

## 2 項間漸化式の新しい見方

遺愛女子中学高等学校 西谷 優一

### 1. 二項間漸化式の標準的解法

二項間漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

の解法をどのように教えていますか。

まず、参考書で多く見られる解法を眺めてみることにします。

例題. 
$$\begin{cases} a_1 = a & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = pa_n + q & \dots\dots\dots \textcircled{2} \quad (p \neq 1) \end{cases}$$
 を解け。

---

(解 1) 
$$\alpha = p\alpha + q \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

をみたす  $\alpha$  を求めて、 $\alpha = \frac{q}{1-p}$  を得る。また、②-③より、

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

$\therefore \{a_n - \alpha\}$  は公比  $p$  の等比数列。

したがって

$$\begin{aligned} a_n - \alpha &= (a_1 - \alpha) \cdot p^{n-1} \\ a_n &= \alpha + (a_1 - \alpha) \cdot p^{n-1} \\ &= \frac{q}{1-p} + \left(a - \frac{q}{1-p}\right) \cdot p^{n-1} \end{aligned}$$

(解 1 の注)

ほとんどの参考書でこの解法がとられています。授業でも、この解法で教えている先生が多いのではないかと思います。これはこれで立派な解法なのですが、問題は式③の由来です。これについては  $y = px + q$  と  $y = x$  のグラフを用いて説明しているものもありますが、そんな大掛かりなことをする必要はあるか疑問です。数学の得意な生徒にとって、数列と図形という、一見まったく別のものが結びついて、ぞくぞくするくらい面白い所なのですが、大部分の生徒にとっては荷が重いようです。

また、階差数列を用いた次のような解法も基本的です。

(解2)

$$\begin{cases} a_1 = a & \dots\dots\dots ① \\ a_{n+1} = pa_n + q & \dots\dots\dots ② \quad (p \neq 1) \end{cases}$$

②より  $a_{n+2} = pa_{n+1} + q$  だから、これから①を辺々引いて

$$\begin{array}{r} a_{n+2} = pa_{n+1} + q \\ -) \quad a_{n+1} = pa_n + q \\ \hline a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n) \quad \dots\dots\dots ③ \end{array}$$

$\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$  は公比  $p$  の等比数列。

$$a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)p^{n-1} \quad \dots\dots\dots ④$$

$$\begin{aligned} a_2 &= pa_1 + q \\ &= pa + q \end{aligned} \quad \text{と②をこの式に代入して、}$$

$$\begin{aligned} (pa_n + q) - a_n &= \{(p-1)a + q\} \cdot p^{n-1} \quad \dots\dots\dots ⑤ \\ (p-1)a_n &= \{(p-1)a + q\} \cdot p^{n-1} - q \\ a_n &= \left(1 + \frac{q}{p-1}\right) \cdot p^{n-1} - \frac{q}{p-1} \end{aligned}$$

(解2の注)

参考書の作者たちの多くは、(そして我々教師も) ④の形を見るとすぐ階差数列の公式

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots\dots\dots + (a_n - a_{n-1}) \quad (n \geq 2)$$

を利用しようとするのですが、⑤のようにやればよいのです。「 $n=1$ の場合と  $n \geq 2$  の場合に分けて  $\Sigma$  を使って計算」という手間は要りません。

## 2. 二項間漸化式と不動点 (現象論的理解)

さて、例題の(解1)に現れる等式  $a = pa + q \quad \dots\dots\dots ③$  の由来をもっと生徒が納得できるような説明の仕方はないだろうか。

このことについて、以下のような授業を考えてみた。

想定される授業前の状態としては、上にあげた標準的な解法を学んだあとで、イメージがつかみ切れない生徒が多い、そんな教室である。

問 漸化式  $a_{n+1} = 3a_n - 4$  をみたす数列  $\{a_n\}$  において、初項  $a_1$  が次のように与えられているとき、 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  の値を順に求めよ。

- (1)  $a_1 = 0$       (2)  $a_1 = 1$       (3)  $a_1 = 2$       (4)  $a_1 = 3$       (5)  $a_1 = 4$

《解》

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$a_1 = 0$	$a_1 = 1$	$a_1 = 2$	$a_1 = 3$	$a_1 = 4$
$a_2 = -4$	$a_2 = -1$	$a_2 = 2$	$a_2 = 5$	$a_2 = 8$
$a_3 = -16$	$a_3 = -7$	$a_3 = 2$	$a_3 = 11$	$a_3 = 20$
$a_4 = -52$	$a_4 = -25$	$a_4 = 2$	$a_4 = 29$	$a_4 = 56$
$a_5 = -160$	$a_5 = -79$	$a_5 = 2$	$a_5 = 83$	$a_5 = 164$

ところで、(1) ~ (5) で  $\{a_n\}$  の一般項を求めることはできますか。

実は、これがびっくりするほど簡単に（しかもほとんど暗算で）できてしまうのです。今日はそんなお話をします。

さて、(1) ~ (5) の中でひとつだけ目を引くものがありますね。ひとつだけほかと違うもの、それは (3) ですね。

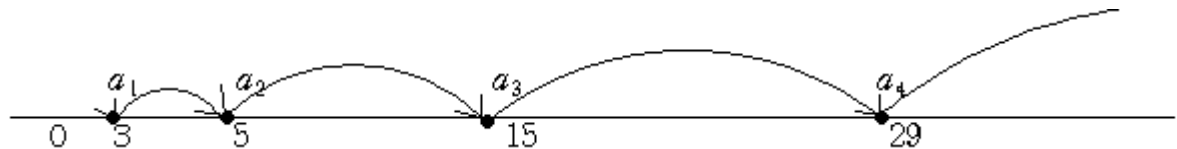
漸化式  $a_{n+1} = 3a_n - 4$  において、 $a_1 = 2$  とすると、

$$a_2 = 3 \times 2 - 4 = 2 \quad a_3 = 3 \times 2 - 4 = 2 \quad \dots\dots\dots$$

と永遠に同じ値が続いてしまいます。このことを「漸化式  $a_{n+1} = 3a_n - 4$  は不動点 2 を持つ」と言うことにします。

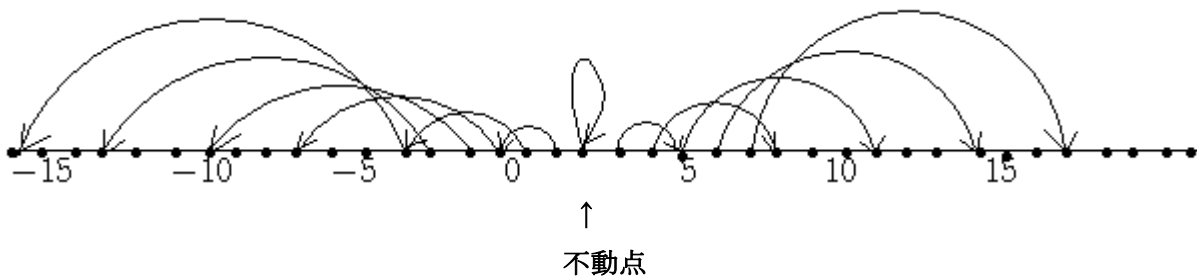
「不動点」つまり動かない「点」を持つという言い方は、漸化式の問題を数直線上の点の移動として捉えているということです。

たとえば、問 1 (4) では  $a_1 = 3 \rightarrow a_2 = 5 \rightarrow a_3 = 15 \rightarrow a_4 = 29$  だから、



$n$  が 1, 2, 3, 4, ... と変わるとき、それとともに、 $a_n$  を表す点が数直線上を移動する現象として数列をとらえているわけです。

漸化式  $a_{n+1} = 3a_n - 4$  によって  $a_n$  が  $a_{n+1}$  に移る様子を



このように表して調べることができます。

$a_n = 2$  のとき、 $a_{n+1} = 3a_n - 4 = 2$  となり、 $a_{n+1}$  は  $a_n$  と同じ値になります。これが不動点です。さて、

不動点を求めるにはどうすればよいかわかりますか？

$$a_{n+1} = 3a_n - 4$$

だったら、 $a_{n+1} = a_n = \alpha$  として ( $a_n$  と  $a_{n+1}$  が同じ値  $\alpha$  になる)

$$\alpha = 3\alpha - 4$$

を解けばよいのです。

これを解いて  $\alpha = 2$       これが不動点です。

漸化式が不動点を持つとき、しばしば次のように考えると、漸化式の表す現象が見えてきます。

$a_1$  の値が不動点に一致しているときには値は動かないが、 $a_1$  の値が不動点から「ズレている」時は、それ以降の値も不動点からずれることになる。そのズレの規則性に注目すると、簡単な規則性が見えてくることが多い。

それでは問の解答を「不動点 2 からのズレの変化」に着目して書きなおしてみましょう。

(1)

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 - \underline{\underline{2}} \\ a_2 &= 2 - \underline{\underline{6}} \\ a_3 &= 2 - \underline{\underline{18}} \\ a_4 &= 2 - \underline{\underline{54}} \\ a_5 &= 2 - \underline{\underline{162}} \\ &\dots\dots \\ a_n &= 2 - \underline{\underline{2 \cdot 3^{n-1}}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 - \underline{\underline{1}} \\ a_2 &= 2 - \underline{\underline{3}} \\ a_3 &= 2 - \underline{\underline{9}} \\ a_4 &= 2 - \underline{\underline{27}} \\ a_5 &= 2 - \underline{\underline{81}} \\ &\dots\dots \\ a_n &= 2 - \underline{\underline{1 \cdot 3^{n-1}}} \\ &= 2 - \underline{\underline{3^{n-1}}} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 + \underline{\underline{1}} \\ a_2 &= 2 + \underline{\underline{3}} \\ a_3 &= 2 + \underline{\underline{9}} \\ a_4 &= 2 + \underline{\underline{27}} \\ a_5 &= 2 + \underline{\underline{81}} \\ &\dots\dots \\ a_n &= 2 + \underline{\underline{1 \cdot 3^{n-1}}} \\ &= 2 + \underline{\underline{3^{n-1}}} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 + \underline{\underline{2}} \\ a_2 &= 2 + \underline{\underline{6}} \\ a_3 &= 2 + \underline{\underline{18}} \\ a_4 &= 2 + \underline{\underline{54}} \\ a_5 &= 2 + \underline{\underline{162}} \\ &\dots\dots \\ a_n &= 2 + \underline{\underline{2 \cdot 3^{n-1}}} \end{aligned}$$

部分は公比 3 の等比数列の形になっているから。

の部分は観察による推測でしかありませんから、漸化式に根拠を求めることにします。

漸化式  $a_{n+1} = 3a_n - 4$  で  $a_n = 2 + \underline{b_n}$  とおいてやると、

$$\begin{aligned} 2 + b_{n+1} &= 3(2 + b_n) - 4 \\ \therefore b_{n+1} &= 3b_n \end{aligned}$$

このようにやって          の部分は公比 3 の等比数列であることを導くことが必要です。

あるいは前にやったように

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n - 4 \quad \dots\dots\dots ① \\ \alpha &= 3\alpha - 4 \quad \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

①、②より

$$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$$

②より  $\alpha = 2$  だから、

$$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$$

このようにして、「不動点からのズレ」  $\{a_n - 2\}$  が公比 3 の等比数列になることを導いても同じことです。

以上の考察から漸化式  $a_{n+1} = pa_n + q$  の一般項は

$$a_n = (\text{不動点}) + (\text{公比 } p \text{ の等比数列})$$

の形になります。

このことを知っているのと、一般項を暗算で求めることができます。

$$\alpha = p\alpha + q$$

を解いて不動点  $\alpha$  を求めたら、 $a_1$  を

$$a_1 = \alpha + \underline{\underline{(a_1 - \alpha)}}$$

と変形します。この、         の部分が  $n$  の変化に応じて、公比  $p$  の等比数列に「変身」して

$$a_n = \alpha + (a_1 - \alpha) \cdot p^{n-1}$$

となる。

このようにやればよいのです。

それでは、ちょっと練習してみましょう。

例題 次の漸化式をみたす数列  $\{a_n\}$  の一般項を暗算で求めよ。

(1)  $a_1 = 2$

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1$$

(2)  $a_0 = 5$

$$a_{n+1} = 2a_n - 3$$

-----  
《解》

(1)  $\alpha = \frac{2}{3}\alpha + 1$  を解いて、 $\alpha = 3$

$$a_1 = 3 + \underline{\underline{(-1)}}$$

↓ (項番号が  $n-1$  増えた)

$$\therefore a_n = \underline{\underline{3-1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}} = \underline{\underline{3-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}}$$

(2)  $\alpha = 2\alpha - 3$  を解いて、 $\alpha = 3$

$$a_0 = 3 + \underline{\underline{2}}$$

↓ (項番号が  $n$  増えた)

$$\therefore a_n = 3 + \underline{\underline{2 \cdot 2^n}} = 3 + \underline{\underline{2^{n+1}}}$$

※ (2) のように、 $a_1$  ではなく  $a_0$  が初項として与えられることもしばしばあります。

どうです、簡単でしょ！

生徒のいなく「WHY?」の疑問に対して、いくら説明してもなかなか理解してもらえないことがよくありますが、「WHAT」のほうが大切な場合もあります。