

初任者校内研修 ～階差数列の $n = 1$ の証明～

市立札幌藻岩高等学校 主幹教諭 橋本有也

1 はじめに

昨年度より主幹教諭となり、初任者の校内研修を担当することとなった。研修では、学校業務や、授業実践、HR経営、生徒指導、保護者対応など、日頃の初任者の悩みを中心とした研修を実施している。

また、授業見学や、振り返りも行い、同一教科の数学の初任者には、教授法の指導も行っている。本レポートは、初任者の授業見学や、教授法の指導の中で、初任者が疑問を持っていたり、間違った認識を持っていたりしたものをまとめたものである。

2 授業見学

<問題>

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

$$1, 3, 7, 13, 21, \dots$$

<解答>

この数列の階差数列は、 $2, 4, 6, 8, \dots$

その一般項を b_n とすると $b_n = 2n$ である。

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n \\ a_n &= n^2 - n + 1 \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①に $n = 1$ を代入すると $a_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$

よって、 $n = 1$ のときも成り立つ

したがって、一般項 a_n は

$$a_n = n^2 - n + 1$$

3 振り返り

授業見学を行った後、振り返りの時間を設けた。

指導教官：本日の授業で、階差数列は $n = 1$ のときに、何に気を付けなければなりませんか？

初任者：階差数列は $n \geq 2$ で公式が使用できるので、 $n = 1$ は別に示さなければなりません。

指導教官： $n = 1$ のときは、何を示さなければなりませんか？

初任者：成り立っているからです。

指導教官：何が成り立っているかを示す必要がありますか？

初任者：①の式です。

指導教官：①の式はどんな式ですか？

初任者：等式です。

指導教官：では、等式が成り立つことを示すときに、気を付けなければならないことは何ですか？

初任者：あれ？これは等式の証明をしなければならぬので、まだ成り立っているかどうかわかっていない等号は使えないから、代入したのが間違っていたのですか？

指導教官：その通りです。①の等式が $n = 1$ で成り立つことを証明しなければなりません。

初任者：自分が高校生だった頃から、 $n = 1$ を代入したら良いと思っていました。

指導教官：では、等式の証明を意識して、解答を修正してみましょう。

4 解答の修正

(前半略)

$n = 1$ のとき

$$(\text{左辺}) = a_1 = 1$$

$$(\text{右辺}) = 1^2 - 1 + 1 = 1$$

よって、 $n = 1$ のときも①は成り立つ

したがって、一般項 a_n は

$$a_n = n^2 - n + 1$$

5 考察

初任者：このように左辺と右辺をはっきり分ければ、等式の証明だと意識させることができます。教科書はなぜこのように書かれていないのでしょうか？

指導教官：昔から、教科書はこのように書かれていません。私の授業では、左辺と右辺を書くようにしています。教科書の書き方についてももう少し見てみましょう。

< S 社教科書 >

初項は $a_1 = 1$ なので、①は $n = 1$ のときにも成り立つ

指導教官：これを見て、どう思いますか？

初任者：この「初項は $a_1 = 1$ なので」は、代入したのではなく、与えられている左辺のことを言っていると思います。「①は $n = 1$ のときにも成り立つ」で右辺と一致したことを証明したことになるのでしょうか？

指導教官：きっと計算が簡単だから、自明として書かれていないのだと思います。他の教科書も見てください。

< T 社教科書 >

$a_1 = 1$ であるから、①は $n = 1$ のときにも成り立つ

指導教官：ここの教科書もさほど違いはありませんね。

< K 社教科書 >

①に $n = 1$ を代入すると、 $1^2 - 1 + 1 = 1$ となり、初項 a_1 と一致する

初任者：自分が高校生のとき、ここの教科書を使っていました。「①に $n = 1$ を代入する」と書いてあったので、両辺に代入すると思っていましたが、今改めて読むと、右辺にしか代入していませんでした。

指導教官：教科書が「①の右辺に $n = 1$ を代入すると」だったら、間違っていて覚えていなかったかもですね。指導書も確認してみましょう。

< T 社指導書 >

「 $n \geq 2$ のとき」という注意は、わずらわしいが重要である。なぜなら $n = 1$ のときは階差を加えない段階だからである。したがって、導き出された結果が「 $n = 1$ のとき」成り立つのかの吟味は必ず行うことが必要である。

指導教官：これしか書かれていませんね。

< K 社指導書 >

$n = 1$ の場合については別に調べる必要があることも注意しておきたい。

初任者：ここも、これしか書かれていません。

< S 社指導書 >

階差数列を使って求めた一般項は、 $n \geq 2$ で成立する。それゆえ、 $n = 1$ のときにも成立するかどうかを確かめなければならないことに注意させる。

$\{a_n\}$ の一般項は、 $n \geq 2$ で成立するので、別に $n = 1$ のときも同じ式が成立するか吟味しておく必要があることを強調する。

もし $n = 1$ のときに成立しないならば、一般項としては、 $n = 1$ の場合を別記する。ただし、このような問題はここでは扱わない。

指導教官：説明はしていますが、等式が成り立つということ意識するのであれば、左辺や右辺などの言葉があってもよいですね。

< S 社指導書（新課程） >

深く理解せずに機械的に書くだけになってしまう生徒もいると考えられる。何を確認しているのか、なぜその確認が必要なのかについてしっかり理解させたい。

何を確認しているのかについて： $a_n = n^2 - n + 1$ の右辺の式に $n = 1$ を代入すると 1 であり、与えられた数列から、 $a_1 = 1$ である。これらが等しいから、 $n = 1$ のときも $a_n = n^2 - n + 1$ という表示が正しいと確認しているのである。

なぜ $n = 1$ の確認が必要なのかは、公式が $n \geq 2$ のときにしか適用できないからであり、 $a_n = n^2 - n + 1$ は $n \geq 2$ のときのみ成り立つことしかわかっていないから、 $n = 1$ は別に確認する必要があるのである。

さらにその根拠を公式が $n \geq 2$ のときにしか適用できないのはなぜだろうかのように問い掛けることで、さらなる理解を促すことも可能である。

指導教官：これはとても詳しく書かれていますね。

初任者：これからは、複数の教科書や指導書にも目を通したいと思います。次の授業の冒頭に、階差数列の $n = 1$ の証明の書き方を訂正し、和 S_n から一般項 a_n を求める問題も、同じように $n = 1$ があるので、等式の証明を生徒に意識させるようにします。

指導教官：頑張ってください。

6 後日の授業

<問題>

初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = n^2 + 2n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

<解答>

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= n^2 + 2n - \{n^2 - 2n + 1 + 2n - 2\} \\ a_n &= 2n + 1 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 \\ (\text{右辺}) &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

よって、 $n = 1$ のときも①は成り立つ

したがって、一般項 a_n は

$$a_n = 2n + 1$$

7 考察

初任者：この問題も、このように左辺と右辺をはっきり分ければ、等式の証明だと意識させることができます。教科書は最初に a_1 を示していますが、なぜなのでしょう？

指導教官：流儀があって、最後に書かれている模範解答もあります。間違いを防ぐためとか、書いておけば中間点がもらえるからなどと思っていました。各教科書の書き方について見てみましょう。

< K 社教科書 >

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= n^2 + 2n - \{n^2 - 2n + 1 + 2n - 2\} \\ a_n &= 2n + 1 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①に $n = 1$ を代入すると、 $2 \cdot 1 + 1 = 3$ となり、初項 a_1 と一致する。

以上より、一般項は

$$a_n = 2n + 1$$

初任者：先ほどと同じですね。これも「①の右辺に $n = 1$ を代入すると」だったら、良かったと思います。

< T 社教科書 >

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$$

また、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= n^2 + 2n - \{n^2 - 2n + 1 + 2n - 2\} \\ a_n &= 2n + 1 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$a_1 = 3$ であるから、①は $n = 1$ のときにも成り立つ。

ゆえに、

$$a_n = 2n + 1$$

初任者：改めて見てみると、この書き方は証明しているのでしょうか？「 $a_1 = 3$ であるから」は、①に代入したのか、1行目を改めて書いているのか不明です。

指導教官：段々と教科書の書き方に疑問を持ってきたようですね。他の教科書も見てみましょう。

< S 社教科書 >

$$\text{初項 } a_1 \text{ は、} a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= n^2 + 2n - \{n^2 - 2n + 1 + 2n - 2\} \\ a_n &= 2n + 1 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①で $n = 1$ とすると、 $a_1 = 3$ が得られるから、①は $n = 1$ のときにも成り立つ。

したがって、一般項は

$$a_n = 2n + 1$$

初任者：あれ？これは、証明しなければならない①の式に代入しています。この書き方は、等式の証明として問題ないのでしょうか？

指導教官：その感覚で正しいと思います。あくまでも $a_1 = S_1 = 3 = 2 \cdot 1 + 1$ なので、 $n = 1$ のときも成り立つのであって、 $n = 1$ を代入したから、成り立ったわけではないのです。 $n = 1$ を右辺に代入した結果、左辺と一致したから成り立ったのです。そこを理解しているかがポイントです。等式の証明でずっと等号で書き、最後に $3 = 3$ より成り立つと言っているようなものです。しかし、このレベルだと自明だということが言えてしまうのが厄介です。

指導教官：さらに、この書き方は、不一致になったときに、生徒が間違える原因を作っていると私は思っています。 a_1 が2回出てくることで、最後にどちらの a_1 を書いたら良いかを惑わせる可能性があります。あくまでも $a_1 = S_1$ が正しいことの理解を妨げているように感じています。では、指導書を見てみましょう。

< S 社指導書 >

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ であるから、 $n = 1$ のときは改めて $a_1 = S_1$ としなければならない。 S_1 は初項 a_1 のみの和ということになるが、生徒には違和感があると思われる。ここでは記号の性質上、 S_1 は a_1 と同じものを表すとさらりと説明しておくとうい。

初任者：さらりと説明すればよいのですか？

指導教官：さらりではなく、とても重要なので、生徒がわかるまで説明しましょう。

< T 社指導書 >

$S_n - S_{n-1} = a_n$ は $n \geq 2$ のときに意味をもつ。この式に形式的に $n = 1$ としたときの値が $S_1 = a_1$ と一致するとは限らない。この点は重要であり、生徒に強調する必要がある。しかし、一致する場合には、この a_n をそのまま一般項とみなすことができることにも注意しておきたい。

初任者：形式的に代入していますが、大丈夫なのでしょうか？

指導教官：形式的に代入することは可能ですが、それで証明になっているかどうかは疑問です。もし不一致だったときは、背理法が使えるので、使用することができます。

< 証明 >

① が $n = 1$ も成り立つと仮定すると、

① に $n = 1$ を代入すると、 $a_1 = (S_1$ と異なる値) となるため、矛盾。

よって、 $n = 1$ は成り立たない。

指導教官：では、一致しているときに、 $n = 1$ を代入して、矛盾しないから成り立つは、正しい証明の書き方になっているのでしょうか？

$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 = 2 \cdot 1 + 1$ であって、結果 $a_1 = 2 \cdot 1 + 1$ が成り立つのではないのでしょうか。

< K 社指導書 >

$a_n = S_n - S_{n-1}$ となるが、 S_{n-1} が意味をもつのは、 $n \geq 2$ のときである。したがって $n = 1$ のときについて

は、 $a_1 = S_1$ であることから別に求める。この $n = 1$ の値が、 $n \geq 2$ のときに導いた式において、 $n = 1$ とした場合と一致するときは、すべての自然数 n について a_n はこの式であらわされることになる。 S_n の式に $n = 0$ を代入した値 S_0 が 0 の場合は、 $n = 1$ でも成り立つことを注意してもよい。

初任者： $S_0 = 0$ だと一致するのですか？

指導教官：なぜかわかりますか？

初任者： $a_n = S_n - S_{n-1}$ に $n = 1$ を代入すると、 $a_1 = S_1 - S_0 = S_1 - 0 = S_1$ より、成り立つからです。

指導教官：うーん。 $a_n = S_n - S_{n-1}$ の式は $n \geq 2$ なのに、 $n = 1$ を代入してもよいのですか？

初任者：(左辺) = $a_1 = S_1$ 、(右辺) = $S_1 - S_0 = S_1 - 0 = S_1$ ですか？

指導教官：そうですね。これも、どの等式の証明をしなければならないのかという意識にたてば、この証明になりますね。あくまでも S_0 は定義されていないので、 S_n に $n = 0$ を代入した形式的なものですけどね。

< S 社指導書 (新課程) >

$n \geq 2$ のときを先に述べる教科書もあるかも知れないが、生徒が誤る要因という指摘も多い。そこで $a_1 = S_1$ を先に示した。

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ であるから、 $n = 1$ のときは改めて $a_1 = S_1$ としなければならない。 S_1 は直訳すれば第1項までの和ということになり、すなわち S_1 は a_1 のことを示すのである、と説明しておくとうい。階差数列の問題と同様、 $n = 1$ のときの確認についてしっかり理解させたい。階差数列の問題と異なり、和から一般項を求める場合は S_n を表す式において形式的に $S_0 = 0$ となっていれば、 $a_n = S_n - S_{n-1}$ は $n = 1$ のときも成り立つが、そうでない場合は $n = 1$ のときは別に表示する必要がある。何も考えずに「 $n = 1$ のときにも成り立つ」と書くことのないよう、成り立たない場合を見せ、注意を促すことを目的としている。

初任者： $a_1 = S_1$ を先に示すのは、生徒が誤る要因という指摘があるからなのですね。

指導教官：先に書いておいても間違いということはないけれど、階差数列と書き方をそろえるのであれば、後ろに書いた方がいいですね。そもそも間違いの原因は、私は、等式の証明の仕方にあると思っています。

初任者：生徒にわかりやすく説明できるように工夫します。

8 不一致の例

<問題>

初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = 2^n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

<解答>

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^n - 2^{n-1} \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} - 1 \cdot 2^{n-1} \\ &= (2 - 1) \cdot 2^{n-1} \\ a_n &= 2^{n-1} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= a_1 = S_1 = 2^1 = 2 \\ (\text{右辺}) &= 2^{1-1} = 2^0 = 1 \end{aligned}$$

よって、 $n = 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ は成り立たない。

したがって、一般項 a_n は

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1) \\ 2^{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

9 考察

初任者：まず $S_0 = 2^0 = 1$ なので、一致しない問題だとすぐわかります。この書き方は、階差数列と同じ書き方なので、書きやすいです。また、 a_1 が左辺にしか出てこないで、最終的にまとめるときに、どうするかがポイントだと思います。

指導教官：では、教科書の解答を見てみましょう。

< K 社教科書 >

$$a_1 = S_1 = 2^1 = 2$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &(\text{中略}) \\ a_n &= 2^{n-1} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ に $n = 1$ を代入すると、 $2^{1-1} = 2^0 = 1$ となり、初項 a_1 と一致しない。以上より、一般項は

$$a_1 = 2, \quad n \geq 2 \text{ のとき、} \quad a_n = 2^{n-1}$$

< K 社指導書 >

$n \geq 2$ として求めたものと初項が一致しない問題である。一致するとは限らない場合があることをしっかり指導する。

初任者：やはり、「 $\textcircled{1}$ に $n = 1$ を代入すると」は右辺に代入していますね。

< T 社教科書 >

$$a_1 = S_1 = 2^1 = 2$$

また、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &(\text{中略}) \\ a_n &= 2^{n-1} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$a_1 = 2$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n = 1$ のときには成り立たない。ゆえに、

$$a_1 = 2, \quad n \geq 2 \text{ のとき、} \quad a_n = 2^{n-1}$$

< T 社指導書 >

$n = 1$ の場合が、 $n \geq 2$ の場合に含まれるかどうかを確認しなければならない。

初任者：「 $a_1 = 2$ であるから」は、初項の確認をしています。しかし、右辺に代入せずに、一致しないと言ってよいのでしょうか？

指導教官：計算が簡単なので、自明だと思いますが、これだと証明にはなっていないと私は思います。

< S 社教科書 >

$$\text{初項 } a_1 \text{ は、} a_1 = S_1 = 2^1 = 2$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &(\text{中略}) \\ a_n &= 2^{n-1} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ で $n = 1$ とすると、 $a_1 = 1$ が得られるから、 $\textcircled{1}$ は $n = 1$ のときには成り立たない。

したがって、一般項 a_n は

$$a_1 = 2, \quad n \geq 2 \text{ のとき、} \quad a_n = 2^{n-1}$$

< S 社指導書 >

$S_n - S_{n-1}$ から得られた一般項 a_n で $n = 1$ とおいたものと、 $a_1 = S_1$ は異なることに注意させる。

< S 社指導書 (新課程) >

$S_1 = 2$ すなわち $a_1 = 2$ であり、 $a_n = 2^{n-1}$ から得られる $a_1 = 1$ とは異なる。

$a_n = S_n - S_{n-1}$ から得られる式が、 $n = 1$ のときには成り立たない。一般項は、 $n = 1$ のときと $n \geq 2$ のときに分けて示す必要がある。

初任者：まだ成り立っていない式に $n = 1$ を代入しています。しかも初項とは異なる $a_1 = 1$ が出てくるので、なんだかよくわからなくなりますね。

指導教官：よくわかっていない生徒に混乱を与える解答だと思います。本来的には、背理法を使っています。 $n = 1$ で成り立っていると仮定すると、矛盾が出るので、成り立っていない。という結論になります。しかし、このやり方は、不一致のときにしか使えないので、混乱を与える解答になると思います。

初任者：とても勉強になりました。等式の証明など、他の分野で教えてたことと関連付けながら教えていくことや、他の問題と似ている部分や注意しなくてはならない部分に注意しながら授業を進めて行こうと思います。

指導教官：では、頑張ってください。

10 おわりに

今回、教科書によって解答の書き方に違いがあることや、教え方によって、誤った認識で生徒に伝わるのがわかった。また、今まで朱書きの教科書は見ても、指導書を見ることはなかったが、指導書も改訂されており、これからは指導書を読むのも良いと思った。

今回のレポートに賛否両論の意見があるかも知れない。等式の証明に対する私のこだわりが強く反映されているが、計算が簡単であるため自明であるので、まったく問題ないのかも知れない。

生徒に指導する際に、等式の証明との関連や、階差数列と和から一般項を求める問題を同じように書けるようにするのであれば、このようにしておくのがよいと思う。

教科書や指導書にすべてのことが書かれている訳ではないので、自明だとは思わず何事にも疑問を持って理解していくことが大切である。

今回のレポートが、何かの役に立てれば、幸いである。