私の数学散歩道（51）

見掛け上簡単な四元四次連立方程式を解いてみたが、結構大変

数実研会員　　村田　洋一

今回はインタネット OKWAVE に掲載の題記方程式にチャレンジした。質問者の全面回答要求に一文字を消去し残り３式に代入、以降地道にとの簡単なヒントに興味を覚え トライしたが、思いのほか時間がかかった。

　しかし何とか解に辿りついたので発表する。煩雑な解答になったが、要領の良い結果をお教え願えれば幸いです。

(問題)　次の連立方程式を解け。

$$a+b=1 \quad ・・・①\qquad ac+bd=\frac{1}{2}\quad ・・・②$$

$$ac^2+bd^2=\frac{1}{3}・・・③\qquad \mathrm{ac}^3+bd^3=\frac{1}{4}\quad ・・・④$$

解）②から④を変形

$$bd=\frac{1}{2}-ac・・\quad ②' \qquad bd^2=\frac{1}{3}-ac^2・・③' \qquad \mathrm{bd}^3=\frac{1}{4}-ca^3・・④'$$

②′× d 一③′　$ca(d-c)=\frac{1}{2}d-\frac{1}{3}・・⑤$　　⑥÷⑤ より

③′× d 一④′　$c^2a(d-c)=\frac{1}{3}d-\frac{1}{4}・・⑥$　　$c=\dfrac{\frac{d}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{d}{2}-\frac{1}{3}}=\dfrac{4d-3}{2(3d-2)}$

これをd について解くと　$d=\dfrac{4c-3}{2(3c-2)}$　・・・⑦

また　③′÷②′　$d=\dfrac{\frac{1}{3}-ac^2}{\frac{1}{2}-ac}$　同様に　④′÷③′　$d=\dfrac{\frac{1}{4}-ac^3}{\frac{1}{3}-ac^2}$　等置して展開

$(\frac{1}{3}-ac^2)^2=(\frac{1}{2}-ac)(\frac{1}{4}-ac^3)$　整理して　$a(6c^3-8c^2+3c)=\frac{1}{6}$

従って　$a=\frac{1}{6c(6c^2-8c+3)}$　・・・⑧

一方　①×c −②　　$b(c-d)=c-\frac{1}{2}$　∴　⑦と合わせ　$b=\frac{c-\frac{1}{2}}{c-d}$

$$=\frac{c-\frac{1}{2}}{c-\frac{4c-3}{2(3c-2)}}=\frac{(2c-1)(3c-2)}{6c^2-8c+3}$$　$bd=\frac{(2c-1)(4c-3)}{2(6c^2-8c+3)}$　⑧と合わせ

$$ac+bd=\frac{1}{6(6c^2-8c+3)}+\frac{8c^2-10c+3}{2(6c^2-8c+3)}=\frac{1}{2}$$

$1+3(8c^2-10c+3)=3(6c^2-8c+3)$　　$6c^2-6c+1=0$　　$c=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$

1）$c=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ のとき　⑧より　$a=\frac{1}{(3+\sqrt{3})\left\{2+\sqrt{3}-\frac{4}{3}(3+\sqrt{3})+3-\right\}}$

$$=\frac{3}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{1}{2}$$　①より　$b=\frac{1}{2}$　　⑦より

$$d=\frac{\frac{2}{3}(3+\sqrt{3})-3}{3+\sqrt{3}-4}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3(\sqrt{3}-1)}=\frac{(2\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}+1)}{6}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

2）$c=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ のとき　⑧より　$a=\frac{6}{(3-\sqrt{3})(6+2\sqrt{3})}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{2}$　　$d=\frac{\frac{2}{3}(3-\sqrt{3})-3}{(3-\sqrt{3})-4}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3(\sqrt{3}+1)}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

以上のことから　$a=b=\frac{1}{2},c=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6},d=\frac{3\mp\sqrt{3}}{6}$（複号同順）が

求める解である。

念のため複号が＋の分について検算を示しておく。

$$a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, ac+bd=\frac{1}{2}(\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{3-\sqrt{6}}{6})=\frac{1}{2}$$

$$ac^2+bd^2=\frac{1}{2}\left\{(\frac{3+\sqrt{3}}{6})^2+(\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{36}=\frac{1}{3}$$

$$ac^3+bd^3=\frac{1}{2}\left\{(\frac{3+\sqrt{6}}{6})^3+(\frac{3-\sqrt{6}}{6})^3\right\}=\frac{1}{2}(\frac{54+30\sqrt{3}}{216}+\frac{54-30\sqrt{3}}{216})=\frac{1}{4}$$

結果的には　$a+b=1, c+d=1$ で、連立方程式は形式上４次だが解が２組になる。なお本稿で 幾つも割り算をしているが、分母は０でないことを確認済み。

以　上

（参考資料）

1）　インタネット OKWAVE　未知数４つ、式４つの方程式の問題です。

〒065-0005　札幌市東区北５条東 10 丁目 16-1　イリス苗穂 336

村田　洋一　　Ｅメール　y-murata-yh@nifty.com