06. 9.15

私 の 数 学 散 歩 道 (3)

My Path in Mathematics

～新作問題と解答：等式、方程式、不等式篇～

横浜市 西区　村田　洋一

以下 自分なりに作成した方程式、不等式などを 新作問題として取り上げた。中には不自然に感じる問題もあると思うが、ご宥恕のほどお願い致したい。

構成は前回同様最初に（問題篇）とし 7 題全部を一覧で示し、次に（解答篇）として問題と解答（一部に「別解」を含む）を問題の掲載順序で載せている。

1. 問題篇

問題 1. 次の方程式を解け。

(1)　$x^2+\dfrac{4(x+2)^2}{(x-2)^2}=52$　　(2)　$\sin^2(\alpha+\dfrac{\pi}{12})+\sin^2(\alpha-\dfrac{\pi}{3})=1$　（ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ）

(3)　$\sin^3 x+\cos^3 x=1/\sqrt{2}$（$0<x<\pi/2$）

(4)　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$（$0<x<\pi/2$）

(5)　$\cos 4\theta-6\cos 3\theta+17\cos 2\theta-30\cos\theta+18=0$　（$0<x<\pi/2$）

(6)　$\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{2-x}=1$

(7)　$5x-3[x]=9$　（ $[x]$ はガウスの記号で x を超えない最大の整数を表わす

(8)　$x^2+y^2=13$・・・①　　$x^3+y^3=35$・・・②　のすべての解の組を求めよ。

(9)　$3\cdot 2^{n-1}+a=27$・・・①　$5^n-7a=604$・・・②（n は自然数 ）

(10)　微分方程式　$y-y'-e^{-x}+2=0$　を解け。但し $y(0)=-1$ とする。

(11)　次の連立方程式のすべての解の組を求めよ。

$x-2y^2+z^2=-2$　　・・・ ①

$2xy^2+2y^2z^2-z^2x=7$　　・・・ ②

$xy^2z^2=2$　　・・・ ③

(12)　方程式 $\log_2(-x^2+4x+12)=2x$ の実数解を求めよ。

解が小数になる場合は関数電卓を用い、小数第 2 位まで正確に計算せよ

問題 2.　次の等式が成り立つことを証明せよ。

$x^2+y^2=1$ のとき　$\dfrac{16y^4-20y^2+5}{16x^4-20x^2+5}=\dfrac{5x^4-10x^2y^2+y^4}{x^4-10x^2y^2+5y^4}$

問題 3. 無限級数　S= $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+$・・・・・について

(1)　$\dfrac{3}{2}<S<2$ であることを示せ。

(2)　k を正の整数として $S=\dfrac{\pi^2}{k}$ であることが知られている。k の値を推定し求めよ。

但し、数学的に厳密な論証は不要で、電卓の使用は可とする。

問題 4. 次の不等式を解け。また(3) については証明せよ。

(1)　$\log_2\left\{\ \log_x(3x-1)+\log_x(3-x)\ \right\}<1$

(2)　$\sqrt{2+x-2x^2-x^3}>x+1$

(3)　$16x^5-20x^3+5x\geq -1$　（ $x\geq 0$）

問題 5. $\tan 3\theta, \tan 5\theta$ を $\tan\theta$ で表わし、その結果を利用し $\tan\dfrac{\pi}{20}$ の値を求めよ。

問題 6. 次の不定方程式の整数解を求めよ。

(1)　$xy(x-y)=2xy+3x-3y-6$

(2)　$x^2y-xy^2=x-y+5$

(3)　$x^4y^2-(y^4+1)x^2+y^2=9$

問題 7.　$x=2,\quad x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{5}$ は次の方程式の解であることを示せ。

$\log_{x^2}(6-x)+\log_x(x-1)=1$　・・・・・（＊）

2．解答篇

問題 1. 次の方程式を解け。

(1) $x^2+\dfrac{4(x+2)^2}{(x-2)^2}=52$　まず $x\neq 2$　左辺第 2 項が平方式であることに着目して

$y=\dfrac{2(x+2)}{x-2}$・・① とおくと　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=52$・・②

①より $xy-2(x+y)-4=0$　②から $xy=\dfrac{1}{2}(x+y)^2-26$　これを前の式に代入

$(x+y)^2-4(x+y)-60=0$　これから　$x+y=10,\ -6$

$x+y=10$　のとき　$xy=24$　　$\therefore$　$(x,y)=(6,4),(4,6)$

$x+y=-6$　のとき　$xy=-8$　　$\therefore$　$(x,y)=(-3\pm\sqrt{17},-3\mp\sqrt{17})$

これらは分母を 0 にしないから解である。

（答）$(x,y)=(6,4),(4,6),(-3\pm\sqrt{17},-3\mp\sqrt{17})$

注）分母を払い展開し　$x^4-4x^3-44x^2+224x-192=0$　で
$f(x)=x^4-4x^3-4\cdot 11x^2+4^2\cdot 14x-4^3\cdot 3=0$ から　$f(4)=0$ or $f(6)=0$
ともできるが、因数を見つけるのが一般に困難である。

(2) $\sin^2(\alpha+\dfrac{\pi}{12})+\sin^2(\alpha-\dfrac{\pi}{3})=1$　$(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$

三角関数の冪公式から　$\dfrac{1}{2}\{\ 1-\cos(2\alpha+\pi/6)\ \}+\dfrac{1}{2}\{\ 1-\cos(2\alpha-2\pi/3)\ \}=1$

$\cos(2\alpha-\dfrac{2\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha$ より　$\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)=0$

$\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=\sqrt{2}\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})=0$　から　$2\alpha+\dfrac{\pi}{4}=\pi$　　$\alpha=\dfrac{3}{8}\pi$　（答）

別解-1)　左辺第 1 項、第 2 項を加法定理で展開後 平方して

$$\sin^2\alpha(1-\sin^2\frac{\pi}{12})+\cos^2\alpha\sin^2\frac{\pi}{12}+2\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$+\frac{1}{4}\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha=1$$

$$\frac{5}{4}\sin^2\alpha+\sin^2\frac{\pi}{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha=1$$

$\sin^2\frac{\pi}{12}=(1-\cos\frac{\pi}{6})/2=(2-\sqrt{3})/4$ を代入、項別に整理して

$$\frac{5}{4}\sin^2\alpha+\frac{2-\sqrt{3}}{4}(1-2\sin^2\alpha)+\frac{3}{4}(1-\sin^2\alpha)+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha=1$$

$$(\frac{5-3}{4}-\frac{2-\sqrt{3}}{2})\sin^2\alpha+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{3+(2-\sqrt{3})}{4}-1=0$$

$2\sin^2\alpha-1-2\sin\alpha\cos\alpha=-(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)=0$ から

$\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=\sqrt{2}\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=0$　以下同様に　　　$\alpha=\frac{3}{8}\pi$

別解-2）$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ となる t を見つければよい。

$\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\cos\{\frac{\pi}{2}-(\alpha-\frac{\pi}{3})\}=\cos(\frac{5}{6}\pi-\alpha)$ だから

$\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{12})+\cos^2(\frac{5}{6}\pi-\alpha)=1$　ここで $t=\alpha+\frac{\pi}{12}=\frac{5}{6}\pi-\alpha$ また

$t=\alpha+\frac{\pi}{12}=-(\frac{5}{6}\pi-\alpha)$ であるが後者の（－）は不適で（+)から $\alpha=\frac{3}{8}\pi$

従って　$t=\frac{11}{24}\pi$ に決まる。　　　　　　　　　$\alpha=\frac{3}{8}\pi$

(3)　$\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{\sqrt{2}}$（$0<x<\frac{\pi}{2}$）

$\sin x+\cos x=t$ とおくと $0<x<\frac{\pi}{2}$ より $1<t<\sqrt{2}$　また $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

与式から　$(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=t(1-\frac{t^2-1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}$

これから　$t^3-3t+\sqrt{2}=(t-\sqrt{2})(t^2+\sqrt{2}t-1)=0$　　$t=\sqrt{2}$、$\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$

変域より $t=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ は不適、また $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}<\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}<1$

より $t=\sqrt{2}$ のみ適する、

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ より $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$　$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ より $x=\frac{\pi}{4}$　(答)

(4)　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$（$0<x<\frac{\pi}{2}$）

和を積に変形　$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x$

$\sin 2x(2\cos x+1)-\cos 2x(2\cos x+1)=0$

$(\sin 2x-\cos 2x)(2\cos x+1)=0$　　$\cos x=-1/2$ の時 $0<x<\pi/2$ より解なし

$\sin 2x-\cos 2x=0$ より $\sqrt{2}\sin(2x-\pi/4)=0$　$-\pi/4<2x-\pi/4<3\pi/4$ から

$2x-\dfrac{\pi}{4}=0$　のみで　$x=\dfrac{\pi}{8}$　　　　　　　　（答） $x=\dfrac{\pi}{8}$

(5)　$\cos 4\theta-6\cos 3\theta+17\cos 2\theta-30\cos\theta+18=0$　（ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ）

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ から $\cos 4\theta=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ であるから、これらを代入して

$8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1-6(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+17(2\cos^2\theta-1)-30\cos\theta+18=0$

整理して　$4\cos^4\theta-12\cos^3\theta+13\cos^2\theta-6\cos\theta+1=0$

因数分解して　$(2\cos\theta-1)^2(\cos x-1)^2=0$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$　より　$0<\cos\theta<1$　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　$x=\dfrac{\pi}{3}$　　　　（答） $x=\dfrac{\pi}{3}$

(6)　$\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{2-x}=1$

$\sqrt[3]{5+x}=\alpha$　$\sqrt[3]{2-x}=\beta$ とおく　　α，β に変域なし

$\alpha+\beta=1$，$\alpha^3+\beta^3=(5+x)-(2-x)=7$

$\beta=1-\alpha$ より $\alpha^3+(1-\alpha)^3=7$ これから $\alpha^2-\alpha-2=(\alpha-2)(\alpha+1)=0$

$\alpha=2,-1$　$\sqrt[3]{5+x}=2,-1$ から　$x=3,-6$　　　　　　$x=3,-6$（答）

別解-1)　$\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt[3]{5+x}$　として両辺を 3 乗して

$2-x=1-(5+x)-3\sqrt[3]{5+x}+3\sqrt[3]{(5+x)^2}$　　$\sqrt[3]{(5+x)^2}-\sqrt[3]{5+x}-2=0$

$\sqrt[3]{5+x}=t$　として $(t-2)(t+1)=0$　同様に $\sqrt[3]{5+x}=2,-1$ から　$x=3,-6$

別解-2)　原方程式の両辺をそのまま 3 乗して

$7+3\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{2-x}(\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{2-x})=1$　から　$\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{2-x}=-2$

$(5+x)(2-x)=-8$　より　$x=3,-6$

別解-3) $\sqrt[3]{5+x}=n$ ・・①, $\sqrt[3]{2-x}=1-n$ ・・② とおいて $x=n^3-5$

②へ代入、整理　$\sqrt[3]{7-n^3}=1-n$ これから $n=2,-1$　∴　$x=3,-6$

(7)　$5x-3[x]=9$　（ $[x]$ はガウスの記号で x を超えない最大の整数を表わす ）

$[x]<x$ より　$9=5x-3[x]>2x$ から $x<9/2$　（$\because$　$x-1\leq[x]<x$ ）

また　$[x]\geq x-1$　より　同様にして　$2x-6\geq 0$ から　$x\geq 3$

従って $3\leq x<\dfrac{9}{2}$ から　$[x]=3$、4

$[x]=3$ のとき　$5x-9=9$　$x=18/5$

$[x]=4$ のとき　$5x-12=9$　$x=21/5$　（答） $x=\dfrac{18}{5},\dfrac{21}{5}$

(8)　$x^2+y^2=13$・・・①　$x^3+y^3=35$・・・②　のすべての解の組を求めよ。

①, ②を x、y についての基本対称式で表わす

$(x+y)^2-2xy=13,\quad (x+y)^3-3xy(x+y)=35$

$x+y=a,\ \ xy=b$ として $a^2-2b=13$　これから $b=\dfrac{a^2-13}{2}$・・・③

また　$a^3-3ab=35$ に③を代入, 整理して　$a^3-39a+70=0$

因数分解して　$(a-2)(a-5)(a+7)=0$　$a=2$　のとき　$b=-\dfrac{9}{2}$

これから　$x+y=2$　$xy=-\dfrac{9}{2}$ を二根とする二次方程式は $2t^2-4t-9=0$

$t=\dfrac{2\pm\sqrt{22}}{2}$　従って　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{22}}{2},\quad y=\dfrac{2\mp\sqrt{22}}{2}$ （複号同順）

同様に　$a=5$　のとき　$b=6$　$x=2,3$　$y=3,2$

$a=-7$　のとき　$b=18$　$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{23}i}{2},\quad y=\dfrac{-7\mp\sqrt{23}i}{2}$ （複号同順）

（答）（$x,y)=(2,3),(3,2),(\dfrac{2\pm\sqrt{22}}{2},\ \dfrac{2\mp\sqrt{22}}{2}),(\dfrac{-7\pm\sqrt{23}i}{2},\dfrac{-7\mp\sqrt{23}i}{2})$

（複号同順）

(9)　$3\cdot 2^{n-1}+a=27$・・・①　$5^n-7a=604$・・・②（n は自然数 ）

①より　$2(a-27)=-3\cdot 2^n<0$　これから　$a<27$

②より　$7a+604=5^n$　辺々掛けて　$(2a-54)(7a+604)=-3\cdot 10^n$

整理して　$14a^2+830a+3\cdot 10^n-32{,}616=0$

ここで　$D/4=415^2-14(3\cdot 10^n-32{,}616)=628{,}849-42\cdot 10^n>0$

$14{,}972.6-10^n>0$　n は自然数であるから $1\leq n\leq 4$

$n=4$ のとき　①より　$a=3$　このとき②は成り立つ

$n=1,2,3$ のとき　$a=24,21,15$　であるが、すべて ②を満たさない。

$(n,a)=(4,3)$　（答）

別解）　①と②から a を消去して　$21\cdot 2^{n-1}+5^n=793$　移項して左辺＞0 より

$21\cdot 2^{n-1}=793-5^n>0$　n は自然数より $1\le n\le 4$　以下同様

(10)　微分方程式　$y-y'-e^{-x}+2=0$　を解け。但し $y(0)=-1$ とする。

一階線形常微分方程式 $y'+P(x)y=Q(x)$ において $P(x)=-1, Q(x)=2-e^{-x}$

であるから　$y=e^{\int dx}\left\{\int e^{-\int dx}(2-e^{-x})dx+C\right\}=e^x(-2e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+C)$

$y(0)=-1$ より　$C=1/2$　　（答）$y=(e^x+e^{-x})/2$ —2（$=\cosh x-2$）

(11)　次の連立方程式のすべての解の組を求めよ。

$x-2y^2+z^2=-2$　・・・①

$2xy^2+2y^2z^2-z^2x=7$　・・・②

$xy^2z^2=2$　・・・③

式の形から $x=a$, $-2y^2=b$, $z^2=c$ とおくと

$a+b+c=-2$

$-ab-bc-ca=7$ より　$ab+bc+ca=-7$

$abc=-2xy^2z^2$　より　$abc=-4$

a,b,c　を三根とする 3 次方程式は

$t^3+2t^2-7t+4=(t-1)^2(t+4)=0$　から　$t=1,\ 1,\ -4$

∴ $a=x$	$=1$	1	-4	$x=$ 1	-4	1
$b=-2y^2$	$=1$	-4	1	$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$	$\pm\sqrt{2}$
$c=z^2$	$=-4$	1	1	$z=$ $\pm 2i$	± 1	± 1

（複号不同）　y の複号の＋に対し z の複号の+,－；同－に対し同+,－の 4 組の解があるから、合計で 12 組すべてが解となる。　（答）

(12)　方程式 $\log_2(-x^2+4x+12)=2x$ の実数解を求めよ。

解が小数になる場合は関数電卓を用い、小数第 2 位まで正確に計算せよ

解）　真数＞0 より　$-x^2+4x+12=-(x-6)(x+2)>0$　∴　$-2<x<6$

$\log_2(-x^2+4x+12)=2x$　より　$2^{2x}=-x^2+4x+12=-(x-2)^2+16$

$4^x=-(x-2)^2+16$・・・(*) より $x=2$ のとき $4^2=16$ で $x=2$ が解

グラフで考えると (*) は $-2<x<6$ の上に凸な放物線で (2,16) で最大値をとる。　指数関数　4^x　は　(0,1) を通る右上がりの曲線で、両曲線のもう一つの交点は $x=-2\,(+0)$ の近傍である。（グラフ：略）

代数的な解法は不可能なので、数値を代入して確認していく。

$x=-1.9$ のとき　　$4^{-1.9}=0.07179$　　$-x^2+4x+12=0.79$

差が相当あるので $x=-1.99$ とする。その後、逐次推定し代入

$x=-1.99\to$　　(*)の左辺＝0.06337　(*)の右辺＝0.0799

$x=-1.991\to$　　〃　0.06328　〃　0.07192

$x=-1.992\to$　　〃　0.06319　〃　0.06393

$x=-1.993\to$　　〃　0.06311　〃　0.05595

$x=-1.992$ まで 左辺＞右辺が、$x=-1.993$ で逆転している。

従って方程式の解は　$-1.993<x<-1.992$　で $x=-1.99$ が解

$x=2$　$x=-1.99$（答）

問題　2.　次の等式が成り立つことを証明せよ。

$x^2+y^2=1$ のとき　$$\frac{16y^4-20y^2+5}{16x^4-20x^2+5}=\frac{5x^4-10x^2y^2+y^4}{x^4-10x^2y^2+5y^4}$$

[証明]　右辺＝$\dfrac{5x^4-10x^2y^2+y^4}{x^4-10x^2y^2+5y^4}=\dfrac{4x^4-12x^2y^2+1}{4y^4-12x^2y^2+1}$　$(\because x^4+y^4=1-2x^2y^2)$

従って証明すべき式は　$\dfrac{16y^4-20y^2+5}{16x^4-20x^2+5}=\dfrac{4x^4-12x^2y^2+1}{4y^4-12x^2y^2+1}$　となる。

$\therefore\ P=(16x^4-20x^2+5)(4x^4-12x^2y^2+1)$
$-(16y^4-20y^2+5)(4y^4-12x^2y^2+1)=0$　を示せばよい。

$$P=64(x^8-y^8)-192x^2y^2(x^4-y^4)+16(x^4-y^4)-80(x^6-y^6)+240x^2y^2\times(x^2-y^2)-20(x^2-y^2)+20(x^4-y^4)$$
$$=4(x^2-y^2)\left\{16(x^2+y^2)(x^4+y^4)-48x^2y^2(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)-20(x^4+x^2y^2+y^4)+60x^2y^2-5+5(x^2+y^2)\right\}$$

ここで　$x^2+y^2=1$　であるから

$$P=4(x^2-y^2)\left\{16(x^4+y^4)-48x^2y^2+4-20(x^4+x^2y^2+y^4)+60x^2y^2\right\}$$
$$=16(x^2-y^2)\left\{4(x^4+y^4)-12x^2y^2+1-5(x^4+x^2y^2+y^4)+15x^2y^2\right\}$$
$$=16(x^2-y^2)(-x^4-2x^2y^2-y^4+1)$$
$$=16(x^2-y^2)\left\{1-(x^2+y^2)^2\right\}=0$$

であるから　等式　$\dfrac{16y^4-20y^2+5}{16x^4-20x^2+5}=\dfrac{5x^4-10x^2y^2+y^4}{x^4-10x^2y^2+5y^4}$　が成り立つ。

Q.E.D

別解）　$x^2+y^2=1$ より　$x=\cos\theta$，　$y=\sin\theta$ とおける。

証明すべき式は $$\frac{16\sin^4\theta-20\sin^2\theta+5}{16\cos^4\theta-20\cos^2\theta+5}=\frac{5\cos^4\theta-10\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta}{\cos^4\theta-10\cos^2\theta\sin^2\theta+5\sin^4\theta}$$

この右辺は　$\dfrac{5(1-\sin^2\theta)^2-10\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)+\sin^4\theta}{\cos^4\theta-10\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+5(1-\cos^2\theta)^2}$

$=\dfrac{16\sin^4\theta-20\sin^2\theta+5}{16\cos^4\theta-20\cos^2\theta+5}$　　元に戻して

$\dfrac{16y^4-20y^2+5}{16x^4-20x^2+5}=\dfrac{5x^4-10x^2y^2+y^4}{x^4-10x^2y^2+5y^4}$　が成り立つ。

Q.E.D

問題 3.　無限級数　S= $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+$・・・・について

(1)　$\dfrac{3}{2}<S<2$　であることを示せ。

(2)　k を正の整数として $S=\dfrac{\pi^2}{k}$　であることが知られている。k の値を推定し求めよ。

但し、数学的に厳密な論証は不要で、電卓の使用は可とする。

解）

(1)　n 項までの和を　S_n とし　S_n-1 で n　を $n(n-1)$ 、$n(n+1)$　に置き換えると

$\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\cdots S-1\cdot+\dfrac{1}{n(n+1)}<S_n-1<\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdot+\dfrac{1}{n(n-1)}$

第 1 項、第 3 項を部分分数に分解して

第 1 項$=\displaystyle\sum_{n=2}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$　、第 3 項$=\displaystyle\sum_{n=2}^{n}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}$

∴　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}<S_n-1<\quad 1-\dfrac{1}{n}$　　　$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}<S_n<2-\dfrac{1}{n}$　・・・①

ここで　①の $n\to\infty$ の極限値をとって　$\dfrac{3}{2}<S<2$　　　　Q.E.D

(2)　(1)の結果と合わせ　$\dfrac{3}{2}<\dfrac{\pi^2}{k}<2$

π＝3.14 として　π^2＝9.86　　$3k<2\pi^2$ 、$k>\dfrac{\pi^2}{2}$ から　4.93＜ k ＜6.57

k は整数より　k=5 のとき　S ＝1.972、　k=6 のとき　S ＝1.643

k の値を定めるため、5 項ずつの累計和をとってみる。

$S_5=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}$=1.4636

同様に　S_{10}＝1.5497、S_{15}=1.5803、S_{20}=1.5961、S_{25}=1.6057・・・・と、

急速に収束していく。このことから　k=6 と推定される。　　（答）　k=6

問題 4. 次の不等式を解け。また(3) については証明せよ。

(1) $\log_2\left\{\ \log_x(3x-1)+\log_x(3-x)\ \right\}<1$

いま $\{\ \}$ 内を α とすると α は真数で $\alpha>0$、かつ $\log_2\alpha<\log_2 2$ とあわせ

$0<\alpha<2$　対数の性質から　$x>0$, $x\neq1$,　$3x-1>0$,　$3-x>0$

これから　$1/3<x<1$,　$1<x<3$　・・・①

$0<\alpha<2$　より　$\log_x 1<\log_x(3x-1)(3-x)<\log_x x^2$　・・・②

1) ②で $x>1$, ①とあわせて $1<x<3$　のとき

$1<(3x-1)(3-x)<x^2$

右の不等式から　$4x^2-10x+3>0$　$x>(5+\sqrt{13})/4$　$x<(5-\sqrt{13})/4$

左の不等式から　$3x^2-10x+4<0$　　$(5-\sqrt{13})/3<x<(5+\sqrt{13})/3$

これらをあわせて　$\dfrac{5+\sqrt{13}}{4}<x<\dfrac{5+\sqrt{13}}{3}$　・・・③

2) ②で $0<x<1$, ①とあわせて $1/3<x<1$　のとき

$x^2<(3x-1)(3-x)<1$

右の不等式から　$3x^2-10x+4>0$　$x>(5+\sqrt{13})/3$　$x<(5-\sqrt{13})/3$

左の不等式から　$4x^2-10x+3<0$　　$(5-\sqrt{13})/4<x<(5+\sqrt{13})/4$

これらをあわせて　$\dfrac{5-\sqrt{13}}{4}<x<\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}$　・・・④

③、④　に共通部分はないから各々が解となる。

$$\frac{5+\sqrt{13}}{4}<x<\frac{5+\sqrt{13}}{3},\quad \frac{5-\sqrt{13}}{4}<x<\frac{5-\sqrt{13}}{3}$$ （答）

(2) $\sqrt{2+x-2x^2-x^3}>x+1$

根号内 ≥0　であるから　$x^3+2x^2-x-2\leq0$ より　$-1\leq x\leq1$,　$x\leq-2$

右辺は $x+1$ であるが $-1\leq x\leq1$ より　$x+1\geq0$　・・・①

$x\leq-2$ から $x+1\leq-1$ で、この時は与えられた不等式は常に成り立つ。・・・②

従って　①より $-1\leq x\leq1$ のとき、両辺 ≥0 であるから平方して

$(-x^3-2x^2+x-2)-(x+1)^2=-(x+1)(x^2+2x-1)>0$

これより　$x<-1-\sqrt{2}$, $-1<x<-1+\sqrt{2}$ 条件とあわせ　$-1<x<-1+\sqrt{2}$

②の時も解になるから　　$x\leq-2$

共通部分がないからこれらをあわせて　$-1<x<-1+\sqrt{2}$,　$x\leq-2$　（答）

(3)　$16x^5-20x^3+5x \geq -1$　（ $x \geq 0$ ）を証明せよ。

$f(x)=16x^5-20x^3+5x$ とおく。 $x \geq 0$ で $f(x)$ の極小値が -1 を示せばよい。

$$f'(x)=5(16x^4-12x^2+1)=\frac{5}{16}\{16x^2-(6+2\sqrt{5})\}\{16x^2-(6-2\sqrt{5})\}$$

$$=80\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

$x \geq 0$ で $f'(x)$ の符号を調べて

x	0	・・・	$(\sqrt{5}-1)/4$	・・・	$(\sqrt{5}+1)/4$	・・・
$f'(x)$		（＋）	0	（－）	0	（＋）
$f(x)$	0	増加	極大値	減少	極小値	増加

これから　$x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　で極小値をとる。$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$　を解とする二次方程式は

$4x^2-2x-1=0$　　割り算を実行し　$f(x)=(4x^2-2x-1)(4x^3+2x^2-3x-1)-1$

$f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)=-1$　$\therefore$　$f(x) \geq -1$（$x \geq 0$）　$\therefore$　$16x^5-20x^3+5x \geq -1$　　Q.E.D

問題 5．$\tan 3\theta, \tan 5\theta$ を $\tan\theta$ で表わし、その結果を利用し $\tan\dfrac{\pi}{20}$ の値を求めよ。

$$\tan 3\theta=\tan(\theta+2\theta)=\frac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta}=\frac{\tan\theta+\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1-\dfrac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}}=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

同様に　$\tan 5\theta=\tan(2\theta+3\theta)=\dfrac{\tan 2\theta+\tan 3\theta}{1-\tan 2\theta\tan 3\theta}=\dfrac{\tan^5\theta-10\tan^3\theta+5\tan\theta}{5\tan^4\theta-10\tan^2\theta+1}$

ここで $\theta=\dfrac{\pi}{20}$, $\tan\theta=x$ とすると $\tan 5\theta=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$　$0<x=\tan\dfrac{\pi}{20}<\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

従って　$5x^4-10x^2+1=x^5-10x^3+5x$

$x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0$　左辺を $f(x)$ とおくと明らかに $f(1)=0$

$0<x<1$ より 割り算を実行して　$x^4-4x^3-14x^2-4x+1=0$

これは相反方程式であるから $x^2(\neq 0)$ で割って変形して

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-16=0$　　$x>0$ より　$x+\dfrac{1}{x}=2(1+\sqrt{5})$　これから

$x^2-2(1+\sqrt{5})x+1=0$　　$x=(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-1}=(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$0<x<1$ かつ　$x=(1+\sqrt{5})-\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}>0$　より

$x=(1+\sqrt{5})-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$　　　（答）$\tan\dfrac{\pi}{20}=(1+\sqrt{5})-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$$\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta},\quad \tan 5\theta=\frac{\tan^5\theta-10\tan^3\theta+5\tan\theta}{5\tan^4\theta-10\tan^2\theta+1}$$

問題 6. 次の不定方程式の整数解を求めよ。

(1)　$xy(x-y)=2xy+3x-3y-6$

(2)　$x^2y-xy^2=x-y+5$

(3)　$x^4y^2-(y^4+1)x^2+y^2=9$

(1)　x について整理して　$yx^2-(y^2+2y+3)x+3(y+2)=0$

因数分解して　$(xy-3)(x-y-2)=0$

$xy=3,\quad y=x-2$　を満たす整数解があればそれが答である。

$x(x-2)-3=(x-3)(x+1)=0$　　$x=3$　のとき　$y=1$

$x=-1$　のとき　$y=-3$　　　（答）$(x,y)=(3,1),(-1,-3)$

(2)　$xy(x-y)-(x-y)=5$　よって　$(xy-1)(x-y)=5$

$xy-1=$	1	5	-1	-5
$x-y=$	5	1	-5	-1
これから　$xy=$	2	6	0	-4
$y=$	$x-5,$	$x-1,$	$x+5,$	$x+1$

これらの組合せの中で x が整数になるのは $x(x-1)=6,\ 0$ のとき

$x^2-x-6=0$　より　$x=3,-2$　このとき　$y=2,-3$

$x^2+5x=0$　より　$x=0,-5$　このとき　$y=5,\ 0$

（答）　$(x,y)=(3,2),(-2,-3),(0,5),(-5,0)$

(3)　$x^4y^2-(y^4+1)x^2+y^2=9$

(2)で x を x^2、y を y^2 でおきかえたものが左辺であるから

$(x^2y^2-1)(x^2-y^2)=9$　　因数の組合せは

$x^2y^2-1=$	9	3	1	-9	-3	-1
$x^2-y^2=$	1	3	9	-1	-3	-9
$x^2y^2=$	10	4	2	-8	-2	0

$x^2-y^2=x^2+(-y^2)$ だから

$x^2+(-y^2)=$ 1　　3＊　　9　　−1　　−3　　−9 ＊＊

$x^2(-y^2)=-10$　—4＊　−2　　8　　2　　0 ＊＊

$x^2, -y^2$ を解とする二次方程式で正根 or 0 と負根を一つずつ持つものを選び

正根 or 0 を x^2 の、負根を $-y^2$ の解とするとよい。(x, y は整数)

これらの条件を満たすものは ＊、＊＊より得られる。

＊ のとき　$t^2-3t-4=(t-4)(t+1)=0$　　$t=4,-1$

$x^2=4$　$-y^2=-1$ から　$x=\pm2$,　$y=\pm1$

＊＊ のとき　$t^2+9t=t(t+9)=0$　　$t=0,-9$

$x^2=0$　$-y^2=-9$ から　$x=0$,　$y=\pm3$

与式の左辺は x^2 or y^2 についての二次式で正負の符号はどちらでも良いから

(x, y) の組合せは＊ のとき 4 通り、＊＊ のとき 2 通りの 6 通りとなる。

（答）　$(x,y)=(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1),\ (0,3),(0,-3)$

(注)　x^2y^2-1,　x^2-y^2 は更に因数分解できるが組合せを多くして計算を複雑に、また見通しを悪くするよりも、と考え x^2y^2-1,　x^2-y^2 間の因数の組合せを調べた。また ＊で $t^2+3t-4=(t+4)(t-1)=0$　$x^2=1$,　$-y^2=-4$ の場合は $x^2y^2>1$,　$x^2>y^2$ or $x^2y^2<1$,　$x^2<y^2$ の条件に反しありえない。

＊＊ についても同様である。

問題 7.　$x=2$,　$x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{5}$　は次の方程式の解であることを示せ。

$\log_{x^2}(6-x)+\log_x(x-1)=1$　・・・・・(＊)

解)　与えられた方程式を解くことを考える。　真数および底の条件から

$6-x>0, x-1>0, x>0, x\neq1, x^2\neq1$　これから　$1<x<6$　・・・・・・①

底を変換して $\dfrac{\log(6-x)}{2\log x}+\dfrac{\log(x-1)}{\log x}=1$　両辺に $2\log x$ を掛けて整理して

$x^3-7x^2+13x-6=0$　因数分解して　$(x-2)(x^2-5x+3)=0$

$\therefore\ x=2$ or $\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$　　$\dfrac{5+3}{2}=4<\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}<\dfrac{5+4}{2}=\dfrac{9}{2}$、　$\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}<\dfrac{5-3}{2}=1$

①から　$x=2$,　$\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$　が解となることが示された。

(別解)　上記と同様に　$1 < x < 6$　であるが　$x = 2$,　$\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$　は条件を満たす。

$x = 2$,　$\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$　を方程式の左辺に代入し、右辺になることを確かめる。

ｉ）$x = 2$　のとき　左辺$= \log_4 4 + \log_2 1 = 1 + 0 = 1$

ⅱ）$x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$　のとき　$x^2 = \dfrac{38+10\sqrt{13}}{4} = \dfrac{19+5\sqrt{13}}{2}$

$$x - 1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \qquad 6 - x = \frac{12-(5+\sqrt{13})}{2} = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{左辺} = \frac{1}{2}\log_{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}\frac{7-\sqrt{13}}{2} + \log_{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}\frac{3+\sqrt{13}}{2} = \frac{\log\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}}{2\log\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}} + \frac{\log\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}{\log\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}}$$

$$= \frac{\log\dfrac{7-\sqrt{13}}{2} + \log\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2}{2\log\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}} = \frac{\log\dfrac{7-\sqrt{13}}{2} + \log\dfrac{11+3\sqrt{13}}{2}}{\log\dfrac{19+5\sqrt{13}}{2}}$$

$$= \frac{\log\dfrac{38+10\sqrt{13}}{4}}{\log\dfrac{19+5\sqrt{13}}{2}} = 1$$

よってｉ)、ⅱ)より $x = 2$、$\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ が解

3. 終りに

昔から方程式が好きで、高校生の時に高木貞治博士の「近世数学史談」等を読んだが、その中に掲載されていたアーベルの「不可能の証明」やガロアの「方程式論」の詳細は当時理解できなかったものの、基本的な考え方を見て胸はずむものを覚えた。

今回、数ヶ月間 余暇に思いつき蓄積した新作問題を纏めてみた。

前回同様、「別解」についてはできるだけ載せるようにした。

私としては力を入れたわりには良問が少ないと思うが、これもアマチュアの「趣味の数学」の範囲から脱し得ないため、と考えている。

お気付きの点について各位のご意見を伺えれば幸いである。