私の数学散歩道(４８)　　　　　　　　　　　　　　　　　　数実研会員　村田　洋一

因数分解と方程式の解法が決め手となる問題について

問題１～３は特別な、かつクイズ的な２変数の不定方程式、問題４は高次分数関数の積分の可能性を問うもので、解を得るには因数分解と方程式をいかにうまく解くかがポイントになる。今回はこのタイプの問題を作ってみた。

１． $x, y\ (x > y)$ は正の整数で、立法数 x^3 と y^3 の差は 61 である。これら２数は？

題意から　$x^3 - y^3 = 61$　因数分解して　$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 61 \times 1$　・・。①

ここで、①の第２項から第１項を引いた式を $f(x, y)$ とする。

$$(x^2+xy+y^2)-(x-y) = (x+\frac{y-1}{2})^2 + \frac{3y^2+6y-1}{4} = (x+\frac{y-1}{2})^2 + \frac{3}{4}(y+1)^2 - 1 > 0$$

$f(x, y)$ は増加関数、①の右辺が素数 61 と１の積より　$x - y = 1$　・・②

$x^2+xy+y^2 = 61$・・・③となる。　②より $y = x-1$ を③に代入、整理して

$x^2 - x - 20 = 0$　これから $x = 5$ のとき $y = 4$　$x = -4$ のとき $y = -5$ で不適。

２． $x, y\ (x > y)$ は正の整数で、４乗数 x^4 と y^4 の差は 175 である。これら２数は？

題意から　$x^4 - y^4 = (x^2+y^2)(x+y)(x-y) = 175 = 5^2 \times 7 \times 1$　$(x^2+y^2)-(x+y)$

$$= (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} \geq (2-\frac{1}{2})^2 + (1-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} \geq 2$$

これから $x^2+y^2 > x+y > x-y$ は明らか。右辺は素数の積であるから因数の組合せは

①　$x^2+y^2 = 35, x+y = 7, x-y = 1$　②$x^2+y^2 = 25, x+y = 7, x-y = 1$

①の前２式から $49 - 2xy = 35$　$xy = 7$　このとき x, y は無理数で不適。

②の前２式から $49 - 2xy = 25$　$xy = 12$　$x = 4$　$y = 3$　これは $x - y = 1$ を満たす。

３． x, y は相異なる正の整数で、５乗数 x^5 と y^5 の和は 1,267 である。これら２数は？

題意から $x^5 + y^5 = 1,267$　$(x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = 7 \times 181 \times 1$　・・①

x, y は正の整数で右辺が素数の積、$x+y \geq 2+1=3$ より、①の左辺第１項の

$x+y=7,\ x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=181$・・② でなければならない。

②式を変形し $x+y=7$ を代入 $\left\{(x+y)^2-2xy\right\}^2-xy\left\{(x+y)^2-2xy\right\}-x^2y^2$

$=(x+y)^4-5xy(x+y)^2+5x^2y^2=181$ 　これから $x^2y^2-49xy+444=0$

$xy=\dfrac{49\pm25}{2}$ $xy=12, 37$ 　$xy=12$ のとき $x+y=7$ より $(x, y)=(3,4),(4,3)$

同様に $xy=37$ のとき、x, y は共に複素数となり適さない。

４．不定積分 $I_6=\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^6}$ に関連し、次の問いに答えよ

（1）$1+x^6$ を二次三項式の３個の因数の積に因数分解せよ。

（2）$\dfrac{1}{1+x^6}$ を(1)の結果に従い部分分数に分解せよ

（3）関数 $\dfrac{1}{1+x^6}$ は積分可能かどうか判定せよ。

（1）$1+x^6=(x^2)^3+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)=(x^2+1)\left\{(x^2+1)^2-3x^2\right\}$

$=(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$

（2）二段階に分けて考える。　第一段$=\dfrac{1}{1+x^6}=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{cx^3+dx^2+ex+f}{x^4-x^2+1}$ と

置き、右辺を通分したときの分子

$=(a+c)x^5+(b+d)x^4+(-a+c+e)x^3+(-b+d+f)x^2+(a+e)x+b+f$

係数比較して　$a+c=0$: ①　$b+d=0$: ②　$-a+c+e=0$: ③

$-b+d+f=0$: ④　$a+e=0$: ⑤　$b+f=1$: ⑥　②－④より $2b-f=0$

これに　⑥を加え$3b=1$　$b=\dfrac{1}{3}$　これと⑥から　$f=\dfrac{2}{3}$ ②より　$d=-\dfrac{1}{3}$

①＋③より $2c+e=0$　⑤と合わせ $a=2c$ これと①から $c=0, a=0$ ⑤から

$e=0$ これで①～⑥が満たされるから $\dfrac{1}{1+x^6}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{x^2-2}{x^4-x^2+1})$ となる。

第二段＝$\dfrac{x^2-2}{x^4-x^2+1}=\dfrac{ax+b}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\dfrac{cx+d}{x^2-\sqrt{3}x+1}$　第一段同様　右辺の分子は

$(ax+b)(x^2-\sqrt{3}x+1)-(cx+d)(x^2+\sqrt{3}x+1)=(a-c)x^3+(-\sqrt{3}a+b-\sqrt{3}c-d)x^2$

$+(a-\sqrt{3}b-c-\sqrt{3}d)x+(b-d)$ 係数比較して　$a-c=0$：①　$b-d-\sqrt{3}(a+c)=1$：

：②　$a-c-\sqrt{3}(b+d)=0$：③　$b-d=-2$：④　①と④を②に代入

$-2-\sqrt{3}(a+c)=-2-2\sqrt{3}c=1$ $c=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　また①を③に代入して

$b+d=0$ この式と④から $b=-1, d=1$　第一段とあわせ求める部分分数分解は

$$\frac{1}{1+x^6}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x-1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right)\quad\cdot\cdot\cdot\cdot\text{(A)}$$

(3)　上記（A）式の第１項は容易に積分され$\tan^{-1}x$、第２項、第３項は

A,B,C,D を定数と見て $\dfrac{\frac{\sqrt{3}x}{2}+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}=\dfrac{A(2x+\sqrt{3})+B}{x^2+\sqrt{3}+1}$ から　$A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}, B=\dfrac{1}{4}$

同様に　$\dfrac{\frac{\sqrt{3}x}{2}-1}{x^2-\sqrt{3}x+1}=\dfrac{C(2x-\sqrt{3})+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}$　から　$C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}, D=-\dfrac{1}{4}$

例えば　第２項＝$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1}$　積分して

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\log(x^2+\sqrt{3}x+1)+\dfrac{1}{2}\tan^{-1}(2x+\sqrt{3})$　同様にして第３項を積分すると

$\frac{\sqrt{3}}{4}\log(x^2-\sqrt{3}x+1)-\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x-\sqrt{3})$　積分を正しく求めるには符号と係数に

注意して纏めればよいだけである。I_6 は積分可能である。

（参考資料）

1）旺文社　高校数学解法事典

問題１は 上記に掲載の数表（立法表）から逆算、問題２．３．は x, y に適当な

数をあてはめ問題としたもの。

２）数実研レポート　私の数学散歩道(4)　：　問題４．発想の源

$\int \frac{dx}{x^7-1}$ を電卓と筆算で計算してみよう！

060-0062 札幌市中央区南２条西１丁目 8-1　アーバンサークル 508 号

村田　洋一　　E メール：　y-murata-yh@nifty.com