数実研会員　村田　洋一

# ちょっと面倒な等式の証明

「私の数学散歩道」掲載問題の改作、今回の新作問題等により、下記を取り上げました。数学Ｉの問題といっても少しやりがいがあります。余韻を楽しんで下さい。

問題

(1) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}+2\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}}-\sqrt[4]{28+16\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ を示せ。

(2) 次の等式を証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}=0$$

(3) 次の各式を整係数の範囲で因数分解せよ。

1) $(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$　　2) $x^{12}+x^{10}+4x^8+3x^6-x^4-4x^2-4$

3) $x^4+x^3-5x-3$

解答

(1) 左辺 第１項－第３項を$\alpha$、同第２項を$\beta$、左辺全体を$\gamma$ とおくと$\gamma=2\beta+\alpha$

$$\alpha^2=\sqrt{28-2\sqrt{192}}+\sqrt{28+2\sqrt{192}}-2\sqrt[4]{28^2-16^2\cdot 3}$$

$$=(4+\sqrt{12})+(4-\sqrt{12})-2\sqrt[4]{16}=4 \qquad \alpha=\pm 2$$

ここで(1)式の根号内＝$(28-16\sqrt{3})-(28+16\sqrt{3})=-32\sqrt{3}<0$より$\alpha=-2$

また$\beta=a+b\sqrt{3}$ として　$\beta^3=(a^3+9ab^2)+\sqrt{3}(3a^2b+3b^3)$

$a(a^2+9b^2)>0, b(a^2+b^2)>0$　かつ$a\neq 0, b\neq 0$ より $a>0, b>0$

$a^3+9ab^2=a(a^2+9b^2)=37$　・・・①

$a^2b+b^3=10$　・・・②

②より　$b(a^2+9b^2)=10+8b^3$　・・・③

①÷③　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{37}{10+8b^3}$　　$\therefore\quad a=\dfrac{37b}{2(5+4b^3)}$　②に代入し分母を払うと

$1369b^3+4b^3(5+4b^3)^2=40(5+4b^3)^2$　これは$b^3$ についての三次方程式で

$b^3 = s$ として整理すると　$f(s) = 64s^3 - 480s^2 - 131s - 1000 = 0$　（$s > 0$）
二次以下の係数が負、$f(1) = -1547$　$f(2) = -2670$ などから　$s$ の絶対値は
ある程度大きい。　また　$f'(s) = 192s^2 - 960s - 131 = 0$ から $s = -0.13, 5.13$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 0 | ・・・ | 5.13 | ・・・ |
| $f'(s)$ | | (−) | 0 | (＋) |
| $f(s)$ | | ↓ | | ↑ |

右記増減表から

$f(10) = 13690$　$f(9) = 5597$　$f(8) = 32768 - 30720 - 1048 - 1000 = 0$

$b^3 = 8$ より実数であるから $b = 2$、$a = 1$　　$\beta = 1 + 2\sqrt{3}$　(答)

これから　左辺＝$2\beta + \alpha = 2(1 + 2\sqrt{3}) - 2 = 4\sqrt{3}$　　証明終り

(2)　次の等式を証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0$$

（証明）

前 2 項＝$\dfrac{1}{a-b} \cdot \dfrac{a^2(b-c)(b-d) - b^2(a-c)(a-d)}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}$

最初の項の分子＝$-a^2bd - a^2bc + a^2cd + ab^2d + ab^2c - b^2cd$

$$= d\{c(a^2 - b^2) - ab(a-b)\} - abc(a-b)$$

$$= (a-b)\{cd(a+b) - ab(c+d)\}$$

第 3 項と合せて

前 3 項＝$\dfrac{cd(a+b) - ab(c+d)}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)} + \dfrac{c^2}{(c-d)(c-a)(c-b)}$

$$= \frac{1}{(a-c)(b-c)} \cdot \frac{(c-d)\{cd(a+b) - ab(c+d)\} + c^2(a-d)(b-d)}{(a-d)(b-d)(c-d)}$$

分子$= c^2d(a+b) - abc(c+d) - cd^2(a+b) + abd(c+d) + c^2ab - ac^2d$
$- bc^2d + c^2d^2 = d^2(ab - ac - bc + c^2) = d^2(c-a)(c-b)$

前 3 項＝$= \dfrac{1}{(a-c)(b-c)} \cdot \dfrac{d^2(c-a)(c-b)}{(a-d)(b-d)(c-d)} = \dfrac{d^2}{(a-d)(b-d)(c-d)}$

前 4 項計＝$= \dfrac{d^2}{(a-d)(b-d)(c-d)} + \dfrac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0$

従って　左辺＝右辺で与えられた等式が成り立つ。　　　　　　　証明終り

(3) 次の各式を整係数の範囲で因数分解せよ。

1)　$(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$

二項定理 $(a+b)^n$ で $n=5$ のとき　二項係数は 1　5　10　10　5　1 より

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$　1)を P と置いて

$P = (a+b)^5 + 5(a+b)^4c + 10(a+b)^3c^2 + 10(a+b)^2c^3 + 5(a+b)c^4$

$+ c^5 - a^5 - b^5 - c^5$　　ここで次行の結果を利用して

$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) = 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)$ より

$\mathrm{P} = 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2) + 5(a+b)^4c + 10(a+b)^3c^2 + 10(a+b)^2c^3$

$+ 5(a+b)c^4 = 5(a+b)\{ab(a^2 + ab + b^2) + (a+b)^3c + 2(a+b)^2c^2$

$+ 2(a+b)c^3 + c^4\}$　　$P$ で　$c = -a,$　$c = -b$ と置くと　$P = 0$ で、$P$ は

$c + a,$　$c + b$　の因数を持つ。また $P$ は 5 の倍数であることは明らか。

$c = -a$　で組立除法を行うと　$c^3, c^2, c,$ 定数項の係数は各々　1,　$a + 2b$ ,

$a^2 + 2ab + 2b^2$,　$a^2b + ab^2 + b^3$　　同様にして　$c = -b$ で組立除法を行うと

$c^2, c,$ 定数項の係数は各々　1,　$a+b$ ,　$a^2 + ab + b^2$ となる。

$c^2 + (a+b)c + a^2 + ab + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$　より

$\therefore P = 5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$　　(答)

2)　$x^{12} + x^{10} + 4x^8 + 3x^6 - x^4 - 4x^2 - 4$　この式 $f(x)$ は偶関数で $x^2 = t$　とした

$g(t) = t^6 + t^5 + 4t^4 + 3t^3 - t^2 - 4t - 4$　で

$g(-1) = 1 - 1 + 4 - 3 - 1 + 4 - 4 = 0$

| 組立て除法で | $-1$ | 1 | 1 | 4 | 3 | －1 | -4 | －4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | -1 | 0 | -4 | 1 | 0 | 4 |
| | | 1 | 0 | 4 | -1 | 0 | -4 | 0 |

従って　$g(t)=(t+1)(t^5+4t^3-t^2-4)=(t+1)\left\{t^2(t^3-1)+4(t^3-1)\right\}$

$=(t+1)(t^2+4)(t^3-1)=(x^2+1)(x^4+4)(x^6-1)$

最後の式の第 2 項,第 3 項は更に因数分解できるから

第 2 項＝$(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

第 3 項＝$(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

これらを纏めて下記のように因数分解される。

$f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2+2x+2)(x-1)(x^2-x+1)(x^2-2x+2)$　（答）

また 右辺の式を展開せよ。と問題にしても面白いかも知れない。

注）本問で $f(\pm 1)=0$ はすぐ見つかりますが、その後の展開が面倒になります。

3） $x^4+x^3-5x-3$ を $f(x)$ として $f(\pm 1), f(\pm 2), f(\pm 3)$ いずれも 0 とならないから

与式は 整係数の範囲で一次式を持たず $f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ と書ける。

従って $x^4+x^3-5x-3=x^4+(c+a)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd$

係数比較して　$b+d+ac=0$・・・①　　$c+a=1$・・・②

$ad+bc=-5$・・・③　　$bd=-3$・・・④

$a,b,c,d$ は 整係数だから④で $b=-1, d=3$ のとき ①より $2+ac=0$、③より $c=3a+5$

この２式より　$(a+1)(3a+2)=0$　整数条件より $a=-1, c=2$

同様に $b=3, d=-1$ のとき　$2+ac=0, -a+3c=-5$　このとき $a=2, c=-1$

この場合分けはいずれも同じで、因数分解の結果はかわらない。

よって　$x^4+x^3-5x-3=(x^2-x-1)(x^2+2x+3)$

以　上