4 \begin{vmatrix} r & t \\ s & u \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r & s \\ t & u \end{vmatrix} \\
&= -4 \begin{vmatrix} r & s \\ t & u \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \\
&= -4 \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \\
&= D
\end{aligned}$$

q.e.d.

定理 6 より、対等な 2 次形式は同じ判別式をもつ。したがって、判別式 D を持つ 2 次形式全体が対等な関係で類別される。このときの各類を判別式 D をもつ 2 次形式の類と呼ぶ。また、それらの類の個数を判別式 D をもつ 2 次形式の類数といい、 $h(D)$ と表す。同様に判別式 D をもつ 2 次形式全体を正の対等関係で類別したときの各類を狭義の類、狭義の類の個数を狭義の類数といい $h^+(D)$ と表す。判別式 D をもつ 2 次形式の類はいくつかの狭義の類の和であるから、 $h^+(D) \geq h(D)$ が成立する。

4 2 次代数的数

a, b, c を整数 (ただし、 $a \neq 0$) とする。2 次式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が \mathbb{Q} 上既約であるとき、 $f(\xi) = 0$ を満たす複素数 ξ を 2 次代数的数という。特に、 ξ が実数のとき 2 次無理数という。また、 a, b, c が互いに素であるとき、 $f(x) = ax^2 + bx + c$ は原始的であるということにする。

既約 2 次式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ の判別式 D は平方数ではない。 $f(x) = 0$ の根を

$$D > 0 \text{ のとき、 } \xi = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \xi' = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$D < 0 \text{ のとき、 } \xi = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \quad \xi' = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

とおき、 ξ を第 1 根、 ξ' を第 2 根と呼ぶことにする。また、 ξ と ξ' とは互いに共役である。2 次代数的数 ξ に対して、 ξ を根とする整係数 2 次式 $ax^2 + bx + c$ の中で原始的であるものが符号を除いて一意に定まる。このとき、判別式 $D = b^2 - 4ac$

は一意に定まる。これを ξ の判別式という。 $a\xi^2 + b\xi + c = 0$ を満たす 2 次代数的数 ξ に対して、 $t\xi + u = 0$ となる整数は $t = u = 0$ のみである。したがって、 *modular*

変換 $T = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ により、

$$\eta = T(\xi) = \frac{r\xi + s}{t\xi + u} \dots$$

で 1 つの複素数 η が定まる。

補題 1

ξ が 2 次代数的数で $T \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ のとき、式 で定まる η も 2 次代数的数である。また、 ξ と η の判別式は一致する。

proof

$a\xi^2 + b\xi + c = 0$ とすれば、

$$(\xi \ 1) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = a\xi^2 + b\xi + c = 0$$

したがって、

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

と a' 、 b' 、 c' を定めれば、 $t\xi + u \neq 0$ であることから、

$$\begin{aligned} a'\eta^2 + b'\eta + c' &= (\eta \ 1) \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{t\xi + u} \right)^2 (\xi \ 1) \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{t\xi + u} \right)^2 (\xi \ 1) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{t\xi + u} \right)^2 (a\xi^2 + b\xi + c) = 0$$

より、 $a'\eta^2 + b'\eta + c' = 0$ が成立する。また、

$$-4 \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{vmatrix}$$

が成立するので、 ξ と η の判別式は一致する。したがって、 $a'x^2 + b'x + c'$ は \mathbb{Q} 上既約である。したがって、 η も 2 次代数的数である。

q.e.d.

先に述べたように、2 次代数的数 ξ と *modular* 変換 T に対して、式 で 1 つの複素数 $T(\xi)$ が定まるので、定理 2 より次の補題が成立する。

補題 2

$T, T' \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ のとき、 $T(T'(\xi)) = TT'(\xi)$

定理 7

$T \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ に対して、式 で定まる写像は 2 次代数的数全体のなす集合からそれ自身への全単射である。

proof

任意の 2 次代数的数 η に対して、 $\xi = T^{-1}(\eta)$ とおけば、補題 2 より、

$$T(\xi) = TT^{-1}(\eta) = \eta$$

となるから、 T は全射を引き起こす。また、 $T(\xi) = T(\xi')$ とすれば、

$$\xi = T^{-1}(T(\xi)) = T^{-1}(T(\xi')) = \xi'$$

となるから、 T は単射を引き起こす。

q.e.d.

補題 3

$T \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ に対して、式 で定まる写像がすべての 2 次代数的数を不変にすれば、 $T = \pm E$ である。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

proof

$T = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ とおく。 $T(i) = i$ より、 $r = u$ 、 $t = -s$ を得る。また、 $T(2i) = 2i$ よ

り、 $s = -4t$ を得るから、 $s = t = 0$ である。 $|T| = r^2 = \pm 1$ から、 $r = u = \pm 1$ を得る。よって、 $T = \pm E$ である。

q.e.d.

T によって引き起こされる変換は、 $|T| = 1$ のとき、正の modular 変換、 $|T| = -1$ のとき、負の modular 変換と呼ばれる。補題 2 より、 $T \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ に modular 変換 (式) を対応させる写像は、 $SL(\mathbb{Z})^\pm$ から 2 次代数的数のなす集合上の変換群への準同型となり、その Kernel は補題 3 から $\pm E$ である。modular 変換全体は $SL(\mathbb{Z})^\pm / \{\pm E\}$ と同一視できる。これを M^\pm と表す。同様に正の modular 変換全体は、 $SL(\mathbb{Z})^+ / \{\pm E\}$ と同一視でき、これを M^+ と表す。 ξ を η に移す modular 変換があるとき、 ξ と η は対等であるといい、 $\xi \sim \eta$ と表す。特に、正の modular 変換で移りあうとき、正に対等であるといい、負の modular 変換で移りあうとき、負に対等であるという。

定理 8

2 次代数的数の対等および正に対等の関係は同値関係である。

proof

正に対等の関係についても同様であるから、対等の関係が同値関係であることのみを示す。

任意の 2 次代数的数 ξ に対して、 $E(\xi) = \xi$ より $\xi \sim \xi$ である。 $\xi \sim \eta$ とすれば、 $\eta = T(\xi)$ となる $T \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ が存在する。このとき、 $\xi = T^{-1}(\eta)$ となるので、 $\eta \sim \xi$ である。

$\xi \sim \eta$ 、 $\eta \sim \zeta$ とすると $\eta = T(\xi)$ 、 $\zeta = T'(\eta)$ となる $T, T' \in SL(\mathbb{Z})^\pm$ が存在する。このとき、 $\zeta = T'T(\xi)$ となるので、 $\xi \sim \zeta$ である。

q.e.d.

5 2 次形式と 2 次代数的数

2 次形式 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ が与えられたとする。 f の判別式は平方数でないとしているから、 $a \neq 0$ であり、2 次式 $ax^2 + bx + c$ は \mathbb{Q} 上既約である。したがって、 f に対して、 $ax^2 + bx + c$ の第 1 根 ξ が定まる。この章では、同じ判別式を有する 2 次形式の対等関係と対応する 2 次式の第 1 根の対等関係について考察する。なお、 ξ は 2 次式 $-ax^2 - bx - c$ の第 2 根である。

この章では 2 次形式

$$f_1(x, y) = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2, \quad f_2(x, y) = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2$$

は同じ判別式を有するものとし、対応する 2 次式の第 1 根をそれぞれ ξ_1 、 ξ_2 とする。

補題 4

$f_1(x, y)$ と $f_2(x, y)$ が正に対等ならば ξ_1 と ξ_2 も正に対等である。

proof

仮定より、

$$\begin{pmatrix} a_2 & \frac{b_2}{2} \\ \frac{b_2}{2} & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \frac{b_1}{2} \\ \frac{b_1}{2} & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

を満たす $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^+$ が存在する。このとき、

$$\begin{cases} a_1 = a_2u^2 - b_2ut + c_2t^2 \\ b_1 = -2a_2us + b_2(ru + st) - 2c_2rt \\ c_1 = a_2s^2 - b_2rs + c_2r^2 \end{cases}$$

が成立する。したがって、 $D > 0$ のときは、

$$\frac{r\xi_2 + s}{t\xi_2 + u} = \frac{r \frac{-b_2 + \sqrt{D}}{2a_2} + s}{t \frac{-b_2 + \sqrt{D}}{2a_2} + u} = \frac{(2a_2s - b_2r) + r\sqrt{D}}{(2a_2u - b_2t) + t\sqrt{D}}$$

となる。ここで、分母を有理化すると、

$$\begin{aligned} &= \frac{(4a_2^2su - 2a_2b_2st - 2a_2b_2ru + 4a_2c_2rt) + 2a_2(ru - st)\sqrt{D}}{4a_2^2u^2 - 4a_2b_2ut + 4a_2c_2t^2} \\ &= \frac{-2a_2b_1 + 2a_2\sqrt{D}}{4a_2a_1} \\ &= \frac{-b_1 + \sqrt{D}}{2a_1} = \xi_1 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\xi_1 = \frac{r\xi_2 + s}{t\xi_2 + u}$ より ξ_1 と ξ_2 は正に対等である。 $D < 0$ の場合も

同様に証明できる。

q.e.d.

補題4の条件のもとで、 ξ_2' が f_2 に対応する2次式の第2根であるとき、 $\frac{r\xi_2'+s}{t\xi_2'+u}$ は、 f_1 に対応する2次式の第2根である。

補題5

ξ_1 と ξ_2 が正に対等ならば $f_1(x, y)$ と $f_2(x, y)$ も正に対等である。

proof

ξ_1 と ξ_2 が正に対等であることから、

$$\xi_1 = \frac{r\xi_2 + s}{t\xi_2 + u}$$

を満たす $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in SL(\mathbb{Z})^+$ が存在する。上式を $a_1\xi_1^2 + b_1\xi_1 + c_1 = 0$ に代入すると、

$$a_1 \left(\frac{r\xi_2 + s}{t\xi_2 + u} \right)^2 + b_1 \left(\frac{r\xi_2 + s}{t\xi_2 + u} \right) + c_1 = 0$$

となる。 $(t\xi_2 + u)^2$ 倍すると、

$$(a_1r^2 + b_1rt + c_1t^2)\xi_2^2 + (2a_1rs + b_1(ru + st) + 2c_1tu)\xi_2 + (a_1s^2 + b_1su + c_1u^2) = 0$$

を得る。この2次式の判別式は $b_1^2 - 4a_1c_1 = b_2^2 - 4a_2c_2$ である。一方、 ξ_2 を根とする2つの整係数2次式の判別式が一致すれば、一方が他方の ± 1 倍である。したがって、

$$\begin{cases} a_1r^2 + b_1rt + c_1t^2 = \pm a_2 \\ 2a_1rs + b_1(ru + st) + 2c_1tu = \pm b_2 \\ a_1s^2 + b_1su + c_1u^2 = \pm c_2 \end{cases}$$

が成立する。これより、

$$\begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \frac{b_1}{2} \\ \frac{b_1}{2} & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a_2 & \frac{b_2}{2} \\ \frac{b_2}{2} & c_2 \end{pmatrix}$$

となる。 f_1 と f_2 が正に対等でないとすれば、

$$\begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \frac{b_1}{2} \\ \frac{b_1}{2} & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_2 & \frac{b_2}{2} \\ \frac{b_2}{2} & c_2 \end{pmatrix}$$

となり、 f_1 と $-f_2$ が正に対等となる。このとき、 ξ_2 は $-f_2$ に対応する2次式の第2根となり、 $\xi_1 = \frac{r\xi_2 + s}{t\xi_2 + u}$ が f_1 の第1根であることに矛盾する。よって、 f_1 と f_2 は正に対等である。

q.e.d.

補題5より、次の定理が成立する。

定理9

$f_1(x, y)$ と $f_2(x, y)$ が正に対等であることと、対応する2次式の第1根 ξ_1 と ξ_2 が正に対等であることは同値である。

定理10

2次形式の正の対等に関する類と2次代数的数の正の対等に関する類が1対1に対応する。

6 結 言

本稿では、対等な2次形式が同じ判別式を有することを示した。また、2次形式に対応する2次式の根を第1根、第2根に区別し、同じ判別式を有する2つの2次形式が正に対等であることと対応する2次式の第1根が正に対等であることが同値であることを示した。今後、任意の2次形式がある簡約2次形式に対等であることを示し、これより、同じ判別式を有する2次形式が有限個の同値類に分割されること、すなわち、類数の有限性について考察する予定である。

参 考 文 献

- 1) 高木貞治「初等整数論講義」共立出版.
- 2) 河田敬義「数論」岩波書店.
- 3) ディリクレ・デデキント「整数論講義」(酒井孝一 訳)共立出版.
- 4) C. F. ガウス「ガウス整数論」(高瀬正仁 訳)朝倉書店.
- 5) W.J. Leveque「Topics in number theory」Dover.
- 6) D.B. Zagier「Zetafunktionen und quadratische korper」Springer-Verlag.