

三角関数関連あれこれ

数実研会員 村田 洋一

今回は下記三角関数関連の3問をとりあげた。いずれも癖のある問題と思う。

(問題 1) 次の4次の三角方程式を解け。

$$2\sin^4 x + 2\cos^4 x + 3\tan^4 x = 4 \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{3})$$

解) $\sin^2 x = t$ と置くと $t \geq 0$, また $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t$ だからで

$$2t^2 + 2(1-t)^2 + \frac{3t^2}{(1-t)^2} = 4 \quad \text{この分母を払って/}$$

$$2t^2(1-t)^2 + 2(1-t)^4 + 3t^2 = 4(1-t)^2 \quad \text{展開して}$$

$$2t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 2(t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1) + 3t^2 = 4(t^4 - 2t^2 + 1) \quad \text{整理して}$$

$$4t^4 - 12t^3 + 13t^2 - 2 = 0 \quad \text{左辺を } f(t) \text{ と置くと}$$

$$f'(t) = 16t^3 - 36t^2 + 26t = 2t(8t^2 - 18t + 13) = t \left\{ 16(t - \frac{9}{8})^2 + \frac{23}{8} \right\} \geq 0 \quad t \geq 0$$

よって $f(t)$ は $t \geq 0$ で単調に増加する。また $f(t)$ の最高次の係数と定数項の

$$\text{比較から } t = \frac{1}{2} \text{ として見ると } f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{12}{8} + \frac{13}{4} - 2 = 0 \quad \text{より}$$

$$f(t) = (2t-1)(2t^3 - 5t^2 + 4t + 2) = 0 + 4t + 2 = 0 \text{ と因数分解される。}$$

この第2項から kel'san により t の3個の解を求めると

$$t_1 = -0.3379, t_{2,3} = 1.4189 \pm 0.9724i \quad (\text{小数点第5位以下略})$$

従って求める t の正の実数解は $\frac{1}{2}$ のみ。これから負根を除いて $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より

求める解は $x = \frac{\pi}{4}$

(問題 2.)

$f(\theta)$ は θ に無関係な定数であることを 微分を用いないで示せ。 ($a > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

$$f(\theta) = \frac{\left| a \tan \theta - a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \right|}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

$$f(\theta) = \frac{a \left| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \right|}{\frac{1}{\cos \theta}} = a \left| \sin \theta - \cos \theta \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \right|$$

$$\text{ここで } \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2})^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{従って } f(\theta) = a \left| \sin \theta - \cos \theta \cdot \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right| = a \quad \text{で定数であることが証明された。}$$

(参考) 微分を使った場合、やや計算が複雑だが・・・。(略解)

$$\text{条件より } f(\theta) = a \left\{ \cos \theta \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) - \sin \theta \right\}$$

$$f'(\theta) = a \left\{ -\sin \theta \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + \frac{\cos \theta}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} - \cos \theta \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-2 \sin \theta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + \cos \theta}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} - \cos \theta \right\} a = \left\{ \frac{-\sin \theta \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos \theta}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} - \cos \theta \right\} a$$

$$= \left\{ \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin \theta} - \cos \theta \right\} a = 0 \quad \text{よって } f(\theta) \text{ は定数である。}$$

(問題 3) 次の2次の三角方程式を解け。 $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

$$\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{12}) + \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) = 1$$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ となる t を見つければ良い、と考えて

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha - \frac{\pi}{3})\right\} = \cos(\frac{5}{6}\pi - \alpha) \quad \text{なので}$$

$$\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{12}) + \cos^2(\frac{5}{6}\pi - \alpha) = 1 \quad \text{ここで} \quad t = \alpha + \frac{\pi}{12} = \frac{5}{6}\pi - \alpha$$

$$2\alpha = \frac{3}{4}\pi \quad \text{これから} \quad \alpha = \frac{3}{8}\pi \quad \text{が解となる。 (因みに} t = \frac{11}{24}\pi \text{)}$$

注) 本問には他に ① 冪公式を使って1次の $\sin 2\alpha$ に関する式
に変形、② 左辺第1,2項を加法定理で展開し強引に計算する
方法などがある。

参考資料

問題1. 今回自作、問題2, 3 拙書 私の数学散歩道 改作