大学入学共通テスト試行調査の問題にインスパイアされて問題を創ったのだが・・・

北海道石狩南高等学校　　福島　洋一
mathtefuk41@hokkaido-c.ed.jp

0　きっかけ

後期中間試験の作成を間近にして、大学入学共通テストの試行調査「数学Ⅰ・A」の問題を目にした。そして、そのエッセンスを注入した問題を創ってみた。

1　出題した問題（数学B「数列」分野）

問　次の会話を読み、問に答えよ。

数男：数列１，２，４，・・・の続きは８，16，32だよね？
列美：何で？
数男：だって、公比が２の等比数列でしょう？
列美：私は違うと思うよ。
数男：じゃあ、何なの？
列美：階差数列が初項から１，２で，続いて３，４，５と増えていくので、第４項は７，第５項は$\boxed{\quad ① \quad}$でしょう？
数男：そうか、手がかりが第３項までしかなかったら、いろいろな可能性が考えられるんだね。
列美：3の倍数を除く自然数を小さい方から並べたら１，２，４，５，７，８，10，・・・となるから、第４項は５かもしれないね。

(1)　$\boxed{\quad ① \quad}$に入る数を答えよ。
(2)　この数列の第４項の出し方として，会話の３通り以外の出し方を考え、その考え方と第４項を答えよ。

数男：3の倍数を除く自然数を小さい方から並べたら 1，2，4，5，7，8，10，・・・この数列おもしろいね。
列美：おもしろくないよ！こんな数列をおもしろいと思うのはゴンザレスと数男くらいだよ。
数男：そうかなあ・・・。この数列の和はどのように求めたら良いんだろう？
列美：じゃあ，やってみようか。

(3)　＿＿の数列について，第 200 項は 299 になる。この数列の初項から第 200 項までの和を求めよ。

数男：数列 1，2，4，5，7，8，10，・・・の階差数列をとったらおもしろいよ。
列美：1，2，1，2，1，2，・・・・・・，１と2が繰り返されているよね。
数男：同じ数字が繰り返される数列知ってるよ。一般項が $a_n=(-1)^n$ になる数列を初項から書いていくと-1，1，-1，1，・・・・・・となるよ。
列美：本当だ。じゃあ、これに，３ を足して，$b_n=(-1)^n+3$ としたら，2，4，2，4，・・・・・・という数列ができるね。
数男：ひらめいた！ということは，1，2，1，2，・・・・・・という数列の一般項は $c_n=\boxed{\quad ② \quad}$だね。
列美：この数列が階差数列だと考えたら，数列１，2，4，5，7，8，10，・・・の一般項も求められるね。

(4)　$\boxed{\quad ② \quad}$に入る式を求めよ。
(5)　Bonus!!　＿＿＿部の一般項を求め，試験作成者（福島）に計算方法を説明できた人には良いことがあります。（先着順）※今回の試験の点数には関係ありませんので、**今解く必要はありません。**

2　作成に関わるエトセトラ

作成の際には次の点に留意した

- 指導した内容から大きく逸れることがないようにする。
- 教科書や問題集に載っていない、思考を要する問題を盛り込む。
- 多くの生徒が前向きに取り組める内容にする。（難易度が高くなりすぎないようにする。）
- 比較的自由な発想で解答を書ける問題を盛り込む。
- 作成者自身が楽しむ。

ちなみに、私の試験作成後、大学入試センターから発表された大学入学共通テスト数学Ⅰ・数学Ａにおける「問題のねらい，主に問いたい資質・能力及び小問正答率（速報値）等」（添付資料）では、問題のねらいに「探究」や「考察する」といった言葉が目立つ。作成した問題が、試行調査の問題と比べると練りが足りないことは否めない。

作成に当たっては、私の中で数男と列美が様々な方向で会話を繰り広げていった。（ちなみに試験監督をしてくれた地歴科の先生には「列美」という名前はセンスがないとお叱りを受けた。）しかし、その多くは生徒の実態に合わないものや、試験問題にはそぐわないものであった。ただ、試行錯誤をする中で私自身が探究したことは間違いない。今後、教材を作成していく上のアイデアを創出するという点では有益な活動だった。

3　試験を実施して

残念なことに、この問題に入る前に、時間がかかってしまい、じっくりと取り組めなかった生徒も多かったようだ。また、試行調査の問題にも言えることだが、会話を読ませるということは、予想以上に負担が大きく、数学的思考に入る前にくじけた生徒も少なくなかったようだ。
そんな中で、なかなかおもしろい解答もあった。
私が一番興味を持ったのは

前の項と次の項をかけて２で割るというルールで並べると１，２，４の次は４となる

というものだった。漸化式にしてみると

$$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_n=\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{2}$$

だが、続く項を書き出していくと

１，２，４，４，２，１，１，２，４，・・・

となっていることがわかった。一般項を出してみると三角関数が出てきた。

また、最後のボーナス問題は試験が終わると忘れられてしまったようで、誰も挑戦しなかったのだと思われた。しかし、忘れた頃に１人の生徒が解答を持ってきた。階差数列を公式的に利用して解いてくることしか考えていない私にとって、予想していなかった解答だったので、学年に数学通信として紹介した。（別紙資料）

4　まとまっていないが・・・まとめ

この活動を通して、いろいろな方向に話が広がった。ちなみに大学入試センターの問題のねらいには「モデル」「データから関数関係を見いだして問題解決」などと書かれていた。このネタは海外だと考え、海外サイトに行ってネタを調べたりもした。その話はまた今度。

参考文献
- 結城浩「数学ガール」
- 大学入試センター「大学入学共通テスト試行調査（プレテスト）数学Ⅰ・数学Ａ」
- 大学入試センター「【数学Ⅰ・数学Ａ】問題のねらい，主に問いたい資質・能力及び小問正答率（速報値）等」

【数学Ⅰ・数学A】

問題のねらい，主に問いたい資質・能力及び小問正答率（速報値）等から抜粋

第１問〔１〕　問題のねらい

コンピュータのグラフ表示ソフトを用いた授業場面を設定し，二次関数の係数の値の変化に伴ってグラフが移動する様子を**考察する**問題である。単に計算によって式や数値を求める問題とはならないように工夫している。論理的に推論したり解決過程を振り返ったりしながら，見いだした事柄の根拠を数学的な表現を用いて説明する力を問う。

第１問〔２〕　問題のねらい

三角形の形状と三角比に関する命題について，その**探究**過程の会話文を読みながら，命題の条件を変えるなどして論理的・発展的に**考察する**問題である。　得られた結果を基に批判的に検討し，概念を広げたり深めたりする力を問う。

第２問〔１〕　問題のねらい

　文化祭で販売するＴシャツの価格を，一次関数や二次関数を活用して決める問題である。　問題に示された$\boxed{\text{データから関数関係を見いだして問題解決}}$する力を問う。

第２問〔２〕　問題のねらい

都道府県別の観光客数やその消費総額などのデータについて，散布図や箱ひげ図を用いたり，データを処理したりして**考察する**問題である。散布図におけるデータの特徴を読み取るとともに，その方法を数学的な表現を用いて説明する力を問う。

第３問（選択率67.7%）　問題のねらい

高速道路の交通量について，相対度数を確率とみなして確率$\boxed{\text{モデル}}$を設定し，渋滞状況を考慮して効率のよい交通量の配分を**考察する**問題である。社会の事象を数理的にとらえ，数学的に処理し数値を求めたり，求めた値を元の事象に戻してその意味を解釈する力を問う。

第４問（選択率83.1%）　問題のねらい

正四面体に成り立つ性質について，コンピュータソフトを用いて**探究**する場面を取り上げ，空間図形の性質を用いて論理的・発展的に**考察する**問題である。空間図形に成り立つ性質を論理的に説明したり，得られた結果を批判的に検討し発展させたりする力を問う。

第５問（選択率49.2%）　問題のねらい

あるルールに基づき数字を書き込んだ方盤で成り立つ性質を，約数・倍数の関係や二元一次不定方程式の整数解に着目して**考察する**問題である。　事象の特徴をとらえて数学化し，問題の本質を見いだす力を問う。

石狩南高等学校 34 期 2 学年

数学科 information

No. 6

12 月 18 日（月）

数学 B 後期中間試験「BONUS」問題解かれる！

数男：数列 1，2，4，5，7，8，10，・・・の階差数列をとったらおもしろいよ。

列美：1，2，1，2，1，2，・・・・・，1と2が繰り返されているよね。

数男：同じ数字が繰り返される数列知ってるよ。一般項が $a_n=(-1)^n$ になる数列を初項から書いていくと-1，1，-1，1，・・・・・となるよ。

列美：本当だ。じゃあ、これに，3 を足して，$b_n=(-1)^n+3$ としたら，2，4，2，4，・・・・・という数列ができるね。

数男：ひらめいた！ということは，1，2，1，2，・・・・・という数列の一般項は $c_n=$ $\boxed{②}$ だね。

列美：この数列が階差数列だと考えたら，数列 1，2，4，5，7，8，10，・・・の一般項も求められるね。

(5) Bonus!! ＿＿＿部の一般項を求め，試験作成者（福島）に計算方法を説明できた人には良いことがあります。（先着順）

a_n 1，2，4，5，7，8，10 …

b_n 1，2，1，2，1，2，… n ←階差をとる

b_1 b_2 b_3

$a_n=a_1+\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}b_k}$ ←ここを求めたい

n が偶数の場合と奇数の場合を考える。

偶 $\sum_{k=1}^{2}b_k=\boxed{1+2}=3$

奇 $\sum_{k=1}^{3}b_k=\boxed{1+2}+1=4$

$\sum_{k=1}^{4}b_k=\boxed{1+2}+\boxed{1+2}=6$

$\sum_{k=1}^{5}b_k=\boxed{1+2}+\boxed{1+2}+1=7$

＊ $n=2$ のとき $\boxed{1+2}$ が1回（1が1個，2が1個）。
$n=4$ のとき $\boxed{1+2}$ が2回（1が2個，2が2個）。
△がそれぞれ半分（$\frac{1}{2}$）になっているので、
$\frac{n}{2}(\boxed{1+2})=\frac{3}{2}n$ となる。

＊ $n=3$ のとき $\boxed{1+2}$ が1回と+1。
$n=5$ のとき $\boxed{1+2}$ が2回と+1。偶数と比べて+1が多いので
$\frac{n-1}{2}(\boxed{1+2})+1=\frac{3n+1}{2}$
$\left(=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right)$ となる

＊ $\frac{3}{2}n$（偶数）と $\frac{3n-1}{2}$（奇数）は b_n の数列の場合。
$a_4=a_1+b_1+b_2+b_3$ のように、a_n の偶数番目を算出するには b_n を奇数個足す。a_n を出すとき、b_{n-1} であるので、a_n の偶数を出す式は $\frac{3}{2}(n-1)+\frac{1}{2}$ …①
奇数を出す式は $\frac{3}{2}(n-1)+1$ …② になる。
①，② をそれぞれ整理して、

$$a_n=\begin{cases}\frac{3}{2}n-1 & (n\text{は偶数})\\ \frac{3}{2}n-\frac{1}{2} & (n\text{は奇数})\end{cases}$$

◦確認

偶 $a_4=\frac{3}{2}\times4-1$
$=6-1=\boxed{5}$

奇 $a_5=\frac{3}{2}\times5-\frac{1}{2}$
$=\frac{15}{2}-\frac{1}{2}$
$=\frac{14}{2}=\boxed{7}$

奇数番目と偶数番目の項を分けて考えた鮮やかな解答でした。説明もわかりやすく書かれて見事です！実は、偶数と奇数に分けないで一般項を表すこともできるのですが・・・。できた人には良いことがあるかもしれません。できた人は福島まで説明に来てください。（先着順）

見事に正解した生徒には

こんな

良いことがありました！