

# いろいろな面積の求め方とジョルダン測度

林 雄一郎 (北海道情報大)

## 1 はじめに

面積は、体積や個数など「大きさ」を表す量として古来関心が払われてきた。ところで、面積とは何か？積分を学ぶ際、図形面積について理解するのは有益であろう。馴染のある Riemann 積分は Jordan 測度に依拠している。本稿は、面積のいろいろな工夫による求め方を概観し、面積を抽象化した Jordan 測度の概念を紹介する。

## 2 取り尽くし法、区分求積法で求める

### (1) 半径 $r$ の円

円を中心で  $n$  等分に輪切りし、展開した扇形の図形に内接する三角形の一つ  $OPQ$  は、

$$\Delta OPQ = \frac{1}{2} r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad OP = OQ = r \quad \text{この面積の総和 } s(n) \text{ は}$$

$$s(n) = \frac{1}{2} n r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot \pi r^2 \quad \text{また、扇形に外接する三角形の総和は}$$

$$S(n) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot r = \frac{\pi r^2}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \quad s(n) \leq S \leq S(n)$$

$n \rightarrow \infty$  のとき、 $s(n), S(n)$  は

ともに  $\pi r^2$  に収束する。

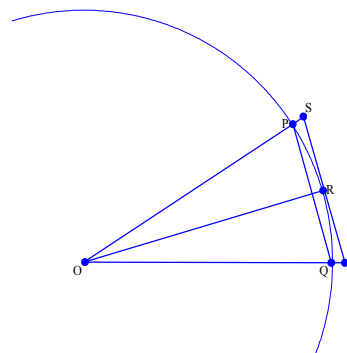
補足  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  の証明

円弧  $\widehat{PQ}$  を  $n$  等分し折れ線  $\sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i$  をつくる。

$$P_0 = P, P_n = Q$$

$$\angle POQ = x \text{ とおくと } P_{i-1}P_i = 2r \sin \frac{x}{2n} \quad \widehat{PQ} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nr \sin \frac{x}{2n} = rx$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}} = 1 \quad \frac{x}{2n} = \theta \text{ とおけば } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

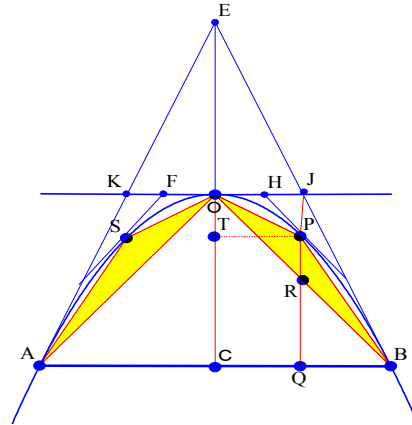


(2) 放物線を境界に持つ図形

Archimedes (287? ~212B.C.)の“取り尽くし法”で求める。これは内接・外接する三角形の和で近似していく方法である。放物線  $y = -x^2$  と線分  $AB$  に囲まれた図形の面積  $S$  を考える。

$$\Delta AOB = W \quad \text{とすれば} \quad S = \frac{4}{3}W \quad \text{となる}$$

2200 年も前にこのような方法が考案されたことに驚愕する。これ以後、中世の暗黒時代を経て 1500 年以上封印されていたのである。



まず、三角形  $OAB$  をベースに 2 つの内接三角形を考えこの面積を計算する。  
 $AB = a \quad OC = b$  とおく。  $AB$  を 4 等分した点  $Q$  を取り、垂線  $QP$  を立てる。

$$\Delta AOB = \frac{1}{2}ab = W \quad \text{ところで} \quad RQ = \frac{1}{2}b \quad CQ = \frac{a}{4} \quad OC = CB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} = b$$

$$OT = CQ^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 \quad RP = OC - (OT + RQ) = b - \left(\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \frac{b}{2}\right) = b - \left(\frac{b}{4} + \frac{b}{2}\right) = \frac{b}{4}$$

$$\Delta POB = \frac{1}{2} \cdot PR \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{16} \quad \Delta POB + \Delta SOA = \frac{ab}{8} = \frac{1}{4}W = W_1$$

次に、三角形  $POB, SOA$  をベースにして、4 つの内接三角形の面積の和を考える。

$$\text{同様の計算によって、} \quad W_2 = \frac{1}{4}\Delta POB + \frac{1}{4}\Delta SOA = \frac{1}{4}W_1 = \frac{1}{4^2}W \quad \text{を得る。}$$

$$\text{以下、} \quad \frac{1}{4^3}W, \frac{1}{4^4}W, \dots$$

$$\text{したがって、内側から内接する三角形の総和は} \quad W + \frac{1}{4}W + \frac{1}{4^2}W + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}W = \frac{4}{3}W$$

あるいは、“挟み撃ち”法でも求められる。点  $A$  での接線と  $EC$  との交点  $E$  をとれば、 $EO = CO$  となる。(放物線の性質!) よって  $\Delta EAB = 2\Delta OAB$  となる。

同様に考えれば、 $\Delta OBJ = 2\Delta POB$ 、 $\Delta OAK = 2\Delta SOA$  がいえる。

$$\Delta OAB + \Delta POB + \Delta SOA < S < \text{台形 } KABJ = \Delta OAB + \Delta OBJ + \Delta OAK$$

つまり  $W + W_1 < S < W + 2W_1 = W + W_1 + W_1$      $W_2 = \frac{1}{4}W_1 = \frac{1}{4^2}W$      $W_n = \frac{1}{4}W_{n+1}$

$W + W_1 + W_2 + \dots + W_n < S < W + W_1 + W_2 + \dots + W_n + W_n$

$$W \left( 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) < S < W \left( 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^n} \right)$$

$$\frac{4}{3}W \left( 1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) < S < \frac{4}{3}W \left( 1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) + \frac{W}{4^n} \quad \frac{-W}{3 \cdot 4^n} < S - \frac{4}{3}W < \frac{2W}{3 \cdot 4^n}$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $S \rightarrow \frac{4}{3}W$

### (3) 双曲線を境界に持つ図形

Brouncker (1620~1684) が考案した方法で、取り尽くし法で求める。

双曲線  $y = \frac{1}{x}$  と  $x = 1, x = 2, y = 0$

で囲まれた図形の面積を求める。

$1 \leq x \leq 2$  を 1 等分、 $2^1$  等分、 $2^2$  等分、 $\dots$  してできる長方形をそれぞれ  $F_1; F_2; F_3; F_4; \dots$  とする。

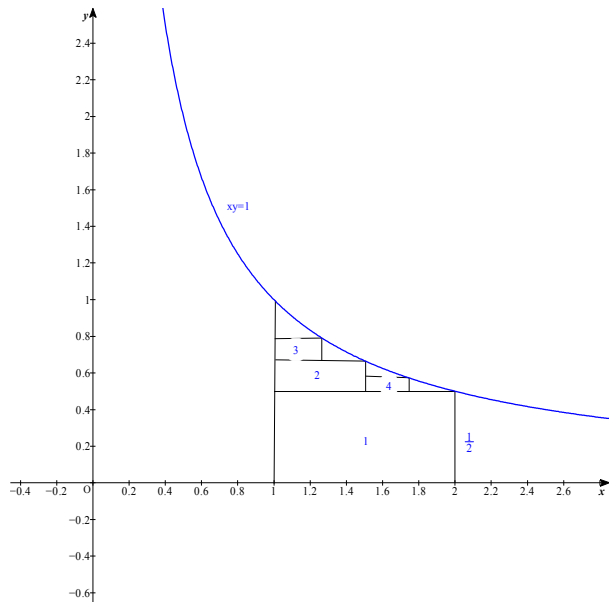
$F_1 = \frac{1}{2}$      $F_2$  は幅  $\frac{1}{2}$

高さ  $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$

$\therefore F_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3 \cdot 4}$

$F_3$  は幅が  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$     高さは  $\frac{1}{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 5}$      $\therefore F_3 = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5 \cdot 6}$

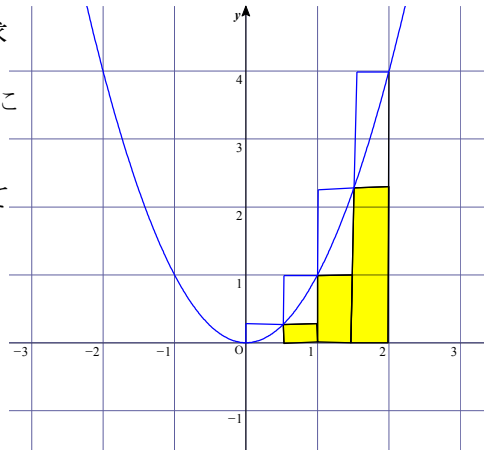
$F_4 = \frac{1}{7 \cdot 8}$     求める面積は  $F_1 + F_2 + F_3 + \dots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots = \log 2 = 0.69315 \dots$



### (4) 放物線で囲まれた図形

16 世紀になって、Galileo (1564~1642) の弟子 Cavalieri (1598~1647) は区分求積法を考案した。これは取り尽くし法の自然な延長である。

$y = x^2, x = 2, y = 0$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めるのに、区間  $[1, 2]$  を  $n$  等分し、面積を  $n$  個に分けた区間  $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$  での長方形をベースにして面積  $S(k)$  を不等式で表す。



区間の左端で最小、右端で最大となるから

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq S(k) \leq \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k+1}{n}\right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} S(k) = S \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{k+1}{n}\right)^2 \quad \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \leq S \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6} \leq S \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき } S \rightarrow \frac{1}{3} \text{ となる。}$$

区積分積法の考え方は、“線は無限個の点からなり、面は無限個の線よりなる縦線集合、立体は無限個の面からなる” というものである。この考え方から、Cavarieli の原理「二つの平面図形を一定方向に平行線で切り取るとき、一つの平行線が二つの図形から切り取られる部分の長さがつねに同じならば、二つの図形の面積は等しい。」を提唱した。

(5) (4) の一般化として  $y = x^k (k \neq -1), x = 2, x$  軸で囲まれた図形

これを Fermat (1601~1665) の方法で求める。  $0 < \rho < 1$  として、区間  $[0, 2]$  から左に  $2, 2\rho, 2\rho^2, 2\rho^3, \dots, 2\rho^n, \dots$  と等比数列の分点をとる。分点で垂線を立て、長方形をつくる。右端の内接長方形の面積は  $(2 - 2\rho)(2\rho)^k = 2^{k+1} \rho^k (1 - \rho)$

次の左の長方形、またさらに次の長方形・・・の面積は以下のようなになる。

$$(2\rho - 2\rho^2)(2\rho^2)^k = 2^{k+1} \rho^{2k+1} (1 - \rho)$$

$$(2\rho^2 - 2\rho^3)(2\rho^3)^k = 2^{k+1} \rho^{3k+2} (1 - \rho), \dots$$

$$(2\rho^{n-1} - 2\rho^n)(2\rho^n)^k = 2^{k+1} \rho^{nk+n-1} (1 - \rho), \dots$$

辺々加えた無限和を考える。

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{k+1} \rho^{nk+n-1} (1-\rho) = 2^{k+1} (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} (\rho^{k+1})^n \rho^{-1} = 2^{k+1} (1-\rho) \frac{\rho^k}{1-\rho^{k+1}}$$

分割を次第に細かくするため  $\rho \rightarrow 1$  とする。

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} 2^{k+1} (1-\rho) \frac{\rho^k}{1-\rho^{k+1}} = 2^{k+1} \lim_{\rho \rightarrow 1} \rho^k \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{\left( \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} \right)} = \frac{2^{k+1}}{k+1}$$

次に、外側からの外接長方形の和を求める。

$$(2-2\rho)2^k = 2^{k+1}(1-\rho), (2\rho-2\rho^2)(2\rho)^k = 2^{k+1}\rho^k(1-\rho), \dots$$

$$(2\rho^{n-1}-2\rho^n)(2\rho^{n-1})^k = 2^{k+1}\rho^{nk+n-k-1}(1-\rho), \dots \quad \text{辺々加えた無限和は}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{k+1}\rho^{nk+n-k-1}(1-\rho) = 2^{k+1}(1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} (\rho^{k+1})^n \rho^{-k-1} = 2^{k+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = 2^{k+1} \cdot \frac{1}{\frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}}$$

$\rho \rightarrow 1$  とすると、上式は  $\frac{2^{k+1}}{k+1}$  に収束する。この値が面積となる。

### 3 ジョルダン測度

2で述べた求積法は、曲線に外接（内接）する重なりのない長方形（三角形）の有限個の和を求め、その極限值を面積とした。Jordan（1838~1922）は面積を抽象化した測度という概念を考えた。外接、内接する長方形の有限個の和の下限、上限をそれぞれ外測度、内測度とし、それが一致するときその値をジョルダン測度という。区分求積法で面積が測れる図形をジョルダン可測であるという。ジョルダン測度  $J$  はジョルダン可測な集合に定義され非負実数値を対応させる集合関数であり、次の2つを満たす。

$$(1) \quad J(A) \geq 0 \quad A \subset R \times R \quad \phi \text{ が空集合のとき } J(\phi) = 0$$

$$(2) \quad A \cap B = \phi \text{ ならば、 } J(A \cup B) = J(A) + J(B) \quad (\text{有限加法性})$$

この2つが、「面積とは何か？」の答えである。ただし、ジョルダン可測でない点集合、例えば、 $[0,1]$  の有理点の集合  $A$  の外測度は1、内測度は0となる。Lebesgue(1875~1941) はルベーグ測度論をベースにしたルベーグ積分論を確立した。  $A$  のルベーグ測度は0である。

### 4 疑似乱数を用いる

正方形領域  $F = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  を考え、これを曲線  $y = x^2$  で2つの領域（正領域、負領域）に分ける。この領域  $F$  に無作為に  $N$  個の点を落とすと、領域の面積の大きさに比例して、一様に分布する。領域  $F'$ （面積も  $F'$  と表記）に落ちる標本点の個数を  $f$  とすれば、 $F : F' = N : f$  これから  $F' = \frac{f}{N} \cdot F$  これを用いて面積を“測る”ことができる。

無作為に点を取るには、乱数サイコロまたは疑似乱数を利用する。

そこで、負領域  $y = x^2, x = 1, x$  軸で囲まれた面積を求めることにする。

まず、乱数サイコロの利用から述べる。乱数サイは正20面体の表面に0から9までの数が2つずつ記してある。これを2個投げて、出た目を  $a, b$  とすると小数  $0.ab$  が定まる。

これを  $x$  座標とする。同様に、 $y$  座標  $0.cd$  を求めれば点  $(0.ab, 0.cd)$  が決まる。

こうして正方形  $F$  内に点を  $N$  個ランダムに定め、負領域

$\{(x, y) | y \leq x^2\}$  に落ちた点の個数

が  $f$  個とすれば、求める面積は

$\left(\frac{f}{N}\right) \times (\text{正方形の面積})$  だから、

$N = 20$  として計算する。疑似乱数を使って求めるには EXCELL の RAND() を各セルにセットし負領域に入る点の個数を求めて面積を計算する。

### 5 面積計で求める

面積計（プランメータ）（写真）は複雑な曲線図形の面積を計測する機械である。機械はトレースポイント、積分車、支点（極点）の3つから構成されており、トレースポイントで図形の外周をなぞることによって積分車が回転し面積値を表示する仕組みである。なぞる際の測定誤差対策として、何回か試行してその平均を取ることになる。乱数を使った値とほぼ同じ値が出ていた。この面積計の原理は線積分の考えを使っている。

	x	y	x二乗	y-x^2	
1	0.73	0.38	0.5329	-0.1529	1
2	0.03	0.99	0.0009	0.9891	
3	0.72	0.64	0.5184	0.1216	
4	0.93	0.18	0.8649	-0.6849	1
5	0.03	0.64	0.0009	0.6391	
6	0.47	0.66	0.2209	0.4391	
7	0.73	0.21	0.5329	-0.3229	1
8	0.49	0.88	0.2401	0.6399	
9	0.55	0.48	0.3025	0.1775	
10	0.8	0.56	0.64	-0.08	1
11	0.3	0.33	0.09	0.24	
12	0.97	0.34	0.9409	-0.6009	1
13	0.96	0	0.9216	-0.9216	1
14	0.03	0.74	0.0009	0.7391	
15	0.64	0.87	0.4096	0.4604	
16	0.69	0.84	0.4761	0.3639	
17	0.63	0.08	0.3969	-0.3169	1
18	0.68	0.82	0.4624	0.3576	
19	0.75	0.6	0.5625	0.0375	
20	0.81	0.83	0.6561	0.1739	
負領域の点の個数					7
面積					0.35

