私の数学散歩道(31)

特別な形の連立方程式について(2)

数実研会員　村田　洋一

（作成の背景）

前回の$n=4$　の場合に加え、今回かなり計算が面倒ですが、$n=5$の時を纏めてみました。手での計算はこの辺が限界と感じました。

$$x+y+z+w+u=xyzwu$$
$$x^2+y^2+z^2+w^2+u^2=17x^2y^2z^2w^2u^2$$
$$x^3+y^3+z^3+w^3+u^3=x^3y^3z^3w^3u^3$$
$$x^4+y^4+z^4+w^4+u^4=65x^4y^4z^4w^4u^4$$
$$x^5+y^5+z^5+w^5+u^5=x^5y^5z^5w^5u^5$$

各方程式で　$p=\dfrac{1}{zwux},q=\dfrac{1}{wuxy},r=\dfrac{1}{uxyz},s=\dfrac{1}{xyzu},t=\dfrac{1}{yzwu}$　と変数変換

$$p+q+r+s+t=\frac{y+z+w+u+x}{xyzwu}=\frac{xyzwu}{xyzwu}=1 \quad ・・①$$

同様に　$p^2+q^2+r^2+s^2+t^2=17$　・・・・・・・・②

$p^3+q^3+r^3+s^3+t^3=1$　・・・・・・・・③

$p^4+q^4+r^4+s^4+t^4=65$　・・・・・・・・④

$p^5+q^5+r^5+s^5+t^5=1$　・・・・・・・・⑤

p,q,r,s,t各々を一つの変数で表示できないから、5次方程式の解と係数の関係と①～⑤の対称式を関連付けて考える。

$$(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)(x-t)$$
$$=x^5-(p+q+r+s+t)x^4+(pq+qr+rs+st+pt+pr+qs+qt+rt+ps)x^3$$
$$-(pqr+qrs+rst+rsp+pqs+pqt+prt+qrt+qst+pst)x^2$$
$$+(pqrs+pqrt+qrst+rspt+pqst)x-pqrst(=0)$$

より　①，②から

$$(p+q+r+s+t)^2=\{(p+q+r)+(s+t)\}^2=p^2+q^2+r^2+s^2+t^2$$
$$+2(pq+qr+rp)+2st+2s(p+q+r)+2t(p+q+r)$$
$$=17+2(pq+qr+rs+st+pt+pr+qs+qt+rt+ps)=1^2$$

これから　$pq+qr+rs+st+pt+pr+qs+qt+rt+ps=-8$　・・⑥

$(p+q+r+s+t)^3 = (p+q)^3 + 3(p+q)^2(r+s+t) + 3(p+q)(r+s+t)^2 + (r+s+t)^3$

$= p^3 + q^3 + 3pq(p+q) + 3(p+q)(r+s+t)(p+q+r+s+t) + (r+s+t)^3$

第4項 $= r^3 + s^3 + t^3 + 3rs(r+s) + 3t(r+s)(r+s+t)$　と①, ③から

＝1+$3pq(1-r-s-t) + 3(p+q)(r+s+t) + 3rs(1-p-q-t) + 3t(r+s)(1-p-q)$

=1 移項して3で割り $pqr + qrs + rst + rsp + pqs + pqt + prt + qrt + qst + pst$

$= pq + qr + rs + st + pt + pr + qs + qt + rt + ps$

⑥より　　左辺＝-8　・・・・・・・・・⑦

$17^2 = (p^2+q^2+r^2+s^2+t^2)^2 = (p^2+q^2+r^2)^2 + 2(p^2+q^2+r^2)(s^2+t^2) + (s^2+t^2)^2$

$= 65 + 2(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2s^2 + s^2t^2 + p^2t^2 + p^2r^2 + q^2s^2 + q^2t^2 + r^2t^2 + p^2s^2)$

②、④から　(　　　)内＝112・・・・・・・・⑧

ここで⑥式の平方を考える。　前の5項、後の5項を纏めて

$(-8)^2 = (pq+qr+rs+st+pt)^2 + 2(pq+qr+rs+st+pt)(pr+qs+qt+rt+ps)$

$+(pr+qs+qt+rt+ps)^2$

上の式の各項をそれぞれ(A)(C)(B)とすると

(A) $= p^2q^2 + q^2r^2 + r^2s^2 + s^2t^2 + p^2t^2 + 2(pqrs + pqrt + qrst + rspt + pqst$

$+ p^2qt + q^2pr + r^2qs + s^2rt + t^2ps)$

(C) $= p^2r^2 + q^2s^2 + q^2t^2 + r^2t^2 + p^2s^2 + 2(pqrs + pqrt + qrst + rspt + pqst$

$+ p^2rs + q^2st + r^2pt + s^2pq + t^2qr)$

(B) $= 2(pqrs + pqrt + pqst + rspt + qrst) + 2(p^2qr + p^2qs + p^2rt + p^2st + q^2ps$

$+ q^2pt + q^2rs + q^2rt + r^2pq + r^2qt + r^2ps + r^2st + s^2qr + s^2pr + s^2qt + s^2pt$

$+ t^2qs + t^2rs + t^2pq + t^2pr)$

(A), (C)それぞれの5項目までの和の和は⑧から112,

$pqrs + pqrt + qrst + rspt + pqst = \lambda$　と置くと(A)～(C)計で6λ

残りの項を p^2, q^2, r^2, s^2, t^2で括ると、例えば　$p^2(qt + rs + qr + qs + rt + st)$

のように6個の違う因数との積になる。⑥を使うため

$p^2(qt+rs+qr+qs+rt+st+pq+pt+pr+ps)-p^3(q+r+s+t)$と変形

これを同様にp^2,q^2,r^2,s^2,t^2について施すと②、⑥、①から

$2\left\{-p^3(1-p)-q^3(1-q)-r^3(1-r)-s^3(1-s)-t^3(1-t)\right\}$

$=2\left\{(p^4+q^4+r^4+s^4+t^4)-(p^3+q^3+r^3+s^3+t^3)\right\}=2(65-1)=128$

従って　$112+6\lambda+2\times 17\times(-8)+128=(-8)^2$

これから　$\lambda = pqrs+pqrt+qrst+prst+pqst=16$・・・・・⑨

残るは$pqrst$の値、因数の組合せから次式の展開を考える。

$(pqr+qrs+rst+rsp+pqs+pqt+prt+qrt+qst+pst)(pq+qr+rs+st+pt$

$+pr+qs+qt+rt+ps)$

$=10pqrst+3pqrt(p+q+r+t)+3pqrs(p+q+r+s)+3qrst(q+r+s+t)$

$+3prst(p+r+s+t)+3pqst(p+q+s+t)+$その他の項

$=-5pqrst+3\times 16\times 1+$その他の項

その他の項

$=p^2q^2(r+s+t)+q^2r^2(p+s+t)+r^2s^2(p+q+t)+s^2t^2(p+q+r)+p^2t^2(q+r+s)$

$+p^2r^2(q+s+t)+q^2s^2(p+r+t)+q^2t^2(p+r+s)+r^2t^2(p+q+s)+p^2s^2(q+r+t)$

$=p^2q^2(1-p-q)+q^2r^2(1-q-r)+r^2s^2(1-r-s)+s^2t^2(1-s-t)+p^2t^2(1-p-t)$

$+p^2r^2(1-p-r)+q^2s^2(1-q-s)+q^2t^2(1-q-t)+r^2t^2(1-r-t)+p^2s^2(1-p-s)$

p^3,q^3,r^3,s^3,t^3で括り、⑧と合わせて

$=112-p^3(q^2+r^2+s^2+t^2)-q^3(p^2+r^2+s^2+t^2)-r^3(p^2+q^2+s^2+t^2)$

$-s^3(p^2+q^2+r^2+t^2)-t^3(p^2+q^2+r^2+s^2)$

$=112-p^3(17-p^2)-q^3(17-q^2)-r^3(17-r^2)-s^3(17-s^2)-t^3(17-t^2)$

$=112-17\times 1+1=96$

従って　$-5pqrst+48+96=(-8)^2$　これから$pqrst=16$・・・⑩

①，⑥，⑦，⑩からp,q,r,s,tを解とする5次方程式は

$k^5-k^4-8k^3+8k^2+16k-16=0$　左辺を$f(k)$と置き　$f(1)=0, f(2)=0$から

因数分解して　　$(k-1)(k-2)^2(k+2)^2=0$

これから　$(p,q,r,s,t)=(1,2,2,-2,-2)$　およびこの置換が求めるもの。

x, y, z, w, uは先の置換えの式より

$p=\dfrac{1}{zwux}, q=\dfrac{1}{wuxy}, r=\dfrac{1}{uxyz}, s=\dfrac{1}{xyzw}, t=\dfrac{1}{yzwu}$に$p, q, r, s, t$を代入

整理して辺々掛けると $(xyzwu)^4=\dfrac{1}{16}$ 　よって　$xyzwu=\pm\dfrac{1}{2}$

この式と置換えの式から

$(x, y, z, w, u)=(\pm 1, \mp\dfrac{1}{2}, \mp 1, \mp 1, \pm 1)$ （複号同順）　・・・・・・・・⑪

これら異符号の解の組は方程式①～⑤、また置換え前の原方程式を満たすから　⑪およびこれらの置換が求める解である。

以　上

参考文献　初等数学第 83 号　p.114 で提案の連立方程式の次数 up に
対応したもの。（今回はｎ＝5、前回は n=4）