

## 特殊な高次の連立方程式—遊び心の観点から別解を探る

数実研会員 村田 洋一

今回は自作の 1. 三元四次連立方程式(問題-1)を考え、それに途中から遊び心で 4 個の異なる解を与え、また別の 2. 三元二次連立方程式(問題-2)では 3 個の別解を示しました。

(同-1)の後半は 2 次式  $f'(t) = 0$  の判別式の正負で  $f(t) = 0$  実数解の個数が容易に判断でき、1), 2) の 2 組の 3 次方程式を解けばよいが、敢えて 2) ニュートンの逐次近似法、3) カルダノの公式、4) Sturm の定理により解(答)を求め論証の根拠としました。

(同-2)は 1)  $a+d, a-d$  に着目し  $b$  の方程式に変形、2)  $b(a+d) > 0$  に注目し  $b$  の方程式に変形、3) 行列の定義から行列・行列式の考えに帰着させたものです。

注) (同-1) の 4) は “数学のいずみ” 新着情報 2011.03.26. 安田富久一先生の「解の

(Sturm 問題)」を参照して作成しました。記号  $V, \tilde{V}$  の使い方も同様です。

### 問題と別解の検討

【問題-1】 次の連立方程式を解き  $a, b, c$  のすべてが実数の解を、必要があれば小数第 5 位まで求めよ。

$$a^2 + b^2 + c^2 = 14 \dots \textcircled{1}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 20 \dots \textcircled{2}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 98 \dots \textcircled{3}$$

定石の基本対称式に着目し  $a+b+c = x, ab+bc+ca = y, abc = z$  として

①～③を  $x, y, z$  で表す方針でいく。

$$\textcircled{1} \text{より } (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 14$$

$$\textcircled{2} \text{より } (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\} + 3abc = 20 \quad \text{また} \textcircled{3} \text{より}$$

$$\{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)\}^2 - 2\{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)\} = 98$$

$$\text{これらから } x^2 - 2y = 14 \dots \textcircled{4}$$

$$x(x^2 - 3y) + 3z = 20 \dots \textcircled{5}$$

$$(x^2 - 2y)^2 - 2(y^2 - 2zx) = 98 \dots \textcircled{6}$$

④より  $y = \frac{1}{2}x^2 - 7$  これを⑤に代入  $x(21 - \frac{1}{2}x^2) + 3z = 20$

$z = \frac{1}{6}x^3 - 7x + \frac{20}{3}$  ④と  $y, z$  を各々⑥へ代入して

$14^2 - 2(\frac{1}{2}x^2 - 7)^2 + 4x(\frac{1}{6}x^3 - 7x + \frac{20}{3}) = 98$

整理して  $x^4 - 84x^2 + 160x = x(x-2)(x-8)(x+10) = 0$

よって  $x = 2, 0, 8, -10$  この時各々  $y = -5, -7, 25, 43$   $z = -6, \frac{20}{3}, 36, -90$

1)  $x = 2, y = -5, z = -6$  のときこれを 3 解とする 3 次方程式は

$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$  これは容易に因数分解できて  $(t-1)(t-3)(t+2) = 0$

従って  $(a, b, c) = (1, 3, -2), (1, -2, 3), (3, -2, 1), (3, 1, -2), (-2, 1, 3), (-2, 3, 1)$

2)  $x = 0, y = -7, z = \frac{20}{3}$  のときは 同様に  $t^3 - 7t - \frac{20}{3} = 0$  この左辺を

$f(t)$  とおき  $f'(t) = 0$  から  $t = -\sqrt{\frac{7}{3}}$  で極大値  $\frac{14\sqrt{21} - 60}{9} = 0.46 > 0,$

$t = \sqrt{\frac{7}{3}}$  で極小値  $-\frac{14\sqrt{21} + 60}{9} = -13.79 < 0$  より  $f(t) = 0$  は 3 個の実数解をもつ。

ここで  $f(t) = 0$  の 3 個の実数解を大きな順に各々  $\alpha, \beta, \gamma$  とし Newton の逐次近似法で求めてみる。

$f(3) = -\frac{2}{3} < 0, f(4) = \frac{88}{3} > 0$  また  $-2 < -\sqrt{\frac{7}{3}} < -1, f(-1) = f(-2) = -\frac{2}{3}$

$< 0,$  極大値  $f(-\sqrt{\frac{7}{3}}) > 0$  から  $3 < \alpha < 4, -2 < \beta, \gamma < -1$

初期値を各々  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  で表し、また  $f'(t) = 3t^2 - 7$

$\alpha_0 = 3$  として  $f(3) = -\frac{2}{3}$   $f'(3) = 20$   $\alpha_1 = 3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{20} = \frac{91}{30}$

$f(\frac{91}{30}) = \frac{271}{27,000}$   $f'(\frac{91}{30}) = \frac{6181}{300}$   $\alpha_2 = \frac{91}{30} - \frac{271}{27,000} \cdot \frac{300}{6,181} = 3.03285$

$\therefore \alpha = 3.03285$  (参考  $f(\alpha) = 0.00008$ )

$\beta_0 = -1$  として  $f(-1) = -\frac{2}{3}$   $f'(-1) = -4$   $\beta_1 = -1 - \frac{1}{6} = -\frac{7}{6}$

$$f\left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{19}{216} \quad f'\left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{35}{12} \quad \beta_2 = -\frac{7}{6} - \frac{19}{216} \cdot \frac{12}{35} = -\frac{377}{315} = -1.196825$$

$$f\left(-\frac{377}{315}\right) = \frac{208,272,142}{31,255,875} - \frac{20}{3} = -0.00321 \quad f'\left(-\frac{377}{315}\right) = \frac{426,387}{99,225} - 7$$

$$= -2.70283 \quad \beta_3 = -1.19682 - \frac{0.00321}{2.70283} = -1.19801$$

$\therefore \beta = -1.19801$  (参考  $f(\beta) = 0$ )

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{であるから} \quad \gamma = -1.83484$$

従って  $(a, b, c) = (\alpha, \beta, \gamma), (\alpha, \gamma, \beta), (\beta, \gamma, \alpha), (\beta, \alpha, \gamma), (\gamma, \alpha, \beta), (\gamma, \beta, \alpha)$

3)  $x = 8, \quad y = 25, \quad z = 36$  のときこれを 3 解とする 3 次方程式は

$$t^3 - 8t^2 + 25t - 36 = 0 \quad \text{これをカルダノの公式で解いてみよう。}$$

$$t = y - \left(-\frac{8}{3}\right) \quad \text{として} \quad \left(y + \frac{8}{3}\right)^3 - 8\left(y + \frac{8}{3}\right)^2 + 25\left(y + \frac{8}{3}\right) - 36 = 0$$

$$\text{これを整理して} \quad y^3 + \frac{11}{3}y - \frac{196}{27} = 0 \quad y = u + v \quad \text{と置きまとめると}$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + \frac{11}{3})(u + v) = \frac{196}{27} \quad uv = -\frac{11}{9} \quad \text{にとって} \quad u^3 + v^3 = \frac{196}{27}$$

$$u^3, v^3 \text{ を解とする分解方程式は} \quad s^2 - \frac{196}{27}s + \left(-\frac{11}{9}\right)^3 = 0 \quad u^3 \text{ に根号+の}$$

$$\text{ものをとると} \quad u^3 = \frac{98}{27} + \sqrt{\left(\frac{98}{27}\right)^2 + \left(\frac{11}{9}\right)^3} = \frac{98 + 27\sqrt{15}}{27}$$

$$u = \frac{\sqrt[3]{98 + 27\sqrt{15}}}{3} \quad \text{として} \quad v = -\frac{11}{3\sqrt[3]{98 + 27\sqrt{15}}} \quad \text{求める 3 個の解は}$$

$$\text{実数解は} \quad u + v + \frac{8}{3} = 1.9576 - 0.6243 + 2.6666 = 3.9993 \quad \text{複素数解は}$$

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \text{として} \quad \omega u + \omega^2 v + \frac{8}{3} = 1.9993 + 2.2358i$$

$$\omega^2 u + \omega v + \frac{8}{3} = 1.9993 - 2.2358i$$

しかし実数解 3.9993 がほぼ 4 なので、 $t = 4$  を代入すると与式 = 0 となり、

$$(t - 4)(t^2 - 4t + 9) = 0 \quad \text{から 解は} \quad 4, \quad 2 \pm \sqrt{5}i \quad \text{となる。}(t - 4) \text{ を因数に持つ}$$

ことに気がつかなかったもの。

4)  $x = -10, y = 43, z = -90$  のときも同様に  $t^3 + 10t^2 + 43t + 90 = 0$   
 これの実数解の個数を Sturm の定理から求めてみよう。

$$f_0(t) = t^3 + 10t^2 + 43t + 90 \text{ として } f_1(t) = f_0'(t) = 3t^2 + 20t + 43$$

$$f_0(t) = \frac{1}{9}(3t+10)f_1(t) + \frac{58}{9}t + \frac{380}{9} \quad \therefore f_2(t) = -\frac{2}{9}(29t+190)$$

$$f_1(t) = \left(\frac{27}{58}t + \frac{45}{29 \cdot 29}\right)(58t+380) + 387 - \frac{45 \cdot 380}{29 \cdot 29} \quad \therefore f_3(t) = -\frac{308,367}{841}$$

$$\text{これから } V(+\infty) = \tilde{V}(+,+,+,-) = 1 \quad V(-\infty) = \tilde{V}(-,+,+,-) = 2$$

$$V(-\infty) - V(+\infty) = 2 - 1 = 1 \quad \text{従って 1 個の実数解と 2 個の複素数解を持つ。}$$

以上のことから  $a, b, c$  のすべてが実数の解の組は 1)、2) からの 12 組に限る

【問題-2】 次の連立方程式を解け。

$$a^2 + b^2 = 17 \cdots \textcircled{1}$$

$$ab + bd = 6 \cdots \textcircled{2}$$

$$b^2 + d^2 = 5 \cdots \textcircled{3}$$

$$1) \textcircled{1} - \textcircled{3} \quad a^2 - d^2 = (a+d)(a-d) = 12 \quad \textcircled{2} \text{より } a+d = \frac{6}{b} \quad \text{また } a-d = 2b$$

$$\text{これらを加えて } a = b + \frac{3}{b}, \quad d = \frac{3}{b} - b \cdots \textcircled{4} \quad a \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入 } \left(b + \frac{3}{b}\right)^2 + b^2 = 1$$

$$2b^4 - 11b^2 + 9 = 0 \quad \text{この複二次方程式を解いて } b = \pm 1, \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$b = 1$  のとき  $\textcircled{4}$  から  $a = 4, d = 2$  以下、同様にして次の 4 解を得る。

$$(a, b, d) = (4, 1, 2), (-4, -1, -2), \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$2) \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{より } a = \sqrt{17-b^2}, \quad d = \sqrt{5-b^2} \text{ とすると } a > d$$

$$\textcircled{2} \text{より } b(\sqrt{17-b^2} + \sqrt{5-b^2}) = 6 \quad \text{この式で } b \text{ と } ( ) \text{ 内の無理式の積} > 0$$

$$\text{より i) } b > 0 \text{ の時 } a+d > 0 \quad \text{または } a-d > 0$$

$$\text{ii) } b < 0 \quad -a-d < 0 \quad \text{または } -a+d < 0 \quad \text{でこれは i) に同じ}$$

従って  $b(\sqrt{17-b^2} \pm \sqrt{5-b^2}) = 6$  を考えれば十分である。この時、両辺  $> 0$

$$\text{より平方して } b^2 \{ (22-2b^2) \pm 2\sqrt{(17-b^2)(5-b^2)} \} = 36$$

$$\pm 2b^2 \sqrt{b^4 - 22b^2 + 85} = 2b^4 - 22b^2 + 36 \quad \text{再度平方して整理すると}$$

$$144(b^2 - 1)(2b^2 - 9) = 0 \quad \text{これから } b = \pm 1, \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{以下省略}$$

1) 同様の解の組  $(a, b, d)$  を得る。

3) 方程式の形から

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + bd \\ ab + bd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} (= C)$$

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$C = B^2 = (a+d)B - (ad - b^2)I = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{また } B \text{ の行列式 } (ad - b^2)$$

の自乗が  $17 \cdot 5 - 6 \cdot 6 = 49$  に等しいことから  $ad - b^2 = \pm 7$

i)  $ad - b^2 = 7$  の時

$$(a+d)B = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{また } 6^2 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = 36 \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{より } (a+d)^2 B^2 = 36C \quad \text{これから } a+d = \pm 6, \quad B = \pm \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{すなわち } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} : (a+d=6) \quad \text{またはその負 } \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ が得られる。}$$

ii)  $ad - b^2 = -7$  の時

$$\text{同様に } (a+d)B = 2 \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{また } 2^2 \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^2 = 8 \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a+d = \pm 2\sqrt{2} \quad \text{より } B = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{すなわち } \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} : (a+d=2\sqrt{2}) \quad \text{またはその負 } \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

が得られる。

従って 1), 2) 同様の解の組が求められる。

以 上