三角形の面積公式、正弦定理、第一余弦定理、第二余弦定理の同値性について

林　雄　一　郎*

1　はじめに

三角比を用いて平面図形の性質を計量的に調べることは三角比の有用性を知るうえで大切なことである。その際使う基本的な定理・公式は、正弦定理、余弦定理、三角形の面積公式である。教科書にある余弦定理は第二余弦定理であり、正射影の考えから導かれる第一余弦定理はないが時々鮮やかな問題解決の糸口を提供する。

これらはそれぞれ形が異なる式である。しかし、実はすべて同値であることが分かる。ということは、これらの定理・公式は三角形の数学的な本質をそれぞれの式で表現しているのだと解釈できる。つまり、計量的な三角形は三つずつの頂点と辺の長さの6要素から直観的に導入されたものだが、これらの同値な定理のいずれかを用いて抽象的に定義することもできる。本稿では、まずこれらの定理の同値関係を証明し、次に抽象的な三角形の定義について考察してみる。以下、三角形の角 A,B,C の対辺をそれぞれ a,b,c、面積を S、外接円の直径を $2R$、$A+B+C=\pi$ とする。

Ⅰ　三角形の面積　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

Ⅱ　正弦定理　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

Ⅲ　第一余弦定理

$a=c\cos B+b\cos C$

$b=c\cos A+a\cos C$

$c=b\cos A+a\cos B$

Ⅳ　第二余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

2～5では、Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳが互いに同値となる証明を与える。また、6では三角形を抽象的に定義し、それが作図可能性を満たすことを確かめる。

2　ⅠとⅡは同値

（1）　Ⅰ⇒Ⅱを導く

＊北海道情報大学情報メデイア学科

Ⅰから $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{abc}{2S}$ となり正弦定理が成り立つ。

この比の値は幾何学的な解釈をすれば $2R$ となることが分かるが、本来の正弦定理にはこれがないことに注意したい。なお、$S=\dfrac{abc}{4R}$ という公式がある。

（2） Ⅱ⇒Ⅰを導く

正弦定理から、$a\sin B=b\sin A$　$b\sin C=c\sin B$

これから $\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ ＝一定　この一定値が意味するものは何かを幾何学的に考察し解釈すれば、ΔABC の面積 S であることが分かる。

3　ⅡとⅢは同値

（1） Ⅱ⇒Ⅲを導く

$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$

$b\cos C+c\cos B=2R\sin B\cos C+2R\sin C\cos B$

$=2R(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=2R\sin(B+C)=2R\sin A=a$

残る２つも同様に求められる。

なお、ここで加法定理（数学Ⅱ）を用いたので数学Ⅰを超えてしまう。

（2） Ⅲ⇒Ⅱを導く

$a^2-b^2=a(b\cos C+c\cos B)-b(a\cos C+c\cos A)$

$=c(a\cos B-b\cos A)=(a\cos B+b\cos A)(a\cos B-b\cos A)$

$=a^2\cos^2 B-b^2\cos^2 A$

$a^2(1-\cos^2 B)=b^2(1-\cos^2 A)$　　$a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A$

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 同様にして $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ が導ける。

4　ⅢとⅣは同値

（1） Ⅲ⇒Ⅳを導く

$a = b\cos C + c\cos B$ ・・・①
$b = c\cos A + a\cos C$ ・・・②
$c = a\cos B + b\cos A$ ・・・③

① $\times a$—③$\times c$

$$a^2 - c^2 = ab\cos C + ac\cos B - (ac\cos B + bc\cos A)$$

$$= ab\cos C - bc\cos A \quad ・・・④$$

② $\times b$—④

$b^2 - a^2 + c^2 = bc\cos A + bc\cos A = 2bc\cos A$

したがって、$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
同様に、残り２つも導ける。

（２） Ⅳ⇒Ⅲを導く

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ・・・①
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ ・・・②
① ＋ ②

$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2c(b\cos A + a\cos B)$

したがって、$c = b\cos A + a\cos B$　　同様に残り２つも導ける。

5　同値の別証

余弦定理の順序を入れ替えて　Ⅰ⇔Ⅱ⇔Ⅳ⇔Ⅲという証明順序も考えられる。
このときには、Ⅱ⇔Ⅳの証明が必要となる。
（Ⅱ⇒Ⅳの証明）

$b^2 + c^2 - a^2 = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)$ ・・・①

ここで　$\sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$　という加法定理を用いると

① の () の中$= \sin^2 B(1 - \cos^2 C) + \sin^2 C(1 - \cos^2 B) - 2\cos B\cos C\sin B\sin C$

$$= 2\left(\sin^2 B \sin^2 C - \cos B \cos C \sin B \sin C\right) = 2\sin B \sin C\left(\sin B \sin C - \cos B \cos C\right) =$$

$$8R^2 \sin B \sin C\left(-\cos(B+C)\right) = 8R^2 \sin B \sin C \cos A = 2\cdot(2R\sin B)(2R\sin C)\cos A$$
$$= 2bc\cos A$$

（Ⅳ⇒Ⅱの証明）

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A = 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

ここで分子は　$(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2) = \left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)$

$2s=a+b+c$ とおけば　$16s(s-a)(s-b)(s-c)=16S^2$　となる（ヘロンの公式）。

したがって、$\sin^2 A = \dfrac{16S^2}{4b^2c^2} = \dfrac{4S^2}{(bc)^2}$　これから　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{abc}{2S}$

同様に　$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{abc}{2S}$　が導け、正弦定理が成り立つ。

また、三角形の面積⇒正弦定理⇒第一余弦定理⇒第二余弦定理⇒三角形の面積

という順序で証明すれば効率が良い。この場合は、２（１）、３（１）、４（１）の証明に、

Ⅳ⇒Ⅰの証明を付け足せばよい。それは上記のⅣ⇒Ⅱの証明から直ちに $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ が出

てくることから分かる。同様に $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ もいえる。

６　抽象的な定義の三角形

正弦定理Ⅱを満たす辺と角をもつ図形をあらためて“三角形”と定義する。この図形は“抽象的な三角形”である。このとき、辺 a,b,c から実際に三角形ができるのか否か？　つまり作図可能の条件　$|b-c|<a<b+c$ を満たすのかどうか？

これを調べてみる。　　$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$ を仮定する。

$$a-(b+c) = 2R\{\sin A-(\sin B+\sin C)\} = 2R\left\{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} - 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right\}$$

$\sin\dfrac{A}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{B+C}{2}\right)$　$\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \cos\dfrac{A}{2}$　だから

$$a-(b+c)=4R\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right)=-8R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}<0 \qquad \therefore a<b+c$$

同様にして $|b-c|<a$ が導ける。　したがって、３つの辺をもつ図形は作図可能である。

したがって、正弦定理を満たす辺と角からなる“三角形”は、通常の三角形となることが分かった。他の同値な定理・公式を使って定義しても同じである。

こうして定義された“三角形”が作図可能性の条件を満たすということは、定理に作図可能性が内在化していることを意味する。なお、この証明にも加法定理（和積公式）が絡んでくる。三角関数あるところに加法定理ありである。

7　おわりに

今回のテーマは、教育実習を来年行う数学科教育法受講生向けの講義と１年生の基礎数学（高校程度の数学）の三角比、三角関数の講義の資料からのものである。数実研の皆さんには旧聞に属するテーマかもしれない。というのも３０数年前、私も岩見沢東高校で教鞭を取っていた頃、今回の内容の一部を数学Ｉの授業で扱ったことがあった。

教師にとって三角関数の教材観をどう確立するかは大切なことである。無理数、直角三角形の性質として三平方の定理の復習から初めて三角比を導入し、一般角の三角関数まで拡張する授業の流れはアプローチが長い。途中に弧度法を入れると尚更である。多項式で表される関数の学習と一味違う所である。

周期性や加法定理などを抽出し、さらに複素数の世界へ向えば、形が異なる三角関数と指数関数がオイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ で結ばれてしまうのだから驚異である。今回の証明の背後でうごめく加法定理は、三角関数の奥深さを暗示している。

指数関数と三角関数の加法定理は結ばれる。

$$e^{i(a+b)}=\cos(a+b)+i\sin(a+b)=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)+i(\sin a\cos b+\cos a\sin b)$$
$$=(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)=e^{ia}e^{ib}$$

教材観を豊かにするため数学を深く知るようにと学生に言って聞かせる日々である。