

特別な形の4次方程式を解いてみよう!

数実研会員 村田 洋一

今回は (1)散歩道(50)の3元4次連立方程式から一つの4次方程式を導く、(2)二つの複素数解を持つ2次方程式の積から4次方程式を作り、それらを解くことを考えた。

(問題) 次の4次方程式を因数分解により解け。

$$(1) (245+28x-x^2)^2-3,200x=22,400$$

$$(2) x^4+2x^2-x+2=0$$

(解) (1) 左辺をまともに展開、計算しては収拾がつかなくなる。因みに展開してみると

$$x^4-56x^3+294x^2+10,520x+37,625=0 \text{ から、筆算で因数を見つけるのは困難}$$

と思われる。(1)を変形して $\frac{1}{1600}(x^2-28x-245)^2=2(x+7) \cdots \textcircled{1}$

$$(x+7)^2(x-35)^2-3200(x+7)=(x+7)\{(x+7)(x-35)^2-3200\}$$

$$=(x+7)(x^3-63x^2+735x+5375) \quad \text{ここまできると 最後の式の第2式} x \text{の1}$$

次と定数項が5の倍数であり、符号を考え $x=-5$ が一つの候補になると推定可。

$x=-5$ のとき0になるから組立除法より

-5	1	-63	735	5375
		-5	340	-5375
	1	-68	1075	0

$$\text{従って (1) は } (x+7)(x+5)(x-25)(x-43)=0 \quad x=-5,-7,25,43 \text{ (答)}$$

($x=-5$ 算出の別解)

$$\textcircled{1} \text{ より } \frac{(x+7)^2(x-35)^2}{40^2}=2(x+7) \quad \text{これを } a^2=2b+14 \text{ と見る。}$$

グラフは **b** 軸対称であるから、 $a > 0$ で最小の整数解は $a = 2, b = -5$

これから右辺に $x = -5$ を代入し $\frac{(x+7)(x-35)}{40} = \pm 2$ が成り立てばよい。複号

が $(+)$ のとき $x^2 - 28x - 325 = 0$ これは整数解を持たず不適。 $(-)$ のとき

$$x^2 - 28x - 165 = (x - 33)(x + 5) = 0 \quad x = -5 \text{ のとき両辺が一致, } (x + 5) \text{ が因数で}$$

ある。あとは $(x + 7)$ で括りだし整理すると, (1) の 4 つの解を得る。

(本問作成の根拠)

数学散歩道(50)で提起した x, y, z の 3 元 4 次連立方程式で $x + y + z = a,$

$xy + yz + zx = b, xyz = c$ と置き a, b, c の基本方程式で表示した。

詳細は当該レポートを参照願います。

$$a^2 - 2b = 14 \cdots \textcircled{1} \quad b^2 - 2ac = 49 \cdots \textcircled{2} \quad c = \frac{1}{6}a^3 - 7a + \frac{20}{3} \cdots \textcircled{3}$$

$$b^2 - 49 = 2ac \quad (\textcircled{3} \text{ を代入}) = \frac{a^4}{3} - 14a^2 + \frac{40}{3}a \quad (a^2 = 2b + 14 \text{ を代入, 整理})$$

$$\frac{40}{3}a = -\left(\frac{b^2}{3} - \frac{28}{3}b - \frac{245}{3}\right) \quad a = -\frac{1}{40}(b + 7)(b - 35)$$

$$\textcircled{1} \text{ より } a^2 - 2b = \frac{(b + 7)^2(b - 35)^2}{40^2} - 2b = 14 \quad b \text{ は } x \text{ の解の一つであるから}$$

$$\frac{(x + 7)^2(x - 35)^2}{40^2} - 2x = 14 \quad \text{として作ったもの。}$$

(解) (2) 左辺を $f(x)$ と置く。一次式の因数を持つとして $f(\pm 1), f(\pm 2)$ とも 0

にならないから $f(x)$ は一次式の因数を持たない。 a, b, c, d を整数として

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 - x + 2 &= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ &= x^4 + (c + a)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd \end{aligned}$$

$$\text{係数比較して} \quad a + c = 0 \cdots \textcircled{1} \quad b + d + ac = 2 \cdots \textcircled{2}$$

$$ad+bc=-1 \cdots \textcircled{3} \qquad bd=2 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ より } b+d=a^2+2 \cdots \textcircled{5} \quad \textcircled{1} \text{ と } \textcircled{3} \text{ より } a(b-d)=1 \quad b-d=\frac{1}{a} \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5} + \textcircled{6} \text{ より } b = \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{1}{a} + 2 \right) = \frac{a^3 + 2a + 1}{2a} \quad \textcircled{4} \text{ より } d = \frac{2}{b} = \frac{4a}{a^3 + 2a + 1}$$

$$\text{これら } b, d \text{ と } \textcircled{5} \text{ より } \frac{a^3 + 2a + 1}{2a} + \frac{4a}{a^3 + 2a + 1} = a^2 + 2$$

$$(a^3 + 2a + 1)^2 + 8a^2 = 2a(a^3 + 2a + 1)(a^2 + 2) \quad \text{整理して} \quad a^6 + 4a^4 - 4a^2 - 1 = 0$$

$$\text{因数分解を続けて} \quad (a^3 + 1)(a^3 - 1) + 4a^2(a^2 - 1) = (a + 1)(a - 1) \{ (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1) \\$$

$$+ 4a^2 \} = (a + 1)(a - 1) \{ (a^2 + 1)^2 - a^2 + 4a^2 \} = (a + 1)(a - 1)(a^4 + 5a^2 + 1) = 0$$

$$\text{これから} \quad a = -1, b = 1, c = 1, d = 2 \qquad f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 2) = 0$$

$$a = 1, b = 2, c = -1, d = 1 \qquad f(x) = (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\text{上記は因数分解としては同じもの。方程式の解は } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

以 上