私の数学散歩道（11）　2012.06.04.提出

ピアーズ ・フォスター　簡約積分表の公式の証明(３)

～指数関数及びその他の関数を含む式～

数実研会員　　村田　洋一

積分の計算は数学Ⅲの一つの核をなすもので、題記の積分表を見て役立ちそうな分野の公式を証明しておくと授業にも有用と考え、取り上げることにした。

今回は「指数関数及びその他の関数を含む式」で、これをもって本シリーズの最後としたい。見なれない公式も多いが、これにより難関大学を含め入試等に出てくる指数関数を含む積分の計算に殆ど対応できると思う。解法のポイントは置換積分と部分積分が主であるが、結構計算が面倒なものもある。なお、対数記号の中は正、分母$\neq 0$、逆三角関数は主値で積分定数の記載は省略した。レポートの構成は「公式編」を p.1～3、「証明編」を p.4～14 とした。

（公　式　編）

1. 指数関数を含む式

411. $\int e^{ax}dx=\dfrac{e^{ax}}{a}$

412. $\int f(e^{ax})dx=\int\dfrac{f(y)dy}{ay},\quad y=e^{ax}$

413. $\int xe^{ax}dx=\dfrac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$

414. $\int x^2e^{ax}dx=\dfrac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2-2ax+2)$

415. $\int x^3e^{ax}dx=\dfrac{e^{ax}}{a^4}(a^3x^3-3a^2x^2+6ax-6)$

418. $\int x^ne^{f(x)}dx\ =\dfrac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}e^{f(x)}-\int x^{n+1}f'(x)e^{f(x)}dx\right\}$

419. $\int\dfrac{x^{ax}}{x^m}dx=\ \dfrac{1}{m-1}\left\{-\dfrac{e^{ax}}{x^{m-1}}+a\int\dfrac{e^{ax}}{x^{m-1}}dx\right\}\qquad(m\neq 1)$

420. $\int a^{bx}dx=\dfrac{a^{bx}}{b\log a}$

421. $\int f(a^{bx})dx=\int\dfrac{f(y)dy}{b\log a\cdot y},\quad y=a^{bx}$

422. $\int x^na^xdx=\dfrac{a^nx^n}{\log a}-\dfrac{na^xx^{n-1}}{(\log a)^2}+\dfrac{n(n-1)a^xx^{n-2}}{(\log a)^3}-\dfrac{n(n-1)(n-2)a^xx^{n-3}}{(\log a)^4}$
$+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^xx^{n-4}}{(\log a)^5}-\cdot\ \cdot\ \cdot+(-1)^n\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ \cdot\ \cdot3\cdot2\cdot1\cdot\ a^x}{(\log a)^{n+1}}$

424. $\int\dfrac{dx}{1+e^x}=\log\dfrac{e^x}{1+e^x}$

425. $\int\dfrac{dx}{a+be^{mx}}=\dfrac{1}{ma}\left\{mx-\log(a+be^{mx})\right\}$

426. $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}} = \frac{1}{m\sqrt{ab}}\tan^{-1}(\sqrt{\frac{a}{b}}e^{mx})$

427. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+be^{mx}}} = \frac{-2}{m\sqrt{a}}\log(\sqrt{a}+\sqrt{a+be^{mx}})+\frac{x}{\sqrt{a}}$ （ $a>0$ ）

428. $\int \frac{xe^{x}dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}$

429. $\int x^n e^{ax^{n+1}}dx = \frac{e^{ax^{n+1}}}{a(n+1)}$

430. $\int e^{ax}\sin pxdx = \frac{e^{ax}(a\sin px - p\cos px)}{a^2+p^2}$

431. $\int e^{ax}\cos pxdx = \frac{e^{ax}(a\cos px + p\sin px)}{a^2+p^2}$

432. $\int e^{ax}\log xdx = \frac{e^{ax}\log x}{a} - \frac{1}{a}\int\frac{e^{ax}dx}{x}$

433. $\int e^{ax}\sin^2 xdx = \frac{e^{ax}}{a^2+4}\left\{\sin x(a\sin x - 2\cos x)+\frac{2}{a}\right\}$

434. $\int e^{ax}\cos^2 xdx = \frac{e^{ax}}{a^2+4}\left\{\cos x(2\sin x + a\cos x)+\frac{2}{a}\right\}$

435.　436.　441.

$$\int e^{ax}\sin^n bxdx = \frac{1}{a^2+b^2n^2}\left\{(a\sin bx - nb\cos bx)e^{ax}\sin^{n-1}bx + n(n-1)b^2\int e^{ax}\sin^{n-2}bxdx\right\}$$

$$\int e^{ax}\cos^n bxdx = \frac{1}{a^2+b^2n^2}\left\{(a\cos bx + nb\sin bx)e^{ax}\cos^{n-1}bx + n(n-1)b^2\int e^{ax}\cos^{n-2}bxdx\right\}$$

$$\int e^{ax}\sin^m x\cos^n xdx$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2+a^2}\left\{e^{ax}\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x(a\sin x\cos x + n\sin^2 x - m\cos^2 x)\right.$$

$$\left.+m(m-1)\int e^{ax}\sin^{m-2}x\cos^{n-2}xdx - (m-n)(m+n-1)\int e^{ax}\sin^m x\cos^{n-2}xdx\right\}$$

注） $I(m,n)$ を $I(m-2,n-2)$ 、 $I(m,n-2)$ で表す式は上記である。
ほかに $I(m-1,n-1)$ 、 $I(m,n-2)$ ； $I(m,n-2)$ 、 $I(m-2,n)$ ； $I(m-2,n-2)$ 、
$I(m-2,n)$ 等計 5 通りに表せるがほぼ同じ解法で解けるため省略した。

2. その他の関数を含む式

（_ $a+bx$　$\sqrt{a+bx}$　$a+bx^n$ を含む式）

35. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left\{a+bx-2a\log(a+bx)-\frac{a^2}{a+bx}\right\}$

36. $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{x}$

48. $\int \frac{dx}{c^2+x^2} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{x}{c} = \frac{1}{c}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}$

49. $\int \frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{1}{2c}\log\frac{c+x}{c-x}$

61. $\int \frac{dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}a^3}\{\ \log\frac{x^2+\sqrt{2}ax+a^2}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2} + 2\tan^{-1}(\frac{\sqrt{2}ax}{a^2-x^2})\}$

62. $\int \frac{dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4a^3}\{\ \log(\frac{x-a}{x+a}) - 2\tan^{-1}\frac{x}{a}\ \}$

99. $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

103. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}$ （$a>0$）

104. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}$ （$a<0$）

（逆三角関数を含む式）

390. $\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

391. $\int \cos^{-1} x dx = x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$

392. $\int \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

393. $\int \cot^{-1} x dx = x\cot^{-1} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

397. $\int (\sin^{-1} x)^2 dx = x(\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x$

398. $\int (\cos^{-1} x)^2 dx =$ 式$= x(\cos^{-1} x)^2 - 2x - 2\sqrt{1-x^2}\cos^{-1} x$

399. $\int x\sin^{-1} x dx = = \frac{1}{4}\{(2x^2-1)\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\ \}$

400. $\int x\cos^{-1} x dx = = \frac{1}{4}\{(2x^2-1)\cos^{-1}x - x\sqrt{1-x^2}\ \}$

401. $\int x\tan^{-1} x dx = \frac{1}{2}\{(x^2+1)\tan^{-1}x - x\}$

409. $\int \frac{\sin^{-1} x dx}{x^2} = \log(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}) - \frac{\sin^{-1} x}{x}$

410. $\int \frac{\tan^{-1} x dx}{x^2} = -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

（$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{x^2 \pm a^2}$ を含む式）

126. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\log(x+\sqrt{x^2 \pm a^2})\}$

127. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a})$

128. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x+\sqrt{x^2+a^2})$

129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log(x+\sqrt{x^2-a^2})$

130. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} = -\cos^{-1}\frac{x}{a}$

135. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2-x^2}$

136. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = = \sqrt{x^2-a^2}$

138. $\int x\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{a^3}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$

（参照文献）

ピアース・フォスター　簡約積分表（理工学海外名著シリーズ 6）　第 4 版
「指数関数を含む式、その他の関数を含む式」　　ブレイン図書出版(株)

（証　明　編）

1．指数関数を含む式

411. $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$

412. $\int f(e^{ax})dx = \int \frac{f(y)dy}{ay}, \quad y = e^{ax}$

$dy = ae^{ax}dx$ から $dx = \frac{dy}{ae^{ax}} = \frac{dy}{ay}$　　$\therefore$ 左辺＝$\int f(y)dx = \int \frac{f(y)dy}{ay}$

413. $\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a}\int x(e^{ax})'dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$

414. $\int x^2e^{ax}dx = \frac{x^2e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\int xe^{ax}dx = \frac{x^2e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\left\{ \frac{xe^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}dx \right\} = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$

415. $\int x^3e^{ax}dx = \frac{x^3e^{ax}}{a} - \frac{3}{a}\int x^2e^{ax}dx = \frac{x^3e^{ax}}{a} - \frac{3}{a}\left\{ \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \right\}$

$= \frac{e^{ax}}{a^4}(a^3x^3 - 3a^2x^2 + 6ax - 6)$

418. $\int x^n e^{f(x)}dx = \int (\frac{x^{n+1}}{n+1})'e^{f(x)}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}e^{f(x)} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}f'(x)e^{f(x)}dx$

$= \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}e^{f(x)} - \int x^{n+1}f'(x)e^{f(x)}dx\right\}$

419. $\int \frac{x^{ax}}{x^m}dx = \int (\frac{x^{-m+1}}{-m+1})'e^{ax}dx = \frac{x^{-m+1}}{-m+1}e^{ax} - \int \frac{x^{-m+1}}{-m+1} \cdot ae^{ax}dx$

$= -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{e^{ax}}{x^{m-1}} + \frac{a}{m-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{m-1}}dx = \frac{1}{m-1}\left\{-\frac{e^{ax}}{x^{m-1}} + a\int \frac{e^{ax}}{x^{m-1}}dx\right\}$　　$(m \neq 1)$

420. $\int a^{bx}dx = \int e^{bx\log a}dx = \frac{e^{bx\log a}}{b\log a} = \frac{a^{bx}}{b\log a}$　　（$\because e^y = a^{bx}$ より $y = bx\log a$ ）

421. $\int f(a^{bx})dx = \int f(y) \cdot \frac{dy}{b\log a \cdot y} = \int \frac{f(y)dy}{b\log a \cdot y}, \quad y = a^{bx}$

（$\because y = a^{bx}$ より $y = e^{bx\log a}$　　$dy = b\log a \cdot e^{bx\log a}dx$ から　$dx = \frac{dy}{b\log a \cdot a^{bx}}$ ）

422. $\int x^n a^x dx = I(n)$ とおく。　$I(n) = \int x^n (\frac{e^{x\log a}}{\log a})'dx = \frac{e^{x\log a}x^n}{\log a} - \frac{n}{\log a}\int e^{x\log a}x^{n-1}dx$

$= \frac{e^{x\log a}x^n}{\log a} - \frac{ne^{x\log a}x^{n-1}}{(\log a)^2} + \frac{n(n-1)}{(\log a)^2}\left\{ \frac{e^{x\log a}x^{n-2}}{\log a} - \frac{n-2}{\log a}\int e^{x\log a}x^{n-3}dx\right\}$　部分積分を続け

$= \frac{e^{x\log a}x^n}{\log a} - \frac{ne^{x\log a}x^{n-1}}{(\log a)^2} + \frac{n(n-1)e^{x\log a}x^{n-2}}{(\log a)^3} - \frac{n(n-1)(n-2)e^{x\log a}x^{n-3}}{(\log a)^4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(\log a)^4}$

$$\times\int e^{x\log a}x^{n-4}dx=\frac{a^n x^n}{\log a}-\frac{na^x x^{n-1}}{(\log a)^2}+\frac{n(n-1)a^x x^{n-2}}{(\log a)^3}-\frac{n(n-1)(n-2)a^x x^{n-3}}{(\log a)^4}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^x x^{n-4}}{(\log a)^5}-\cdot\ \cdot\ \cdot+(-1)^n\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ \cdot\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot\ a^x}{(\log a)^{n+1}}$$

424. $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{dt}{t(1+t)}=\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t})dt=\log\frac{e^t}{1+e^t}$ （$\because\ e^x=t\quad x=\log t\quad dx=\frac{dt}{t}$）

425. $\int\frac{dx}{a+be^{mx}}=\frac{1}{m}\int\frac{dt}{t(a+bt)}=\frac{1}{ma}(\int\frac{1}{t}-\frac{b}{a+bt})dt$ （$\because\ e^{mx}=t\quad x=\frac{\log t}{m}\quad dx=\frac{dt}{mt}$）

$$=\frac{1}{ma}\{logt-\log(a+bt)\}=\frac{1}{ma}\{mx-\log(a+be^{mx})\}$$

426. $\int\frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}=\frac{1}{m}\int\frac{dt}{at^2+b}$ （$\because\ e^{mx}=t\,;t=\sqrt{\frac{b}{a}}\tan\theta\quad dt=\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\ \tan\theta=\sqrt{\frac{a}{b}}t$）

$$=\frac{1}{ma}\int\frac{dt}{t^2+\frac{b}{a}}=\frac{1}{ma}\sqrt{\frac{a}{b}}\theta=\frac{1}{m\sqrt{ab}}\tan^{-1}(\sqrt{\frac{a}{b}}e^{mx})$$

427. $\int\frac{dx}{\sqrt{a+be^{mx}}}$ （ $\sqrt{a+be^{mx}}=t$ とおく。$x=\frac{1}{m}\log\frac{t^2-a}{b}\quad dx=\frac{2tdt}{m(t^2-a)}$ ）

$$=\frac{2}{m}\int\frac{dt}{t^2-a}=\frac{2}{m}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}\int(\frac{1}{t-\sqrt{a}}-\frac{1}{t+\sqrt{a}})dt=\frac{1}{m\sqrt{a}}\log\frac{t+\sqrt{a}}{t-\sqrt{a}}=-\frac{1}{m\sqrt{a}}\log\frac{t-\sqrt{a}}{t+\sqrt{a}}$$

$$=-\frac{1}{m\sqrt{a}}\log\frac{(t+\sqrt{a})^2}{t^2-a}=-\frac{1}{m\sqrt{a}}\{2\log(\sqrt{a+be^{mx}}+\sqrt{a})-\log b-\log e^{mx}\ \}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{a}}-\frac{2}{m\sqrt{a}}\log(\sqrt{a+be^{mx}}+\sqrt{a})+\frac{\log b}{m\sqrt{a}}$$

定数を除いて $\int\frac{dx}{\sqrt{a+be^{mx}}}=\frac{x}{\sqrt{a}}-\frac{2}{m\sqrt{a}}\log(\sqrt{a+be^{mx}}+\sqrt{a})$ （但し $a>0$）

428. $\int\frac{xe^x dx}{(1+x)^2}=\int\frac{(t-1)e^{t-1}dt}{t^2}=\int\frac{e^{t-1}dt}{t}-\int\frac{e^{t-1}dt}{t^2}$ （$\because\ 1+x=t\quad x=t-1\quad dx=dt$）

$$=\frac{e^{t-1}}{t}+\int\frac{e^{t-1}dt}{t^2}-\int\frac{e^{t-1}dt}{t^2}=\frac{e^{t-1}}{t}=\frac{e^x}{1+x}$$

429. $\int x^n e^{ax^{n+1}}dx\quad u=e^{ax^{n+1}}$ とすると $\log u=ax^{n+1}\quad \frac{du}{u}=a(n+1)x^n dx\quad x^n dx=\frac{du}{au(n+1)}$

与式＝$\int\frac{1}{au(n+1)}\cdot\ udu=\frac{u}{a(n+1)}=\frac{e^{ax^{n+1}}}{a(n+1)}$

430. $\int e^{ax}\sin pxdx=\frac{e^{ax}\sin px}{a}-\frac{p}{a}\int e^{ax}\cos pxdx=\frac{e^{ax}\sin px}{a}-\frac{p}{a}\{\ \frac{e^{ax}}{\cos px}+\frac{p}{a}\int e^{ax}\sin pxdx\}$

これから　$\dfrac{a^2+p^2}{a^2}\int e^{ax}\sin pxdx=\dfrac{e^{ax}\sin px}{a}-\dfrac{pe^{ax}\cos px}{a^2}$

左辺の係数で割って　$\displaystyle\int e^{ax}\sin pxdx=\frac{e^{ax}(a\sin px-p\cos px)}{a^2+p^2}$

431. $\displaystyle\int e^{ax}\cos pxdx=\frac{e^{ax}\cos px}{a}+\frac{p}{a}\int e^{ax}\sin pxdx=\frac{e^{ax}\cos px}{a}+\frac{p}{a}\left\{\frac{e^{ax}\sin px}{a}-\frac{p}{a}\int e^{ax}\cos pxdx\right\}$

これから　$\dfrac{a^2+p^2}{a^2}\int e^{ax}\cos pxdx=\dfrac{e^{ax}\cos px}{a}+\dfrac{pe^{ax}\sin px}{a^2}$

$$\int e^{ax}\cos pxdx=\frac{e^{ax}(a\cos px+p\sin px)}{a^2+p^2}$$

432. $\displaystyle\int e^{ax}\log xdx=\int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\log xdx=\frac{e^{ax}\log x}{a}-\frac{1}{a}\int\frac{e^{ax}dx}{x}$

433. $\displaystyle\int e^{ax}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int e^{ax}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int e^{ax}dx-\frac{1}{2}\int e^{ax}\cos 2xdx=-\frac{e^{ax}(a\cos 2x+2\sin 2x)}{2(a^2+4)}$

$$+\frac{e^{ax}}{2a}=\frac{e^{ax}}{2(a^2+4)}\left\{-(a\cos 2x+2\sin 2x)+\frac{a^2+4}{a}\right\}=\frac{e^{ax}}{2(a^2+4)}\left\{-a(1-2\sin^2 x)\right.$$

$$\left.-4\sin x\cos x+a+\frac{4}{a}\right\}=\frac{e^{ax}}{a^2+4}\left\{\sin x(a\sin x-2\cos x)+\frac{2}{a}\right\}\quad \text{(cf. 431.)}$$

434. $\displaystyle\int e^{ax}\cos^2 xdx$　　$\displaystyle\int e^{ax}\sin^2 xdx+\int e^{ax}\cos^2 xdx=\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}$　より

$$=\frac{e^{ax}}{a}-\frac{e^{ax}}{a^2+4}\left\{\sin x(a\sin x-2\cos x)+\frac{2}{a}\right\}=\frac{e^{ax}}{a^2+4}\left\{-\sin x(a\sin x-2\cos x)-\frac{2}{a}+\frac{a^2+4}{a}\right\}$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+4}\left\{-a(1-\cos^2 x)+2\sin x\cos x+a+\frac{2}{a}\right\}=\frac{e^{ax}}{a^2+4}\left\{\cos x(2\sin x+a\cos x)+\frac{2}{a}\right\}$$

435. $\displaystyle\int e^{ax}\sin^n bxdx=J_n$　とおく。

$$J_n=\int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\sin^n bx=\frac{e^{ax}}{a}\sin^n bx-\frac{bn}{a}\int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\cos bx\,\sin^{n-1}bxdx$$

$$=\frac{e^{ax}}{a}\sin^n bx-\frac{bn}{a^2}e^{ax}\cos bx\sin^{n-1}bx+\frac{bn}{a^2}\int e^{ax}\left\{-b\sin^n bx+b(n-1)(1-\sin^2 bx)\sin^{n-2}bx\right\}dx$$

第 3 項$\displaystyle=-\frac{b^2n}{a^2}\int e^{ax}\sin^n bxdx+\frac{b^2n(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bxdx-\frac{b^2n(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^n bxdx$

$\displaystyle=-\frac{b^2n}{a^2}J_n+\frac{b^2n(n-1)}{a^2}J_{n-2}-\frac{b^2n(n-1)}{a^2}J_n$　　同類項を整理して

$$\left\{1+\frac{b^2n}{a^2}+\frac{b^2n(n-1)}{a^2}\right\}J_n=\frac{e^{ax}}{a}\sin^n bx-\frac{bn}{a^2}e^{ax}\cos bx\sin^{n-1}bx+\frac{b^2n(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bxdx$$

$$\frac{a^2+b^2n^2}{a^2}J_n=\frac{e^{ax}}{a^2}\sin^{n-1}bx(a\sin bx-bn\cos bx)+\frac{b^2n(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bxdx$$

$$J_n=\frac{1}{a^2+b^2n^2}\left\{(a\sin bx-nb\cos bx)e^{ax}\sin^{n-1}bx+n(n-1)b^2\int e^{ax}\sin^{n-2}bxdx\right\}$$

436. $\int e^{ax}\cos^n bxdx=K_n$　とおく。

$$K_n=\int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\cos^n bx=\frac{e^{ax}}{a}\cos^n bx+\frac{bn}{a}\int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\sin bx\cos^{n-1}bxdx$$

$$=\frac{e^{ax}}{a}\cos^n bx+\frac{bn}{a^2}e^{ax}\sin bx\cos^{n-1}bx-\frac{bn}{a^2}\int e^{ax}\left\{b\cos bx\cos^{n-1}bx-b(n-1)(1-\cos^2 bx)\cos^{n-2}bx\right\}dx$$

第 3 項$=-\dfrac{b^2n}{a^2}\displaystyle\int e^{ax}\cos^n bxdx+\frac{b^2n(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bxdx-\frac{b^2n(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\cos^n bxdx$

$$=\left\{-\frac{b^2n}{a^2}-\frac{b^2n(n-1)}{a^2}\right\}K_n+\frac{b^2n(n-1)}{a^2}K_{n-2}$$

これから　$K_n=\dfrac{1}{a^2+b^2n^2}\left\{(a\cos bx+nb\sin bx)e^{ax}\cos^{n-1}bx+n(n-1)b^2\displaystyle\int e^{ax}\cos^{n-2}bxdx\right\}$

441. $\int e^{ax}\sin^m x\cos^n xdx=I(m,n)$ とおく。

$$I(m,n)=\int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\sin^m x\cos^n xdx=\frac{e^{ax}}{a}\sin^m x\cos^n x-\frac{1}{a}\int e^{ax}(\sin^m x\cos^n x)'dx$$

$$=\frac{e^{ax}}{a}\sin^m x\cos^n x-\frac{1}{a}\int e^{ax}\left[\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x\left\{m(1-\sin^2 x)-n\sin^2 x\right\}\right]dx$$

$=\dfrac{e^{ax}}{a}\sin^m x\cos^n x-\dfrac{m}{a}\displaystyle\int e^{ax}\sin^{m-1}x\cos^{n-1}xdx+\frac{m+n}{a}\int e^{ax}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}xdx$　から

部分積分して　$=\dfrac{e^{ax}}{a}\sin^m x\cos^n x-\dfrac{m}{a}\left\{\dfrac{e^{ax}}{a}\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int e^{ax}(\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x)'dx\right\}$

$$+\frac{m+n}{a}\left\{\frac{e^{ax}}{a}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x-\frac{1}{a}\int e^{ax}(\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x)'dx\right\}$$

$$(\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x)'=\sin^{m-2}x\cos^{n-2}x\left\{(m-1)(1-\sin^2 x)-(n-1)\sin^2 x\right\}$$

$(\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x)'=\sin^m x\cos^{n-2}x\left\{(m+1)\cos^2 x-(n-1)(1-\cos^2 x\right\}$　より

$$=\frac{e^{ax}}{a}\sin^m x\cos^n x-\frac{m}{a^2}e^{ax}\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x+\frac{m+n}{a^2}e^{ax}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x$$

$$+\frac{m(m-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^{m-2}x\cos^{n-2}xdx-\frac{m(m-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^m x\cos^{n-2}xdx-\frac{m(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^m x\cos^{n-2}xdx$$

$$-\frac{(m+n)(m+1)}{a^2}I(m,n)+\frac{(m+n)(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^m x\cos^{n-2}xdx-\frac{(m+n)(n-1)}{a^2}I(m,n)$$

これから同類項をまとめて

$$\left[1+\frac{m+n}{a^2}\{(m+1)+(n-1)\}\right]I(m,n)=e^{ax}\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x(\frac{\sin x\cos x}{a}-\frac{m}{a^2}+\frac{m+n}{a^2}\sin^2 x)$$

$$+\frac{m(m-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^{m-2}x\cos^{n-2}xdx+\frac{n(n-1)-m(m-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^m x\cos^{n-2}xdx$$

左辺＝$\frac{(m+n)^2+a^2}{a^2}$　右辺１項＝$\frac{1}{a^2}e^{ax}\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x\{a\sin x\cos x-m+(m+n)\sin^2 x\}$

$=\frac{1}{a^2}e^{ax}\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x\{a\sin x\cos x-m\cos^2 x+n\sin^2 x\}$　右辺３項＝$-(m-n)(m+n-1)$

従って　$I(m,n)=\frac{1}{(m+n)^2+a^2}\{e^{ax}\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x(a\sin x\cos x+n\sin^2 x-m\cos^2 x)$

$$+m(m-1)\int e^{ax}\sin^{m-2}x\cos^{n-2}xdx-(m-n)(m+n-1)\int e^{ax}\sin^m x\cos^{n-2}xdx\}$$

2. その他の関数を含む式

（ $a+bx$　$\sqrt{a+bx}$　$a+bx^n$　を含む式）

35. $\int\frac{x^2dx}{(a+bx)^2}=\int\frac{\frac{(y-a)^2}{b^2}\cdot\frac{dy}{b}}{y^2}$　（ $y=a+bx$ とおくと　$x=\frac{y-a}{b}$　$dx=\frac{1}{b}dy$）

$$=\frac{1}{b^3}\int(1-\frac{2a}{y}+\frac{a^2}{y^2})dy=\frac{1}{b^3}(y-2a\log y-\frac{a^2}{y})=\frac{1}{b^3}\left\{a+bx-2a\log(a+bx)-\frac{a^2}{a+bx}\right\}$$

36. $\int\frac{dx}{x(a+bx)}=\frac{1}{a}\{\int(\frac{1}{x}-\frac{b}{a+bx})dx\}=\frac{1}{a}\log\frac{x}{a+bx}=-\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{x}$

48. $\int\frac{dx}{c^2+x^2}=\frac{1}{c}\int d\theta=\frac{\theta}{c}=\frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{x}{c}$　（$x=c\tan\theta$　とおくと　$dx=\frac{cd\theta}{\cos^2\theta}$）

$\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}=u$　とおく。$\sin u=\frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}$ から　$\cos u=\frac{c}{\sqrt{x^2+c^2}}$　∴　$\tan u=\frac{x}{c}$

から　$u=\tan^{-1}\frac{x}{c}$　従って　$\int\frac{dx}{c^2+x^2}=\frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{x}{c}=\frac{1}{c}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}$

49. $\int\frac{dx}{c^2-x^2}=\frac{1}{2c}\int(\frac{1}{c-x}+\frac{1}{c+x})dx=\frac{1}{2c}\{\log(c+x)-\log(c-x)\}=\frac{1}{2c}\log\frac{c+x}{c-x}$

61. $\int\frac{dx}{x^4+a^4}=\int(\frac{lx+m}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}-\frac{sx+t}{x^2+\sqrt{2}ax+a^2})dx(=I)$　として未定係数 l,m,s,t を求める。

（$a^2(m-t)=1$・・①　$l-s=0$・・②　$\sqrt{2}a(l+s)+m-t=0$・・③

$a^2(l-s)+\sqrt{2}a(m+t)=0$ ・・④ これを解いて $s=l=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}a^3}$ $m=\dfrac{1}{2a^2}$ $t=-\dfrac{1}{2a^2}$ ）

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}\left\{\frac{x+\sqrt{2}a}{x^2+\sqrt{2}ax+a^2}-\frac{x-\sqrt{2}a}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}\right\}=\frac{1}{4\sqrt{2}a^3}\left\{\frac{(2x+\sqrt{2}a)+\sqrt{2}a}{x^2+\sqrt{2}ax+a^2}-\frac{(2x-\sqrt{2}a)-\sqrt{2}a}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}\right\}$$

$$I=\frac{1}{4\sqrt{2}a^3}\{\ \log\frac{x^2+\sqrt{2}ax+a^2}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}+\int(\frac{\sqrt{2}a}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}+\frac{\sqrt{2}a}{x^2+\sqrt{2}ax+a^2})dx\ \}$$

第２項は分母を $(x\mp\dfrac{a}{\sqrt{2}})^2+\dfrac{a^2}{2}$ と変形し $x-\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\tan\theta_1$、$x+\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\tan\theta_2$

とおくと $dx=\dfrac{a}{\sqrt{2}\cos^2\theta}$ 積分の各項＝ $\sqrt{2}a\displaystyle\int\frac{ad\theta\big/(\sqrt{2}\cos^2\theta)}{a^2\big/(2\cos^2\theta)}=2\int d\theta$

$=2\theta=2(\theta_1+\theta_2)$ $\theta_1=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2}x-a}{a}$ 同様に $\theta_2=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2}x+a}{a}$

従って $2\theta=2(\theta_1+\theta_2)$ を x で表せばよい。 $\tan\theta_1=\dfrac{\sqrt{2}x-a}{a}$ $\tan\theta_2=\dfrac{\sqrt{2}x+a}{a}$

正接の加法定理より $\tan(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{2\sqrt{2}ax}{a^2-(2x^2-a^2)}=\dfrac{\sqrt{2}ax}{a^2-x^2}$

これから $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}a^3}\{\ \log\frac{x^2+\sqrt{2}ax+a^2}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}+2\tan^{-1}(\frac{\sqrt{2}ax}{a^2-x^2})\}$

62. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-a^4}=\int(\frac{p}{x-a}-\frac{q}{x+a}-\frac{rx+s}{x^2+a^2})dx$ として未定係数 p,q,r,s を求める

（$p-q-r=0$ ・・① $a(p+q)-s=0$ ・・② $a^2(p-q+r)=0$ ・・③

$a(p+q)+s=\dfrac{1}{a^2}$ ・・④ これを解いて $p=q=\dfrac{1}{4a^3}$ $s=\dfrac{1}{2a^2}$ $r=0$）

$$=\frac{1}{2a^2}\int\left\{\frac{1}{2a}(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a})-\frac{1}{x^2+a^2}\right\}dx=\frac{1}{4a^3}\log(\frac{x-a}{x+a})-\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$=\frac{1}{4a^3}\{\ \log(\frac{x-a}{x+a})-2\tan^{-1}\frac{x}{a}\ \}$$

99. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x}dx$ （ $t=\sqrt{a+bx}$ とおくと $x=\dfrac{1}{b}(t^2-a)$ $dx=\dfrac{2t}{b}dt$ $dt=\dfrac{b}{2t}dx$）

$$=2\int\frac{t^2dt}{t^2-a}=2\int(1+\frac{a}{t^2-a})dt=2t+2a\int\frac{\frac{b}{2t}}{bx}dx=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$$

103. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=2\int\frac{dt}{t^2-a}$ (但し $a>0$ のとき)

$$=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}\int(\frac{1}{t-\sqrt{a}}-\int\frac{1}{t+\sqrt{a}})dt=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{t-\sqrt{a}}{t+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}$$

104. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=2\int\frac{dt}{t^2+(-a)}$ （但し $a<0$ のとき） （$\tan\theta=\frac{t}{\sqrt{-a}}$ とおくと $dt=\frac{\sqrt{-a}}{\cos^2\theta}$）

$$=\frac{2}{\sqrt{-a}}\theta=\frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{-a}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}$$

（逆三角関数を含む式）

390. $\int\sin^{-1}xdx=\int(x)'\sin^{-1}xdx=x\sin^{-1}x-\int x(\sin^{-1}x)'dx$

$\sin^{-1}x=y$ とおくと $x=\sin y$ $\frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から 与式$=\int\sin^{-1}xdx=x\sin^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

（∵ $x=\cos\theta$ とおくと $dx=-\sin\theta d\theta$ $\int\frac{\cos\theta(-\sin\theta)d\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=-\int\cos\theta d\theta=-\sin\theta=-\sqrt{1-x^2}$）

391. $\int\cos^{-1}xdx=\int(x)'\cos^{-1}xdx=x\cos^{-1}x-\int x(\cos^{-1}x)'dx$

$\cos^{-1}x=y$ とおくと $x=\cos y$ $\frac{dx}{dy}=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から $\int\cos^{-1}xdx=x\cos^{-1}x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$

392. $\int\tan^{-1}xdx=x\tan^{-1}x-\int x(\tan^{-1}x)'dx$

$\tan^{-1}x=y$ とおくと $x=\tan y$ $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$ から $\int\tan^{-1}xdx=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+x^2}=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

393. $\int\cot^{-1}xdx=x\cot^{-1}x-\int x(\cot^{-1}x)'dx$

$\cot^{-1}x=y$ とおくと $x=\cot y$ $\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{\sin^2 y}=-(1+\cot^2 y)=-(1+x^2)$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$ から $\int\cot^{-1}xdx=x\cot^{-1}x+\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

397. $\int(\sin^{-1}x)^2dx=x(\sin^{-1}x)^2-\int x\{(\sin^{-1}x)^2\}'dx$

$(\sin^{-1}x)^2=y$ とおくと $\sin^{-1}x=\sqrt{y}$ $x=\sin\sqrt{y}$ $\frac{dx}{dy}=\frac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$

$x=\sin\sqrt{y}$ から $x^2=\sin^2\sqrt{y}=1-\cos^2\sqrt{y}$　$\cos\sqrt{y}=\sqrt{1-x^2}$　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

より　$\int(\sin^{-1}x)^2dx=x(\sin^{-1}x)^2-2\int\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}=x(\sin^{-1}x)^2+2\int(\sqrt{1-x^2})'\sin^{-1}xdx$

$=x(\sin^{-1}x)^2+2\{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-\int dx\}=x(\sin^{-1}x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x$

398. $\int(\cos^{-1}x)^2dx=x(\cos^{-1}x)^2-\int x\{(\cos^{-1}x)^2\}'dx$

$(\cos^{-1}x)^2=y$　とおくと　$\cos^{-1}x=\sqrt{y}$　$x=\cos\sqrt{y}$　　$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$　　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

から　$\int(\cos^{-1}x)^2dx=x(\cos^{-1}x)^2-2\int\dfrac{(-x\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}=x(\cos^{-1}x)^2-2\int(\sqrt{1-x^2})'\cos^{-1}xdx$

$=x(\cos^{-1}x)^2-2\{\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x+\int dx\}=x(\cos^{-1}x)^2-2x-2\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x$

399. $\int x\sin^{-1}xdx=\int x(x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2})'dx=x^2\sin^{-1}x+x\sqrt{1-x^2}-\int(x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2})dx$

同類項をまとめて　$2\int x\sin^{-1}xdx=x^2\sin^{-1}x+x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx$　　(cf. 390.)

$\int\sqrt{1-x^2}dx$ で　$x=\sin\theta$　とおくと $dx=\cos\theta d\theta$　　$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\cos^2\theta d\theta=\dfrac{1}{2}\int(1+\cos2\theta)d\theta$

$=\dfrac{1}{2}(\theta+\dfrac{1}{2}\sin2\theta)=\dfrac{1}{2}(\sin^{-1}x+x\sqrt{1-x^2})$

$2\int x\sin^{-1}xdx=x^2\sin^{-1}x+x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{2}(\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2})=(x^2-\dfrac{1}{2})\sin^{-1}x+\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$

従って　　$\int x\sin^{-1}xdx==\dfrac{1}{4}\{(2x^2-1)\sin^{-1}x+x\sqrt{1-x^2}\ \}$

400. $\int x\cos^{-1}xdx=\int x(x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2})'dx=x^2\cos^{-1}x-x\sqrt{1-x^2}-\int(x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2})dx$

399.　と同様にして　$\int\sqrt{1-x^2}dx=-\dfrac{1}{2}(\cos^{-1}x-x\sqrt{1-x^2})$　　　　(cf. 391.)

$2\int x\cos^{-1}xdx=x^2\cos^{-1}x-x\sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{2}(\cos^{-1}x-x\sqrt{1-x^2})=(x^2-\dfrac{1}{2})\cos^{-1}x-\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$

従って　　$\int x\cos^{-1}xdx=\dfrac{1}{4}\{(2x^2-1)\cos^{-1}x-x\sqrt{1-x^2}\ \}$

401. $\int x\tan^{-1}xdx=\int x\{x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)'\}dx$

$$=x^2\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x\log(1+x^2)-\int\{x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\}dx$$ （cf. 392.）

整理して　$2\int x\tan^{-1}xdx=x^2\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x\log(1+x^2)+\frac{1}{2}\int\log(1+x^2)dx$

$\int\log(1+x^2)dx$ で $1+x^2=t$ とおくと $2xdx=dt$　$x=\sqrt{t-1}$

$$\int\log(1+x^2)dx=\int\frac{\log tdt}{2\sqrt{t-1}}=\int(\sqrt{t-1})'\log tdt=\sqrt{t-1}\log t-\int\frac{\sqrt{t-1}}{t}dt$$

更に　$\sqrt{t-1}=u$ とおくと　$t=u^2+1$　$dt=2udu$

$$\int\frac{\sqrt{t-1}}{t}dt=\int\frac{2u^2}{u^2+1}du=2\int(1-\frac{1}{u^2+1})du=2(u-\tan^{-1}u)=2(\sqrt{t-1}-\tan^{-1}\sqrt{t-1})$$

$=2(x-\tan^{-1}x)$　　また　$\sqrt{t-1}\log t=x\log(x^2+1)$

$$2\int x\tan^{-1}xdx=x^2\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x\log(1+x^2)-\frac{1}{2}\cdot 2(x-\tan^{-1}x)+\frac{1}{2}x\log(1+x^2)$$

これから　$\int x\tan^{-1}xdx==\frac{1}{2}\{(x^2+1)\tan^{-1}x-x\}$

409. $\int\frac{\sin^{-1}x}{x^2}dx=\int(-\frac{1}{x})'\sin^{-1}xdx=-\frac{1}{x}\sin^{-1}x+\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$　　$\because\ (\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

第 2 項で $x=\sin\theta$ とすると $dx=\cos\theta d\theta$

第 2 項＝$\int\frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\int\frac{dz}{z}=\log\tan\frac{\theta}{2}$　　（$z=\tan\frac{\theta}{2}$）

$x=\frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)+\cos^2(\theta/2)}=\frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}$　これを　$\tan\frac{\theta}{2}$ について整理して

$x\tan^2\frac{\theta}{2}-2\tan\frac{\theta}{2}+x=0$　　$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1-x^2}}{x}$　下記の検算の結果から複号の（－）が適する。

これから　与式＝$\log(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x})-\frac{\sin^{-1}x}{x}$

複号（＋）　$\{\log(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})-\frac{\sin^{-1}x}{x}\}'=\frac{-2}{x\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sin^{-1}x}{x^2}$　　(不適)

複号（－）　$\{\log(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x})-\frac{\sin^{-1}x}{x}\}'=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}-\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\sin^{-1}x}{x^2}$

$$=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sin^{-1}x}{x^2}=\frac{\sin^{-1}x}{x^2}$$ （適）

410. $\int\frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx=\int(-\frac{1}{x})'\tan^{-1}xdx=-\frac{1}{x}\tan^{-1}x+\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$ $\because$ $(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$=-\frac{1}{x}\tan^{-1}x+\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=-\frac{1}{x}\tan^{-1}x+\log x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

注） $\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$ で $x=\tan\theta$ として $dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ $\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=\log\sin\theta$

$x^2=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$ から $\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ としても同じ解を得る。

（$\sqrt{a^2-x^2}$ ，$\sqrt{x^2\pm a^2}$ を含む式）

126. $\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\int\frac{t^2\pm a^2}{2t}\cdot\frac{t^2\pm a^2}{2t^2}dt=\frac{1}{4}\int(t\pm\frac{2a^2}{t}+\frac{a^4}{t^3})dt=\frac{1}{4}(\frac{t^2}{2}-\frac{a^4}{2t^2}\pm 2a^2\log t)$

（$x+\sqrt{x^2+a^2}=t$ とおくと $x=\frac{t^2-a^2}{2t}$ $dx=\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt$ $\sqrt{x^2\pm a^2}=t-x=\frac{t^2\pm a^2}{2t}$）

$$-\frac{a^4}{8t^2}=-\frac{a^4}{8(x+\sqrt{x^2\pm a^2})^2}=-\frac{a^4(x-\sqrt{x^2\pm a^2})^2}{8\{x^2-(x^2\pm a^2)\}}=-\frac{(x-\sqrt{x^2\pm a^2})^2}{8}$$

$$\frac{t^2}{8}-\frac{a^4}{8t^2}=-\frac{(x+\sqrt{x^2\pm a^2})^2}{8}-\frac{(x-\sqrt{x^2\pm a^2})^2}{8}=\frac{x\sqrt{x^2\pm a^2}}{2}$$

よって $\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\log(x+\sqrt{x^2\pm a^2})\}$

127. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos^2\theta d\theta$ （ $x=a\sin\theta$ とおくと $dx=a\cos\theta d\theta$）

$=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a^2\cos^2\theta d\theta=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{a^2}{2}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\sin\theta\cos\theta$

$=\frac{1}{2}a^2(x\sqrt{a^2-x^2}+\sin^{-1}\frac{x}{a})$ （$x=a\sin\theta$ から $a\cos\theta=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2-x^2}$ ）

128. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ （$x+\sqrt{x^2+a^2}=t$ とおくと $x=\frac{t^2-a^2}{2t}$ $dx=\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt$ $\sqrt{x^2+a^2}=\frac{t^2+a^2}{2t}$）

$=\int\frac{dt}{t}=\log t=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$

129. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=-\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=-\log\tan\frac{\theta}{2}$ （$x=\frac{a}{\sin\theta}$ とおくと $dx=-\frac{a\cos\theta d\theta}{\sin^2\theta}$）

$$x=\frac{a(\sin^2(\theta/2)+\cos^2(\theta/2))}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}=\frac{a(1+\tan^2(\theta/2))}{2\tan(\theta/2)} \qquad a\tan^2\frac{\theta}{2}-2x\tan\frac{\theta}{2}+a=0$$

$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{x\pm\sqrt{x^2-a^2}}{a}$　ここで被積分関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ は正であるから $-\log\tan\dfrac{\theta}{2}>0$

従って $0<\tan\dfrac{\theta}{2}<1$ で複号の（－）から 与式＝$-\log(\dfrac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a})=\log(\dfrac{a}{x-\sqrt{x^2-a^2}})$

$$=\log\left\{a\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-(x^2-a^2)}\right\}=\log(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a})=\log(x+\sqrt{x^2-a^2})-\log a$$

定数項 $-\log a$ を除いて $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log(x+\sqrt{x^2-a^2})$

130. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int d\theta=-\theta=-\cos^{-1}\frac{x}{a}$　（$x=a\cos\theta$ とおくと $dx=-a\sin\theta d\theta$）

$\displaystyle=\int d\theta=\theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}$　（$x=a\sin\theta$ とおくと $dx=a\cos\theta d\theta$）

135. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\int\frac{\frac{t^2-a^2}{2t}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}}{\frac{t^2+a^2}{2t}}dt=\frac{1}{2}\int(1-\frac{a^2}{t^2})dt=\frac{1}{2}(t+\frac{a^2}{t})$$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{x\pm\sqrt{x^2+a^2}-(x\mp\sqrt{x^2+a^2})\right\}=\pm\sqrt{x^2+a^2}$　（128.と同じ置き換えで計算）

136. $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}=-a\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}$　（$x=\dfrac{a}{\sin\theta}$ とおくと $dx=-\dfrac{a\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$）

$=\sqrt{x^2-a^2}$　（$\sin\theta=\dfrac{a}{x}$ のとき $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$）

138. $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}dx=a^3\int\sin\theta\cos^2\theta d\theta$　（ $x=a\sin\theta$ とおくと $dx=a\cos\theta d\theta$）

$$=a^3\int\sin\theta(1-\sin^2\theta)d\theta=-a^3\cos\theta-\frac{a^3}{4}\int(3\sin\theta-\sin 3\theta)d\theta$$

$=-\dfrac{a^3}{4}\cos\theta-\dfrac{a^3}{12}(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=-\dfrac{a^3}{3}\cos^3\theta$　$x^2=a^2(1-\cos^2\theta)$ から $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

従って $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}dx=-\frac{a^3}{3}\cdot\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{a^3}=-\frac{a^3}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$

以　上