

面積で導入する対数関数

林 雄 一 郎 (北海道情報大)

1 はじめに

高校数学の微積分は、極限、関数の連続、中間値の定理、平均値の定理、自然対数の底、原始関数を求める議論、区分求積による面積などで「…であることが知られている」「一般に…が成り立つ」と直観的に理解させるものとなっている。だから、極限の議論に必要な実数の性質（連続性の公理かデデキントの切断）と Cauchy の収束条件、 ε - δ テクノロジーなどは回避し、“直観的な理解”を促す。他方で、論理的思考力の急激な発達段階にある高校3年生には、論拠に基づき筋道立てた教え方も必要な場合があるであろう。

本稿では、指数・対数関数を取り上げてそれを体系的に扱うために、対数関数 $y = \log x$ を $y = \frac{1}{x}$ のグラフを用いた図形の面積で導入する方法⁽¹⁾を紹介する。この方法は、指数関数から対数関数という伝統から離れて、有理式を既知の関数と考え、その積分関数として生ずる新たな関数を考察することで対数関数が得られ、その逆関数として指数関数を求め、さらに一般の指数・対数関数を導く。

これは対数関数を直観的な面積に結び付けられるほか、底 e や実数の指数法則、微分の際のやっかいな問題を迂回し体系化できるメリットがある。また、関数 $\log x$ と関数 $\frac{1}{x}$ の関係を面積で捉えることは、定積分への準備となる。

さらに、 $\log(n+1)$ が、 $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = n+1$ で囲まれた図形の面積となることから $\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ という不等式が証明できる。

この式から $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$ さらに、 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$ とおくと

$$a_n > \log(n+1) - \log n > 0 \quad \frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) - \log n$$

$\therefore a_n > a_{n+1} > \dots > 0$ より $\{a_n\}$ は $\gamma = 0.57721566\dots$ (Euler 定数) に収束する。

2 指数関数、対数関数の微分を求める際の問題点

教科書では、次のいずれかの方法が採られている。

・指数関数の微分から対数関数の微分へ

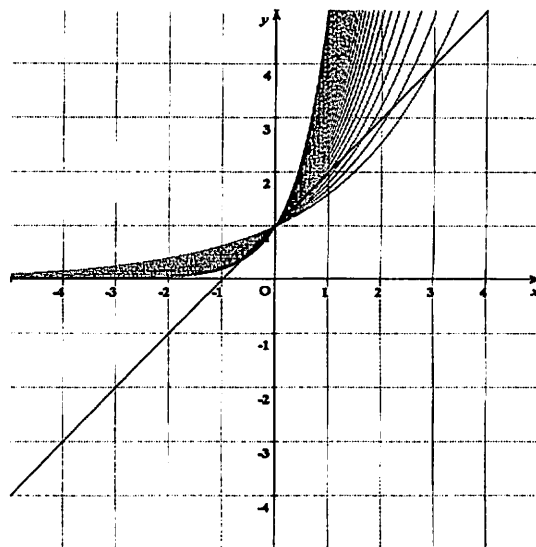
まず指数関数 e^x の導関数を求める。 $y = a^x$ のグラフで、 a をいろいろ変えたときの軌

跡を図形的に示し直観的に理解を促す。点(0,1)における接線の傾きが1になるときの底

a を頭ごなしに e と定める。これは $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \dots (*)$ を仮定したことになる。

(生徒：傾きが1になる接線は本当にあるのだろうか？また、(*)を考える意図が不明である。別に1でなく2になるような a の値を考えてもいいのではないか)

先に進めば(0, 1)における接線の傾きは $\log a$ であり、連続的に変化すれば中間値の定理で1となるからなるほどと分かるのだが・・・。



これから $(e^x)' = e^x$ $(\log x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$ 逆関数の微分公式から

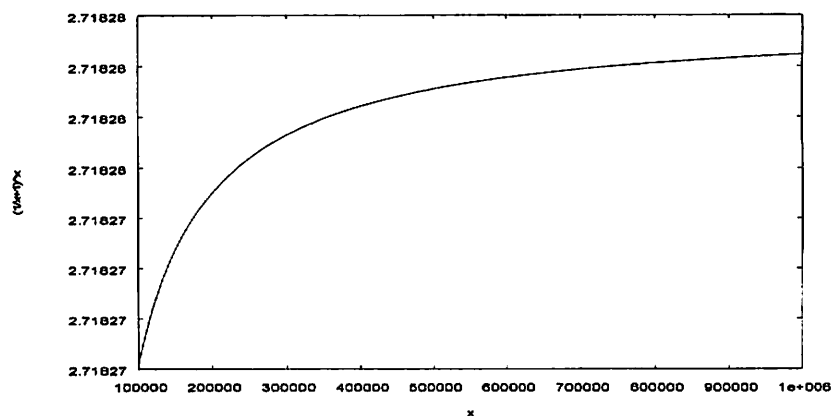
$(a^x)' = a^x \log a$ 他方 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ を順に導いて

いく。

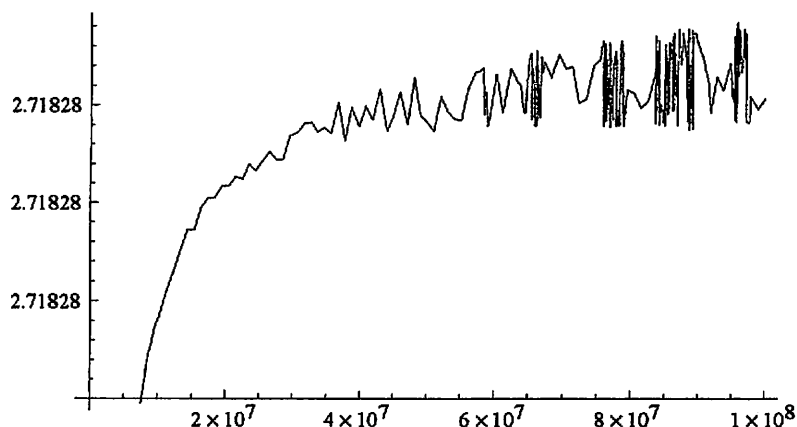
・対数関数の微分から指数関数の微分へ

まず、 $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e \dots (**)$ を数値的に示し直観的に認めさせる。ところで、

$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ のグラフを描くと下図の2つのようなになる。



(生徒：一定値にだんだん近づくように見えるが本当だろうか?)



(生徒：1億前後で激しく振動している。(**)の左辺は本当に収束するの?)
もし、グラフで視覚的に見ても(**)は疑問が残るならば、次のように説明してあげるしかないだろう。

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ は次第に項数が増えるから単調増加であり有界だから収束する。

実数の連続性という伝家の宝刀を抜く後味の悪さを味わう。「ずるい」という声!?
このあと教科書では

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{xh} \log_a(1+h) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a(1+h)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{x \log a} \end{aligned}$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (a^x)' = a^x \log a \quad (e^x)' = e^x \quad \text{は対数微分で導かれる。}$$

(注) (*) \Leftrightarrow (**)

$$e > 1, h > 0 \text{ なら } e^h > 1 \text{ なので } e^h = 1 + \frac{1}{t} \text{ とおく } h \rightarrow 0 \text{ ならば } t \rightarrow \infty$$

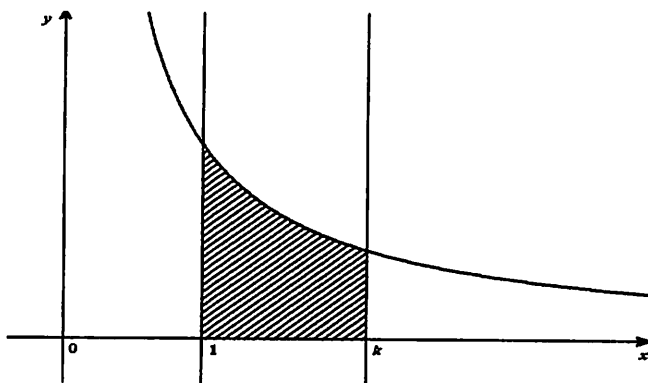
$$h = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) \quad \frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{t \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} \quad \text{から明らか。}$$

3 面積で表された関数と対数関数

三角関数が直角三角形という図形を使って導入されたように、対数関数もグラフで囲まれた図形の面積（不定積分）を使って導入するという思想である。

関数 $L(k)$ を、 $k > 1$ の場合は $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = k, y = 0$ で囲まれた面積値で定義する。

$0 < k < 1$ の場合は面積値にマイナスを付けた値とする。 $L(1) = 0$ が成り立つ。



$L(x+h) - L(x)$ の面積を、これを囲む長方形の面積で評価すると

$$h > 0 \text{ とすれば、 } h \cdot \frac{1}{x+h} < L(x+h) - L(x) < h \cdot \frac{1}{x} \quad \text{したがって}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \frac{1}{x} \quad h < 0 \text{ の場合も同様に成り立つ}$$

$$\text{したがって、関数 } L(x) \text{ は微分可能である。} \quad (L(x))' = \frac{1}{x}$$

$$\cdot L(x) \text{ には乗法定理が成り立つ} \quad L(ab) = L(a) + L(b)$$

$$\text{合成関数の微分法から } (L(ax))' = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

$$\text{したがって、} L(ax) = L(x) + c \quad x = 1 \text{ とすると } c = L(a)$$

(陰の声) 関数 $L(x)$ の正体は対数関数 $\log x$ である

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad \text{だから } L(x) = \log x + C \quad L(1) = \log 1 + C = C = 0 \quad \therefore L(x) \equiv \log x$$

これで対数関数の再定義ができた。以下、 $L(x)$ の代わりに $\log x$ の表記を使う

• $\log 1 = 0$

• 関数 $\log x$: 単調増加 $(\log x)' = \frac{1}{x} > 0$ より明らか。

• n : 整数、 $a > 0$ のとき $\log a^n = n \log a$

$n > 0$ のとき $n = 1$ は自明。 $n = k + 1$ のとき

$$\log a^{k+1} = \log a + \log a^k = \log a + k \log a = (k+1) \log a \quad \text{より成り立つ。}$$

$n < 0$ のとき $-n = m$ とおくと $\log a^m = m \log a$ から明らか。

• α を有理数、 $\log a^\alpha = \alpha \log a$

$$\alpha = \frac{n}{m} \text{ とすると、 } (a^\alpha)^m = (a^{n/m})^m = a^n \quad \log(a^\alpha)^m = m \log a^\alpha$$

$$\text{また } \log a^n = n \log a \quad \therefore m \log a^\alpha = n \log a$$

• 関数 $\log x$: すべての実数の値をとる 中間値の定理より明らか。

4 指数関数

対数関数 $\log x$ を使って指数関数 $\exp x$ を導入する。

• 関数 $\exp x$ の定義

$\log x$ は単調増加なので $1 : 1$ 、連続なので逆関数が存在する。それを指数関数 $\exp x$ と定義する。

$\log x$ の値域はすべての実数なので $\exp x$ の定義域もすべての実数。また、値域は正の実数となる。

$$\text{定義から } \exp(\log x) = x \quad \log 1 = 0 \quad \text{から } \exp 0 = 1$$

• 指数関数 $\exp x$ の加法定理 x, y : 実数 $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$

$$\exp x = a, \exp y = b \text{ とおけば } x + y = \log a + \log b = \log ab$$

$$\therefore \exp(x + y) = ab = \exp x \cdot \exp y \quad \text{任意の実数に加法定理が成り立つ!}$$

• 自然対数の底 $\exp 1 = e$ と定義する。これから $\log e = 1$ が導かれる。

$\log k$ の値は、曲線 $\frac{1}{x}$ と x 軸、 $x = 1, x = k$ で囲まれた面積値だから、これが 単位面積 1 となる場合の k が e である。これが e の正体! グラフから $2 < e < 4$ がわかる

• n が自然数のとき $\exp n = e^n \quad \exp(-n) = \frac{1}{e^n}$

$$\exp n = \exp 1 \cdot \exp 1 \cdots \exp 1 = e \cdot e \cdots e = e^n$$

$$1 = \exp(n-n) = \exp n \cdot \exp(-n) = e^n \cdot \exp(-n) \text{ より明らか。}$$

$$\cdot (\exp x)' = \exp x \quad \exp x = y \text{ とおくと } \log y = x \quad (\log y)' = \frac{1}{y}$$

$$\text{逆関数の導関数を求める} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = \exp x$$

• $\exp x$ を e^x と表記する。

$$\cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad e^x \text{ の導関数を定義に基づいて計算すると } \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$\text{他方、} (e^x)' = e^x \text{ が成り立つから } \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad 2 \text{ で述べた困難克服！}$$

5 一般の指数関数、対数関数

a を底とする指数関数を関数 $\exp x$ 、 $\log x$ の合成関数として導入する。

• a^x の定義

$$a > 0 \quad x \text{ は任意の実数} \quad a^x = \exp(x \log a) = e^{x \log a} \text{ と定義する。}$$

$$\cdot x, y \text{ は実数} \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad (a^x)^y = a^{xy}, (ab)^x = a^x \cdot b^x$$

実数について初等的には証明できない指数法則が成り立つ！

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \exp((x+y) \log a) = \exp(x \log a + y \log a) \\ &= \exp(x \log a) \cdot \exp(y \log a) = a^x \cdot a^y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{xy} &= \exp(xy \log a) = \exp(y(x \log a)) = \exp(y \log a^x) = \exp(\log (a^x)^y) \\ &= \exp \log (a^x)^y = (a^x)^y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ab)^x &= \exp(x \log ab) = \exp(x(\log a + \log b)) = \exp(x \log a) \cdot \exp(y \log b) \\ &= a^x \cdot b^x \end{aligned}$$

$$\cdot a^0 = 1 \quad a^0 = \exp(0 \log a) = \exp 0 = 1$$

$$\cdot (a^x)' = (\log a) a^x \quad x \log a = y \text{ とおくと } a^x = \exp y$$

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{d(\exp y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \exp y \cdot \log a = (\log a) a^x$$

$$\cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$$

左辺は、 $\log x$ の $x=1$ のときの微分係数の値 $(\log x)' = \frac{1}{x}$ から明らか。

$$\cdot \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{底 } e \text{ の別の正体！}$$

$$a > 0, b \text{ は実数ならば } a^b = \exp(b \log a) \quad \text{よって } b \log a = \log a^b$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \exp \log(1+h)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp \frac{\log(1+h)}{h} = \exp 1 = e$$

$$\text{他方 } \exp \log x = x \text{ だから } \exp \log(1+h)^{1/h} = (1+h)^{1/h}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e \quad h = \frac{1}{n} \text{ とおけば } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad 2 \text{ で述べた困難克服！}$$

• $\log_a x$ の定義

関数 $y = a^x$ の逆関数を、 a を底とする対数関数と定義し、 $y = \log_a x$ と表記。

$$\cdot \log x = \log_e x \quad y = \log x \text{ とおくと } \exp y = x \quad e^y = x \quad y = \log_e x$$

$$\cdot \log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \log_a x^k = k \log_a x \quad (\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$$

最後の公式は $a^x = b, b^y = c$ とおくと $c = (a^x)^y = a^{xy}$ $xy = \log_a c$ より成り立つ。

$$\cdot (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad \text{だから} \quad (\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{\log a} \cdot (\log x)' = \frac{1}{x \log a}$$

参考文献

(1) S.Lang: A First Course in Calculus (Four Edition)、Addison-Wesley Publishing Company、1980、p. 241-250