偶然か必然か　～coincidence or inevitable～

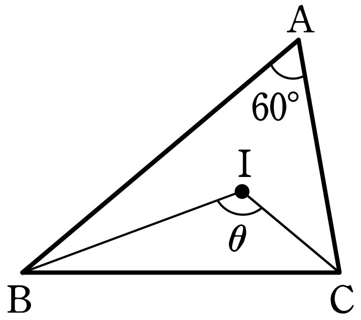
北海道札幌西高等学校

福島　洋一

　チャイムが鳴り、教室を去ろうとする私に歩み寄る影。そして「先生、この解き方ではだめですか？」の質問。自分が想定している解き方であればその場で判断して回答することができるが、中には想定していないものも存在する。今まで経験した事例からいくつか紹介する。

事例１

次の図において，点 I は △ABC の内心である。
θ を求めよ。



答　$\theta = 120°$

結局 60°を2倍すればいいんですよね？

☞違う値で確認してみれば（反例を考えてみれば）、偶然だったことに気がつくのは難しくない。∠A を文字で置いて一般化することも良い練習かもしれない。∠A を 60° に設定したのはある意味で出題ミスではないだろうか（内心・外心の区別ができていなくても正解してしまう）。

事例２

20 個の値からなるデータがあり，そのうちの 8 個の値の平均値は 3，分散は 4，残りの 12個の値の平均値は 8，分散は 9 である。

(1)　このデータの平均値を求めよ。

(2)　このデータの分散を求めよ。

(2)の答　13

つまり、それぞれの分散を足して4+9を計算すればいいんですよね？

☞分散の意味を考えれば、２つの集団の平均値が離れるほど分散は大きくなることがわかるだろう。実際平均値をそれぞれm_1，m_2として計算すると、分散は $\frac{6}{25}(m_1 - m_2)^2 + 7$ となった。出題者もまさか答えがそれぞれの分散の和になっているなんて思っていないだろう。

事例３

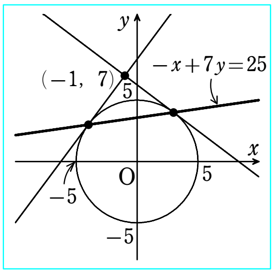
点 $(-1,\ 7)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する２つの直線の接点を A，B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とすると，
A，B における接線の方程式は，それぞれ
$x_1x+y_1y=25$，$x_2x+y_2y=25$
これらはともに点 $(-1,\ 7)$ を通るから

$$-x_1+7y_1=25 \quad \cdots\cdots ①$$

$$-x_2+7y_2=25 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から，２点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ は
直線 $-x+7y=25$ 上にある。
よって，直線 AB の方程式は　$-x+7y=25$



ということは点 $(-1,\ 7)$ のような点が円周上に来たときが円の接線ですね！！

☞**円外の点を限りなく円周に近づけていくと・・・との発想で、考え方としては悪くない。でも、なんで接線の方程式の証明はこの方法を使わないのか・・・・循環論法!?**

事例４

1個のさいころを3回投げるとき，出る目の積が6の倍数である確率を求めよ。

積が2の倍数であるという事象をA，3の倍数であるという事象をBとすると求める確率は$P(A\cap B)$である。

$P(A)=1-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{7}{8}$　　$P(B)=1-\left(\frac{4}{6}\right)^3=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$

積が2でも3でも割り切れないのは3回とも1または5が出たときなので

$P(\overline{A\cup B})=\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{1}{27}$

したがって　$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=\frac{26}{27}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$なので

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{7}{8}+\frac{19}{27}-\frac{26}{27}=\frac{133}{216}$

$\frac{19}{27}\times\frac{7}{8}$ で答えが同じになったんですがだめですか？

☞**確かに 3 の倍数になるそれぞれの場合について、その中の 2 の倍数の割合は一定である。でも、説明は面倒。実際に質問してきた生徒は説明できなかった。**

事例５

1から999までの整数の中に，3で割りきれるまたは
3を使った数は何個あるか。

求める個数は下表の①，②，③の合計である。

	3で割り切れる	3で割り切れない
3を使った数	①	②
3を使わない数	③	④

まず，④の個数を求め、それを1～999までの整数の総数999から
引くことによって求めることとする

百の位と十の位の決め方はそれぞれ3以外の9通りあるので，
上２桁の決め方は 9^2 通りある。
（ただし、できた数が001のような場合は1，023のような場合は23を表すこととする）
また、
(i) 百の位と十の位の和が3で割り切れるとき
加えた結果，3の倍数にならないような，一の位は1,2,4,5,7,8の６通り
(ii)百の位と十の位の和が3で割って1余るとき
加えた結果，3の倍数にならないような，一の位は0,1,4,6,7,9の６通り
(iii) 百の位と十の位の和が3で割って2余るとき
加えた結果，3の倍数にならないような，一の位は0,2,5,6,8,9の６通り
であり，上２桁がどのように決まっても(i),(ii),(iii)のいずれかになるので
④に入る数の個数は
$9^2 \times 6 = 486$ （個）
よって，求める個数は
$999 - 486 = \boxed{513\text{（個）}}$

$9^3 - 6^3$ ＝513なんですが、
これでも良いですか？

☞結構悩みました。一般化して *$10^n - 1$* までの個数と *$9^n - 6^n$* の値を比べてみると、n＝1，2，3では等しくなりましたが、n＝4からは成り立ちませんでした。

ということを、私が考えて生徒に回答するのですが、これって生徒自身がやってくれるのが理想ですね（自分で考えて解決する生徒はそもそも質問に来ないし、結果もわざわざ教えてくれないか…）。まさに探究的な学びです。「あなたはどう思うの？」「明日まで考えてみてね。明日また話そう。」と返したいところですが、気がついたら考えてしまっているのが悪い癖です…。