

## 2 項定理・多項定理の新しい見方

### (係数がすべて 1 の多項定理)

遺愛女子中学高等学校 西谷 優一

#### 1. 予感

先日、3年生に、「2項定理は知ってるよね」といって授業を始めようとしたら、「あんなの、覚えられない!」「式が複雑!」など非難ごうごうだったので、

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \cdots \textcircled{1}$$

という公式は知っているよね。

この①の公式は

$$(x+y)^3 = \frac{3!}{3!0!} x^3 y^0 + \frac{3!}{2!1!} x^2 y + \frac{3!}{1!2!} xy^2 + \frac{3!}{0!3!} x^0 y^3 \cdots \textcircled{2}$$

と書いても同じだよ。

確認してごらん。

(生徒は確認) なるほど

②の右辺は、一見複雑に見えるけど、

$$\frac{(\bigcirc+\square)!}{\bigcirc!\square!} x^\bigcirc y^\square$$

の形の式の  $\bigcirc+\square=3$  をみたす形のを全部足せば良いわけだから、見た目以上に簡単だね。

これが、3乗だけで終わるんだったら「たまたま」成り立っただけなんだけど、そうじゃないんだ。

$$(x+y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

でも同じ法則が成り立っていることを確認してごらん。

(生徒確認) 感心した様子

ところで、係数の

$$\frac{(O+\square)!}{O!\square!}$$

の部分なんだけど、これコンビネーションで表すことができるんだ。

例えば  ${}_5C_3$  は

$${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5!}{3!2!}$$

だよな。

この式を、右辺から逆に読んでみると、

例えば、

$$\frac{7!}{4!3!} \text{ をコンビネーションで表すことができるかい?}$$

(生徒すぐに反応)

そうだな、 ${}_7C_4$  だね。

一般的には

$$\frac{(O+\square)!}{O!\square!} = {}_{O+\square}C_{\square}$$

が成り立つことになる。

それじゃ、②の式をコンビネーションで表してごらん。

(生徒作業) わかった  
それが 2 項定理なんだよ。

実は、話はこれで終わらない。

例えば、

$(x + y + z)^5$  を展開すると、どんな形になると思う？

(数人の生徒が気付く)

そう

$$\frac{(\bigcirc + \square + \triangle)!}{\bigcirc! \square! \triangle!} x^{\bigcirc} y^{\square} z^{\triangle}$$

の形の式の  $\bigcirc + \square + \triangle = 5$  をみたす形のものを全部足せば良い。  
ここまですれば、 $(x + y + z + u)^7$  でも同じだね、  
これを多項定理という。

それじゃ、なぜこんな式が導けるんだろう、知ってるかい？

.....

と授業が続いていったが、

私は、ある事実が気が付いて、うきうきした気分になっていた。

## 2. 「シンジラレナーイ！」美しさ

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \cdots \textcircled{1}$$

を

$$(x + y)^3 = \frac{3!}{3!0!} x^3 y^0 + \frac{3!}{2!1!} x^2 y + \frac{3!}{1!2!} xy^2 + \frac{3!}{0!3!} x^0 y^3 \cdots \textcircled{2}$$

と書いたついでに、

②の両辺を 3! で割ってみよう

すると

$$\frac{(x+y)^3}{3!} = \frac{x^3 y^0}{3!0!} + \frac{x^2 y}{2!1!} + \frac{xy^2}{1!2!} + \frac{x^0 y^3}{0!3!} \cdots \textcircled{3}$$

となる。

③は、すべて  $\frac{x^n}{n!}$  の形の式で表現されている。

そこで、

$$x^{<n>} = \frac{x^n}{n!} \text{ と書くことにすると、}$$

③は

$$(x+y)^{<3>} = x^{<3>} y^{<0>} + x^{<2>} y^{<1>} + x^{<1>} y^{<2>} + x^{<0>} y^{<3>}$$

と書いてしまう。

$$\text{右辺は } \sum_{i+j=3} x^{<i>} y^{<j>} \text{ (} i, j \text{ は非負の整数)}$$

の形である

すると、これを一般化して

$$\left( \sum_{i=1}^m x_i \right)^{<n>} = \sum_{\sum_{j=1}^m l_j = n} \left( \prod_{j=1}^m x_j^{<l_j>} \right)$$

と書くこともできる。

とにかく、きれいさっぱり係数が消えてしまう。

$x^{<n>} = \frac{x^n}{n!}$  の形は数学の至る所に現れてくる

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{<n>}$$

や、

点  $(0,0,0)$ ,  $(x,0,0)$ ,  $(0,x,0)$ ,  $(0,0,x)$  を結んでできる図形の体積  $\frac{x^3}{3!} = x^{<3>}$

など

なにかがあるような気がしてならない。

話は、突然ここで終わる「この続きを書くには、余白が足りない」という理由で