私の数学散歩道（50）

シンプルな三元四次連立方程式を解いてみたが、それでも大変

数実研会員　　村田　洋一

今回は題記にチャレンジした。　一般の形ではとても解けないので、係数がすべて 1 の簡単な方程式を考えてみた。それでも結構時間がかかり、解くのが大変であった。

係数を 1 以外にした場合でさえ、また次数を上げ 3,4,5 次の組み合わせにした場合は 5 次以上の方程式の一般的解法がないことを考え合わせ、解の組を代数的に求めるのは一層困難になると思われる。下記①～③の方程式を解いてみてしみじみ感じた。

（問題）　次の連立方程式を解け。

$x^2+y^2+z^2=14$・・・①

$x^3+y^3+z^3=20$・・・②

$x^4+y^4+z^4=98$・・・③

①　～③を x, y, z の基本対称式で表わす。$x+y+z=a, xy+yz+zx=b, xyz=c$ と

置くと　①より $(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=a^2-2b=14$ ・・④

②　より $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz=a(a^2-3b)+3c=20$ ・・⑤

③　より $(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=(a^2-2b)^2-2\{(xy+yz+zx)^2-$

$2xyz(x+y+z)\}=14^2-2(b^2-2ac)=98$

これから　$b^2-2ac=49$ ・・⑥　　④に　$a(a\neq 0)$ を掛けて $a^3-2ab=14a$

この式と⑤より　$a^3-3ab=20-3c$　ab を消去して　$c=\dfrac{1}{6}a^3-7a+\dfrac{20}{3}$

また　④より $b=\dfrac{a^2-14}{2}$　b, c を⑥へ代入して整理する。

$\dfrac{(a^2-14)^2}{4}-\dfrac{a(a^3-42a+40)}{6}=49$ $3(a^2-14)^2-4a(a^3-42a+40)=588$

$a(a^3-84a+160)=a(a-2)(a-8)(a+10)=0 \qquad a=0,2,8,-10$

$a\neq 0$ で計算し $a=0$ が出てきた。この場合の吟味は最後に検討する。

1）$a=2$ のとき $b=f(a), c=f(a)$ より $b=-5, c=-6$ 　これから t_1,t_2,t_3 を解とする三次方程式は $t^3-2t^2-5t+6=0$ から $(t+2)(t-1)(t-3)=0 \quad t=-2,1,3$

2）$a=8$ のとき $b=25, c=36$ から $t^3-8t^2+25t-36=0 \quad (t-4)(t^2-4t+9)=0$

$t=4, 2\pm\sqrt{5}i$

3) $a=-10$ では $b=43, c=-90$ から $t^3+10t^2+43t+90=0 \quad (t+5)(t^2+5t+18)=0$

$t=-5, \dfrac{-5\pm\sqrt{47}i}{2}$

4) $a=0$ のとき $b=-7, c=\dfrac{20}{3}$ から $3t^3-21t-20=0$ 　目視で因数が見つかりそうでないので、$f(t)=3t^3-21t-20$ と置く。$f'(t)=3(3t^2-7)=0 \qquad t=\pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\pm 1.53$

$f(t)$ は $t=-\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ で極大値 1.4 を、$t=\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ で極小値 —41.4 をとる。

$f(t)$ の振幅が大きいので $-3\leq t\leq 4$ の間にある $f(t)$（t は整数）の値を調べた。

t	- 3	- 2	$-\sqrt{\dfrac{7}{3}}$	-1	0	1	$\sqrt{\dfrac{7}{3}}$	2	3	4・・
$f'(t)$		（+）	0		（−）		0		（+）	
$f(t)$	-38	-2	1.4	-2	-20	-38	-41.4	-38	-2	88
		↑	（極大値）	↑			（極小値）			↑

上記のことから 3 個の解は↑ の位置（-2<t＜$-\sqrt{\dfrac{7}{3}}, -\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ ＜ t ＜-1, 3<t<4)にあることがわかる。　ke!san でカルダノの方法により求めると

３個の解は　$t=-1.8348,-1.1980,3.0328$ となる。$a=0$ の場合も適し、以上を

纏めて解は次の 24 組となる。（3 個の異なる解 3!× 4 組＝24）

（$x,y,z)=$（-2,1,3）,(1,3,-2),(3,-2,1),（-2,3,1）,(1,-2,3),(3,1,-2)

$(4,2+\sqrt{5}i,2-\sqrt{5}i)$, $(2+\sqrt{5}i,2-\sqrt{5}i,4),(2-\sqrt{5}i,4,2+\sqrt{5}i)$

$(4,2-\sqrt{5}i,2+\sqrt{5}i)$, $(2+\sqrt{5}i,4,2-\sqrt{5}i),(2-\sqrt{5}i,2+\sqrt{5}i,4)$

$$\left(-5,\frac{-5+\sqrt{47}i}{2},\frac{-5-\sqrt{47}i}{2}\right),\left(\frac{-5+\sqrt{47}i}{2},\frac{-5-\sqrt{47}i}{2},-5\right),\left(\frac{-5-\sqrt{47}i}{2},-5,\frac{-5+\sqrt{47}i}{2}\right)$$

$$\left(-5,\frac{-5-\sqrt{47}i}{2},\frac{-5+\sqrt{47}i}{2}\right),\left(\frac{-5+\sqrt{47}i}{2},-5,\frac{-5-\sqrt{47}i}{2}\right),\left(\frac{-5-\sqrt{47}i}{2}、\frac{-5+\sqrt{47}i}{2},-5\right)$$

$$(-1.8348,-1.1980,3.0328),(-1.1980,3.0328,-1.8348),(3.0328,-1.8348,-1.1980)$$
$$(-1.8348,3.0328,-1.1980),(-1.1980,-1.8348,3.0328),(3.0328,-1.1980,-1.8348)$$

以　上