第 10 回
北海道高等学校数学コンテスト

問　　題

平成４年１月12日(日)

9時00分～12時30分（210分）

北海道算数数学教育会高等学校部会

問題1　技術の進歩により，相異なる言語をコンピュータで互いに翻訳すること（機械翻訳）が可能になってきた。機械翻訳の方式は2通りある。第一は〝個別方式〟と呼ばれ，例えば，互いに訳したい言語がAとBの2つあるとき，AからBへ訳すプログラムT（A，B）と，BからAへ訳すプログラムT（B，A）の2つが必要である。また，言語がA，B，Cの3つあるときは，T(A，B)，T(B，A)，T（B，C)，T（C，B)，T（C，A)，T（A，C）の6つのプログラムが必要となる。第二の方式は〝中間言語方式〟と呼ばれ，まず中間言語Oを作っておき，それから，それぞれの訳したい言語とOとの間の翻訳プログラムを作る。例えば，訳したい言語がA，Bの2つのとき，T（A，O)，T（O，A)，T（B，O)，T（O，B）の4つの翻訳プログラムが必要であり，訳したい言語がA，B，Cの3つのときは，T（A，O)，T（O，A)，T（B，O)，T（O，B)，T（C，O)，T（O，C）の6つが必要となる。

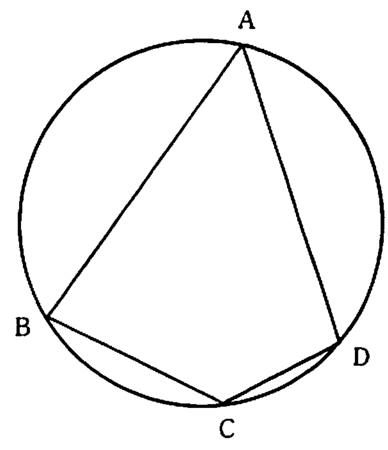
問1　訳したい言語がA，B，C，Dの4個のとき，〝個別方式〟と〝中間言語方式〟で必要となる翻訳プログラムの個数を求めよ。

問2　訳したい言語の個数が n 個（$n \geqq 2$）のとき，〝個別方式〟と〝中間言語方式〟で必要となる翻訳プログラムの個数を求めよ。

問3　翻訳プログラムの作成費用は，方式及び言語の種類を問わず皆同じであるとする。また，中間言語Oの作成費用は翻訳プログラムの k 倍($k>0$)であるとする。このとき，言語の個数を n とするとき，作成費用はどちらの方式の方が安いか？

問題2　図のように四辺形ABCDに外接する円ABCDがある。

直線ABとCDとの交点をE，直線BCとADとの交点をF，円AEFと円ABCDとのもう一つの交点をK，直線KCと円AEFとのもう一つの交点をLとする。



問1　上の文章に適する図をかけ。解答用紙の図に必要な線をつけ加えて完成せよ。すべてfree handでよいがcompassや定規を使ってもよい。

問2　BC // ELを証明せよ。

問3　DC // FLを証明せよ。

問4　直線EFと直線KLの交点をMとすれば，MはEFの中点であることを証明せよ。

問題 3　正の整数 a，b，c，d が $a^2+b^2+c^2=d^2$ を満たしている。このとき，次の問に答えよ。

問 1　$a=1$，$b=2$ のとき，c，d の値を求めよ。

問 2　$d=7$，$a \geqq b \geqq c$ のとき，a，b，c を求めよ。

問 3　a，b，c のうち少なくとも 2 つは偶数であることを証明せよ。

問題 4　関数 $f(x)=|x^2+ax+b|$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $\mathrm{M}(a, b)$ とおく。ただし，a，b は実数の定数とする。

問 1　$\mathrm{M}(0, -\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ を示せ。

問 2　$\mathrm{M}(1, b)$ が最小となるように b の値を定め，そのときの最小値を求めよ。

問 3　$\mathrm{M}(a, b)$ の最小値は $\frac{1}{2}$ で，$a=0$，$b=-\frac{1}{2}$ に限ることを証明せよ。

問題 5　半径 2 の円板（円周と円の内部）D 上に半径 1 の円板（円周を含む）を何枚かおいて完全におおいつくしたい。

問 1　半径 1 の円板を 7 枚用いると，D をおおいつくすことができることを示せ（作図せよ）。

問 2　半径 1 の円板 6 枚では D をおおいつくすことができないことを証明せよ。

平成３年度(平成４年１月12日実施)

第 10 回
北海道高等学校数学コンテスト

解 答 と 解 説

北海道算数数学教育会高等学校部会

1

技術の進歩により，相異なる言語をコンピュータで互いに翻訳すること（機械翻訳）が可能になってきた。機械翻訳の方式は2通りある。第一は“個別方式”と呼ばれ，例えば，互いに訳したい言語がAとBの2つあるとき，AからBへ訳すプログラムT(A, B)と，BからAへ訳すプログラムT(B, A)の2つが必要である。また，言語がA, B, Cの3つあるときは，T(A, B), T(B, A), T(B, C), T(C, B), T(C, A), T(A, C)の6つのプログラムが必要となる。第二の方式は“中間言語方式”と呼ばれ，まず中間言語Oを作っておき，それから，それぞれの訳したい言語とOとの間の翻訳プログラムを作る。例えば，訳したい言語がA, Bの2つのとき，T(A, O), T(O, A), T(B, O), T(O, B)の4つの翻訳プログラムが必要であり，訳したい言語がA, B, Cの3つのときは，T(A, O), T(O, A), T(B, O), T(O, B), T(C, O), T(O, C)の6つが必要となる。

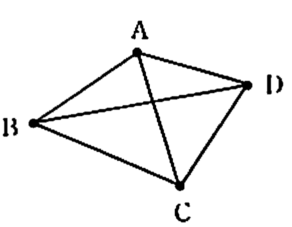
問1　訳したい言語がA, B, C, Dの4個のとき，“個別方式”と“中間言語方式”で必要となる翻訳プログラムの個数を求めよ。

問2　訳したい言語の個数がn個（$n \geqq 2$）のとき，“個別方式”と“中間言語方式”で必要となる翻訳プログラムの個数を求めよ。

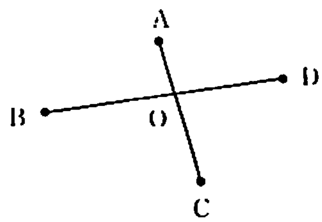
問3　翻訳プログラムの作成費用は，方式及び言語の種類を問わず皆同じであるとする。また，中間言語Oの作成費用は翻訳プログラムのk倍（$k>0$）であるとする。このとき，言語の個数をnとするとき，作成費用はどちらの方式の方が安いか？

着眼点

問題文が理解できれば，平易な問題である。
問3が主眼。
個別方式は，4言語なら



のように直接4点を結ぶものです。（辺と対角線）
中間言語方式は，



のように中央制御方式みたいなものでしょう。

解答例

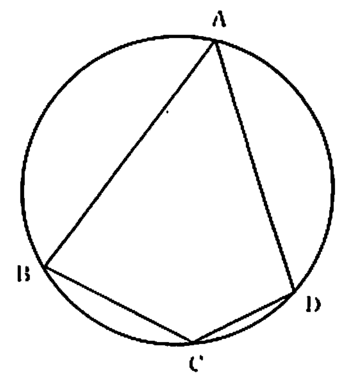
問1　着眼点の図にあるように，個別方式では12個，中間言語方式では，8個必要である。

問2　個別方式の場合。
1つの言語から他の言語に翻訳するプログラムの個数は，$n-1$。よって，全部で$n(n-1)$。
中間言語方式の場合。
1つの言語と中間言語との相互翻訳で2個必要。よって全部で$2n$。

問3　翻訳プログラムの作成費用を$a(>0)$とする。
個別方式での費用をIとすると，
$\mathrm{I}=an(n-1)$
中間言語方成での費用をMとすると，
$\mathrm{M}=ak+2an$
よって，
$\mathrm{I}-\mathrm{M}=a(n^2-3n-k)$
いま，$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{9+4k}}{2}$とおくと，
$2 \leqq n<\alpha$のとき，$\mathrm{I}-\mathrm{M}<0$より，個別方式の方が安い。
$n=\alpha$のとき，$\mathrm{I}-\mathrm{M}=0$より，どちらも同じ。
$n>\alpha$のとき，$\mathrm{I}-\mathrm{M}>0$より，中間言語方式の方が安い。

2

図のように四辺形ABCDに外接する円ABCDがある。
直線ABとCDとの交点をE，直線BCとADとの交点をF，円AEFと円ABCDとのも



う一つの交点をK，直線KCと円AEFとのもう一つの交点をLとする。

問1　上の文章に適する図をかけ。解答用紙の図に必要な線をつけ加えて完成せよ。すべてfree handでよいがcompassや定規を使ってもよい。

問2　BC // ELを証明せよ。

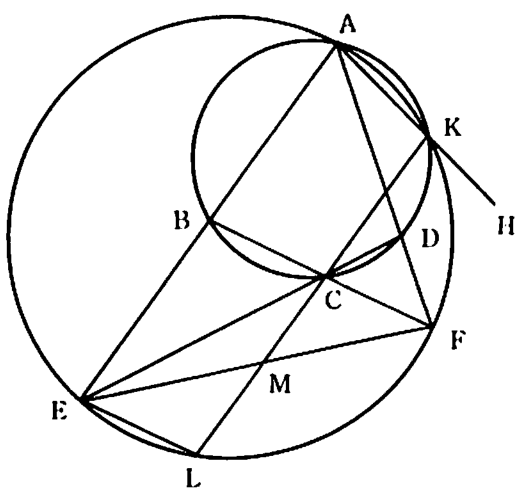
問3　DC // FLを証明せよ。

問4　直線EFと直線KLの交点をMとすれば，MはEFの中点であることを証明せよ。

着眼点

問1　作図

円AEFを正確にかかないと，フリーハンドでは二円の交点Kが見当がつけにくい。



問2　BC // ELを証明するのは，同位角又は錯角と関連づけられるし，円に内接する四辺形がいくつか出来るので円周角あるいは相対する内角とか，外角と内対角の関係定理などが頭にうかんでくるだろう。要するに角の移動が解決の糸口となるだろうと考えて工夫してみる。

BC // ELを証明するには，

$\angle$ABF＝$\angle$AELがいえれば十分である。

$\angle$ABFを四辺形ABCKの内角とみると

$\angle$ABF＝$\angle$CKH（HはAKの延長）

$\angle$AELを四辺形AELKの内角とみると

$\angle$AEL＝$\angle$CKH

∴$\angle$ABF＝$\angle$AEL

となってめでたしめでたし。

問3　DC // FLを証明するには$\angle$KCD＝$\angle$KLFがいえれば十分である。

$\overset{\frown}{KD}$に対する円周角

$\angle$KCD＝$\angle$KAD

$\overset{\frown}{KF}$に対する円周角

$\angle$KLF＝$\angle$KAF＝$\angle$KAD

∴$\angle$KCD＝$\angle$KLF

問4　問2，問3により四辺形CELFは平行四辺形。従って対角線は互いに他を2等分するので

EM＝FM

とやってしまっては，味もそっけもない。ただ問題の結果を定理の形で言いかえたにすぎないので，これだけでは証明したとはいえまい。そこで答案としてはこの定理自体を証明することにする。

ΔMCFとΔMLEにおいて平行四辺形の対辺は等しいから

CF＝LE ……………………………①

CF // ELなので錯角をつかって

$\angle$MCF＝$\angle$MLE ……………………②

$\angle$MFC＝$\angle$MEL ……………………③

①，②，③より

ΔMCF≡ΔMLE

∴FM＝EM

ここで①で使ったCF＝LEは結論。

FM＝EMと同程度の定理なので，これもついでに証明しておくと，

ΔECLとΔFLCにおいて

CL＝LC（共通）………………………④

EC // FLより

$\angle$ECL＝$\angle$FLC ……………………⑤

EL // CFより

$\angle$ELC＝$\angle$FCL ……………………⑥

④，⑤，⑥より

ΔECL≡ΔFLC

∴LE＝CF

解答例

問2　証明

AKの延長上に点にHをとる。円に内接する四辺形ABCKにおいて

$\angle$ABC＝$\angle$CKH

同様に四辺形AELKにおいて

$\angle$AEL＝$\angle$CKH

∴$\angle$ABC＝$\angle$AEL

∴BF // EL ……………………………①

$\overset{\frown}{KD}$に対する円周角

$\angle$KCD＝$\angle$KAD＝$\angle$KAF

$\overset{\frown}{KF}$に対する円周角

$\angle KLF = \angle KAF$

$\therefore \angle KCD = \angle KLF$

よって

CD // LF ……………………………………②

①，②より四辺形CELFは平行四辺形。

従って，対角線は互いに他を二等分してMはEFの中点である。

この部分について，大学入試程度の答案としてはこの程度のかき方が簡潔で要を得て十分であると思う。しかし先に着眼点の問4でふれた様な不満がないわけではない。それでこの不満を解消しようとすると前述の様にこれの証明付加する他はないであろう。

3

正の整数 a，b，c，d が $a^2+b^2+c^2=d^2$ を満たしている。このとき，次の問に答えよ。

問1　$a=1$，$b=2$のとき，c，d の値を求めよ。

問2　$d=7$，$a \geqq b \geqq c$ のとき，a，b，c を求めよ。

問3　a，b，c のうち少なくとも2つは偶数であることを証明せよ。

着眼点

問2　$a \geqq b \geqq c$ より c の値の範囲を求める。

問3　「a，b，c が奇数である」「a，b，c のうち1つが偶数である」ということが成り立たないことを示す。

解答例

問1　$a=1$，$b=2$より，

$5+c^2=d^2$

$d^2-c^2=5$

$(d-c)(d+c)=5$

$d+c>d-c$ なので，$d-c=1$，$d+c=5$

よって，$c=2$，$d=3$

問2　$d=7$より，$a^2+b^2+c^2=49$ ……………①

$a \geqq b \geqq c$ より，$49 \geqq c^2+c^2+c^2 \geqq 3c^2$

ゆえに，$c \leqq \sqrt{\dfrac{49}{3}} = \dfrac{\sqrt{147}}{3}$

ここで，$\dfrac{\sqrt{147}}{3} < \dfrac{13}{3} = 4.33\cdots\cdots$，

$\dfrac{\sqrt{147}}{3} > \dfrac{12}{3} = 4$

ゆえに，c の値の範囲は，$1 \leqq c \leqq 4$となる。

$c=1$のとき，①は $a^2+b^2=48$

b	1	2	3	4	5
b^2	1	4	9	16	25
a^2	47	44	39	32	23

表より，$c=a$ のときの整数 a，b の値はなし。

$c=2$のとき，①は $a^2+b^2=45$

b	2	3	4
b^2	4	9	16
a^2	41	36	29

表より，$c=2$のときの整数 a，b の値は，$a=6$，$b=3$

$c=3$のとき，①は $a^2+b^2=40$

b	3	4
b^2	9	16
a^2	31	24

表より，$c=3$のときの整数 a，b の値はなし。

$c=4$のとき，①は $a^2+b^2=33$

$b=4$のとき，$a^2=17$となり，このときの整数 a，b の値はなし。

よって，以上より $a=6$，$b=3$，$c=2$

問3　a，b，c がすべて奇数とすると，

$a=2x-1$，$b=2y-1$，$c=2z-1$（x，y，z は自然数）とおける

$a^2=4x^2-4x+1$，$b^2=4y^2-4y+1$，

$c^2=4z^2-4z+1$

$a^2+b^2+c^2=4(x^2+y^2+z^2-x-y-z)+3$

$=4m+3$（m は自然数）

ゆえに，d は奇数となり，$d=2n-1$（n は自然数）とおくと，$d^2=4n^2-4n+1$

$4m+3=4n^2-4n+1$

$4m=4n^2-4n-2$

$=2(n^2-n-1)$

$=2\{n(n-1)-1\}$

これより，左辺は4の倍数であるが，$n(n-1)-1$は奇数となるので，右辺は4の倍数とならない。よって，矛盾する。したがって，a，b，c がすべて奇数となる場合は存在しない。

a，b，c のうち1つが偶数で，2つが奇数とすると，$a=2x$，$b=2y-1$，$c=2z-1$（x，y，z は自然数）としても一般性を失わない。

$a^2+b^2+c^2=4x^2+4y^2-4y+1+4z^2-4z+1$

$=4(x^2+y^2+z^2-y-z)+2$

$=4m+2$ （m は自然数）$=d^2$

このとき，d は偶数となるので，$d=2n$（n は自然数）とおける。

ゆえに，$4m+2=4n^2$

$2m+1=2n^2$

左辺は奇数，右辺は偶数となり，矛盾する。

ゆえに，1つが偶数，2つが奇数となる場合は存在しない。

よって，すくなくとも2つは偶数である。

(Q.E.D.)

4

関数 $f(x)=|x^2+ax+b|$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を $\mathrm{M}(a,\ b)$ とおく。ただし，$a,\ b$ は実数の定数とする。

問1　$\mathrm{M}(0,\ -\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ を示せ。

問2　$\mathrm{M}(1,\ b)$ が最小となるように b の値を定め，そのときの最小値を求めよ。

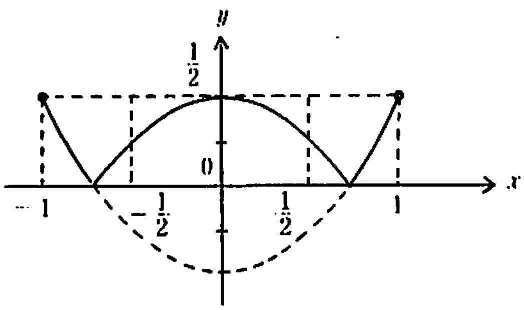
問3　$\mathrm{M}(a,\ b)$ の最小値は $\frac{1}{2}$ で，$a=0,\ b=-\frac{1}{2}$ に限ることを証明せよ。

着眼点

関数 $f(x)=|x^2+ax+b|$ を調べる代りに，$g(x)=x^2+ax+b$ の最大，最小から，$\mathrm{M}(a,\ b)$ の最小を見出す方がわかり易い。

解答例

問1　$f(x)=\left|x^2-\frac{1}{2}\right|$ より，$\mathrm{M}(0,\ -\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$



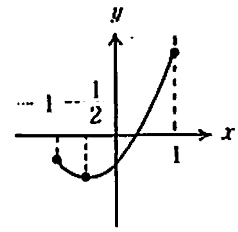
問2　$f(x)=|x^2+x+b|=\left|(x+\frac{1}{2})^2+b-\frac{1}{4}\right|$

$g(x)=x^2+x+b$ とおくと，

$-1\leqq x\leqq 1$ において，

最大値 $g(1)=2+b$

最小値 $g(-\frac{1}{2})=b-\frac{1}{4}$



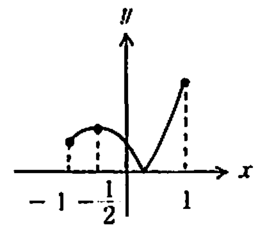
最大値－最小値$=\frac{9}{4}$ だから，$f(x)=|g(x)|$ の最大値 $\mathrm{M}(1,\ b)$ が最小となるのは，

$g(1)=2+b=\frac{9}{8}$

$g(-\frac{1}{2})=b-\frac{1}{4}=-\frac{9}{8}$

のときに限る。

故に，$b=-\frac{7}{8}$ で，最小値は，$\mathrm{M}(1,\ -\frac{7}{8})=\frac{9}{8}$



問3　a を固定する。

$g(x)=x^2+ax+b=(x+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}$

$-1\leqq x\leqq 1$ における最大値 M，最小値 m について調べよう。

(i)　$-\frac{a}{2}<-1$，すなわち $a>2$ のとき，

$\mathrm{M}=g(1)=1+a+b$

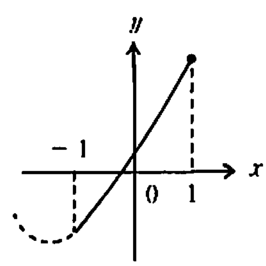
$m=g(-1)=1-a+b$

$\mathrm{M}-m=2a$ より $\mathrm{M}(a,\ b)$ が最小となるのは，

$\begin{cases}1+a+b=a\\1-a+b=-a\end{cases}$ のときに限る。

よって，$b=-1$ のとき，最小値

$\mathrm{M}(a,\ -1)=a\ (>2)$



(ii)　$-1 \leqq -\dfrac{a}{2} < 0$，すなわち$0 < a \leqq 2$

$$\mathrm{M}=g(1)=1+a+b$$

$$m=g\left(-\frac{a}{2}\right)=b-\frac{a^2}{4}$$

$$\mathrm{M}-m=\frac{a^2}{4}+a+1=\frac{1}{4}(a+2)^2$$

M$(a,\ b)$が最小となるのは，

$$\begin{cases} 1+a+b=\dfrac{1}{8}(a+2)^2 \\ b-\dfrac{1}{4}a^2=-\dfrac{1}{8}(a+2)^2 \end{cases}$$

よって，$b=\dfrac{1}{8}a^2-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}$のとき，

最小値 $\mathrm{M}(a,\ b)=\dfrac{1}{8}(a+2)^2\left(>\dfrac{1}{2}\right)$

(iii)　$a=0$のとき，

$$\mathrm{M}=g(1)=g(-1)=1+b$$

$$m=g(0)=b$$

$\mathrm{M}-m=1$より

M$(0,\ b)$が最小となるのは，

$$\begin{cases} 1+b=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2}\text{のときに限る。} \end{cases}$$

よって，$b=-\dfrac{1}{2}$のとき，最小値

$$\mathrm{M}\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

(iv)　$0 < -\dfrac{a}{2} \leqq 1$，すなわち$-2 \leqq a < 0$。

$$\mathrm{M}=g(-1)=1-a+b$$

$$m=g\left(-\frac{a}{2}\right)=b-\frac{a^2}{4}$$

$$\mathrm{M}-m=\frac{1}{4}a^2-a+1=\frac{1}{4}(a-2)^2$$

M$(a,\ b)$が最小となるのは，

$$\begin{cases} 1-a+b=\dfrac{1}{8}(a-2)^2 \\ b-\dfrac{1}{4}a^2=-\dfrac{1}{8}(a-2)^2 \end{cases}$$

よって，$b=\dfrac{1}{8}a^2+\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}$のとき，

最小値 $\mathrm{M}(a,\ b)=\dfrac{1}{8}(a-2)^2\left(>\dfrac{1}{2}\right)$

(v)　$1 < -\dfrac{a}{2}$，すなわち$a < -2$のとき，

$$\mathrm{M}=g(-1)=1-a+b$$

$$m=g(1)=1+a+b \text{ より}$$

$$\mathrm{M}-m=-2a$$

M$(a,\ b)$が最小となるのは，

$$\begin{cases} 1-a+b=-a \\ 1+a+b=a \end{cases}$$

よって，$b=-1$のとき，最小値

$\mathrm{M}(a,\ -1)=-a\ \ (>2)$

(i)〜(v)から，M$(a,\ b)$が最小となるのは，$a=0$，$b=-\dfrac{1}{2}$のときに限り，最小値は$\dfrac{1}{2}$である。

（証終）

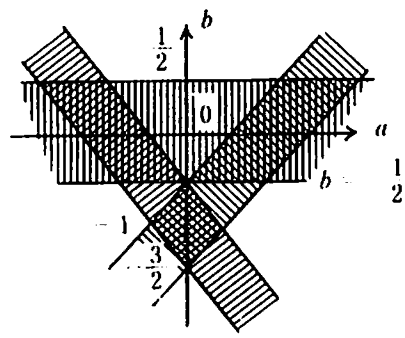
問3の別解

いま，$\mathrm{M}(a,\ b) \leqq \dfrac{1}{2}$ならば，

$$\begin{cases} f(1)=|1+a+b| \leqq \dfrac{1}{2} \\ f(0)=|b| \leqq \dfrac{1}{2} \\ f(-1)=|1-a+b| \leqq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

これらの共通範囲は，下の図から，

$(a,\ b)=\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$に限る。



5

半径2の円板（円周と円の内部）D上に半径1の円板（円周を含む）を何枚かおいて完全におおいつくしたい。

問1　半径1の円板を7枚用いると，Dをおおいつくすことができることを示せ（作図せよ）。

問2　半径1の円板6枚ではDをおおいつくすことができないことを証明せよ。

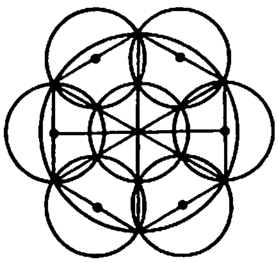
着眼点

いろいろな図形を半径1の円でおおいつくす問題

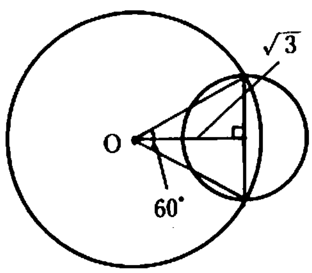
は「被覆（カバリング）の問題」といわれ「詰め込み（パッキング）問題」とならんでおもしろい問題の宝庫である。この場合は半径2の円周をおおいつくすには何個の円板が必要かに気がつくことがポイントである。

解答例

問1　下のようにおけばよい。



問2　まず半径2の円板と半径1の円板の交わってできる弧と弦の長さに注目する。弦の長さの最大値は2である。そのときの弧に対応する中心角は60°である(三角形は正三角形)，またそのとき2つの円の中心間の距離は$\sqrt{3}$である。
（∵　2つの円が交ってできる点を結ぶ弦の長さは弦が小さい円の中心を通るとき最大となる。）



さて半径2の円板の円周をおおいつくすのに何個の円板が必要か考えてみよう。弦の長さ最大のとき弧の長さも最大になり，そのとき中心角60°より，円周を完全におおうには$\frac{360°}{60°}=6$個の半径1の円が必要である。円板全体をおおうには円周，及び内部の点をおおわなければならないので半径1の円板は6枚以上が必要である。

背理法を用いる。半径1の円板6枚でDをおおうとするとDの円周をおおわなければならない。しかしこのとき半径1の円と半径2の円の中心距離$\sqrt{3}$よりDの中心はどの半径1の円板にも含まれない。これは半径1の円板6枚でDをおおえるとした仮定に反する。よって命題成立。

第 10 回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

平成４年１月12日(日)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第10回「数学コンテスト」を終えて

北数教高等部会長　村　上　　　侃

昭和58年度（1983年）１月15日に第１回が実施された「数学コンテスト」も今回で第10回を迎えることができました。今年も全道各地から中学生を含む多数の高校生諸君の参加を得て盛大に開催できたことは関係者一同喜びにたえません。このコンテストに対する理解と数学に対する興味・関心や数学の重要性が認識されてきたことの表れとうれしく思うとともに，全道各地で熱心に指導に当っておられる先生方のご努力に深く感謝と敬意を表します。

この「数学コンテスト」は，アメリカや東欧諸国で行なわれていた“数学オリンピック”にヒントを得て，北海道においてもそれに似た催しを行ない，数学好きの高校生や中学生に刺激を与え，一層数学的な興味を高め，また数学に楽しく挑戦することを通して，潜在している数学的能力を引き出す手立てとして実施してきました。1989年から世界の50ケ国目として，日本も国際数学オリンピックに参加し，予選の日本数学オリンピックにおいて，本道の高校生が毎回優秀な成績を収めており，特に中国の北京で行われた第31回大会で札幌の高校生が銅メダルを受賞したことは大変嬉しいことでした。数学コンテストや数学オリンピックは，単に数学の問題を解く力を競い，それに優劣をつけるものではありません。この数学コンテストをとおして，数学教育本来の目標である基本的な概念や原理・法則，論理的思考力や創造的な考え方を自らがそれぞれの持っている能力に応じて問題を解決しながら身につけ，数学にたいする興味・関心を高めることにあります。21世紀に向けての高度情報化と国際化に数学の果す役割はますます重要であります。さらにこの数学コンテストをきっかけとして数学を愛する同好の士が増え，それぞれの学校で互いに励まし合いながら一層本道の数学の学力の水準を高めることに役立ちたいとも念願しています。

終わりになりましたが，北海道教育委員会，札幌市教育委員会，北海道高等学校校長協会より賜わりました後援並びに北海道新聞社，福武書店の物心両面にわたるご高配に厚くお礼申し上げるとともに，本年も問題作成について御尽力頂きました北海道大学理学部数学科，出題や採点からコンテストの運営全般にわたってご苦労いただいた北数教高校部会研究部，さらに全道各地で実施にご協力いただいた会場校や諸先生に厚くお礼申し上げます。今度ともご協力の程よろしくお願いいたします。

●成績優秀者

小野 昌弘	夏井坂 光輝	山本 雄士	鎌田 秀明
山崎 浩一	北畠 徹也	尾田 智將	宮崎 丈
田辺 一隆	名取 知祐	安達 大介	萬代 淳二
長田 直樹	木沢 敏毅	寺島 啓太	青山 豊志
鈴木 健太	加納 里志	岡田 浩介	久保田 信彦
羽賀 俊太郎	柿坂 達彦	佐藤 晃洋	

第10回　数学コンテスト度数分布

得点	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	階級	合計
40	11	39	15	3	2	200 ～ 200	0
39	1	0	1	1	0	195 ～ 199	0
38	8	5	1	0	7	190 ～ 194	0
37	3	1	0	0	0	185 ～ 189	0
36	1	1	0	0	0	180 ～ 184	0
35	0	3	1	2	8	175 ～ 179	2
34	2	0	0	0	0	170 ～ 174	2
33	11	1	1	1	0	165 ～ 169	2
32	3	4	0	0	4	160 ～ 164	1
31	0	0	3	0	0	155 ～ 159	4
30	16	11	5	1	3	150 ～ 154	2
29	0	0	1	8	0	145 ～ 149	2
28	0	0	0	0	11	140 ～ 144	8
27	1	1	0	1	0	135 ～ 139	2
26	0	0	4	3	0	130 ～ 134	6
25	10	5	3	11	1	125 ～ 129	7
24	0	1	0	5	0	120 ～ 124	6
23	1	0	2	2	0	115 ～ 119	5
22	21	2	0	6	2	110 ～ 114	8
21	0	0	0	3	0	105 ～ 109	8
20	59	11	42	11	38	100 ～ 104	6
19	0	0	6	0	0	95 ～ 99	11
18	0	0	12	11	11	90 ～ 94	10
17	3	0	4	4	0	85 ～ 89	6
16	0	0	6	2	0	80 ～ 84	13
15	7	4	0	2	1	75 ～ 79	7
14	0	0	2	24	0	70 ～ 74	5
13	0	0	5	3	0	65 ～ 69	9
12	2	6	1	10	1	60 ～ 64	9
11	0	1	13	3	0	55 ～ 59	4
10	11	76	2	11	43	50 ～ 54	7
9	0	0	10	3	0	45 ～ 49	8
8	0	0	13	4	2	40 ～ 44	5
7	0	0	2	2	0	35 ～ 39	3
6	0	0	6	2	0	30 ～ 34	2
5	2	3	2	3	1	25 ～ 29	2
4	0	0	2	4	0	20 ～ 24	2
3	0	0	4	2	0	15 ～ 19	0
2	0	0	0	2	0	10 ～ 1	1
1	0	0	0	0	0	5 ～ 9	1
0	3	1	7	26	41	0 ～ 4	0
受験者数	176	176	176	176	176	176	
総計	4,179	3,777	3,118	2,577	2,657	16,308	
平均点	23.7	21.4	17.7	14.6	15.0	92.6	
S・D	8.9	13.0	10.3	9.7	11.7	37.2	

1

技術の進歩により，相異なる言語をコンピュータで互いに翻訳すること（機械翻訳）が可能になってきた。機械翻訳の方式は２通りある。第一は〝個別方式〞と呼ばれ，例えば，互いに訳したい言語がＡとＢの２つあるとき，ＡからＢへ訳すプログラムＴ(Ａ，Ｂ)と，ＢからＡへ訳すプログラムＴ(Ｂ，Ａ)の２つが必要である。また，言語がＡ，Ｂ，Ｃの３つあるときは，Ｔ(Ａ，Ｂ)，Ｔ(Ｂ，Ａ)，Ｔ(Ｂ，Ｃ)，Ｔ(Ｃ，Ｂ)，Ｔ(Ｃ，Ａ)，Ｔ(Ａ，Ｃ)の６つのプログラムが必要となる。第二の方式は〝中間言語方式〞と呼ばれ，まず中間言語Ｏを作っておき，それから，それぞれの訳したい言語とＯとの間の翻訳プログラムを作る。例えば，訳したい言語がＡ，Ｂの２つのとき，Ｔ(Ａ，Ｏ)，Ｔ(Ｏ，Ａ)，Ｔ(Ｂ，Ｏ)，Ｔ(Ｏ，Ｂ)の４つの翻訳プログラムが必要であり，訳したい言語がＡ，Ｂ，Ｃの３つのときは，Ｔ(Ａ，Ｏ)，Ｔ(Ｏ，Ａ)，Ｔ(Ｂ，Ｏ)，Ｔ(Ｏ，Ｂ)，Ｔ(Ｃ，Ｏ)，Ｔ(Ｏ，Ｃ)の６つが必要となる。

問１　訳したい言語がＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄの４個のとき，〝個別方式〞と〝中間言語方式〞で必要となる翻訳プログラムの個数を求めよ。

問２　訳したい言語の個数が n 個 ($n≧2$) のとき，〝個別方式〞と〝中間言語方式〞で必要となる翻訳プログラムの個数を求めよ。

問３　翻訳プログラムの作成費用は，方式及び言語の種類を問わず皆同じであるとする。また，中間言語Ｏの作成費用は翻訳プログラムの k 倍 ($k>0$) であるとする。このとき，言語の個数を n とするとき，作成費用はどちらの方式の方が安いか？

講　評

配点　問１，問２各10点
　　　問３　　　　20点

問１～問２までは，参加者のほぼ全員に近い人が解答しており，内容も満足できるものでした。

問３で点差がつきました。費用の単価を断っていなかったり，問題文の読みちがいか，中間言語の作成費用を

$$M = 2an + 2kn$$

とした誤りが目立ちました。

さらに，k を動かすことにより，共有点でとらえようとする失敗もありました。条件文は長いので k は固定してよいことに気付かなかったのかもしれません。

ただ，敬服に値する解答もありました。中学生でしたが，ガウス記号をつかって，n の範囲を表示しようとするものでした。解答中の文点の座標 α が整数のときならいいのですが，そうでないときは等号は成立しません。失敗はしましたが，積極的にガウス記号で表示しようとした心意気が素晴らしいと思います。今後の御健闘を願ってやみません。

解答例

問１　着眼点の図にあるように，個別方式では12個，中間言語方式では，８個必要である。

問２　個別方式の場合。

１つの言語から他の言語に翻訳するプログラムの個数は，$n-1$。よって，全部で $n(n-1)$。

中間言語方式の場合。

１つの言語と中間言語との相互翻訳で２個必要。よって全部で $2n$。

問３　翻訳プログラムの作成費用を１として，全体の作成費用を y とすると

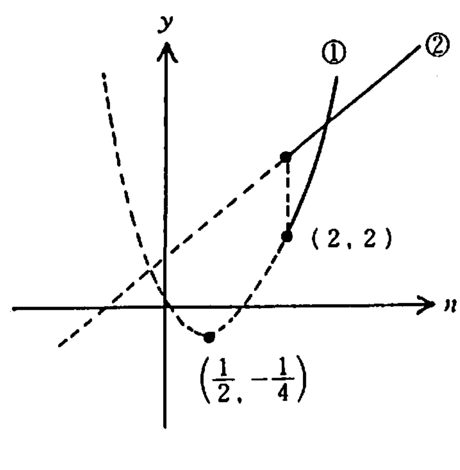
$y = n(n-1)$ ………①（個別方式）

$y = 2n + k$ …………②（中間言語方式）

但し，$n \geqq 2$，$k > 0$

①と②の大小関係を求めればよい。

①と②のグラフ



交点の座標は①，②より

$$n^2 - 3n - k = 0$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9+4k}}{2}$$

$\sqrt{9+4k} > 3$　なので

$$n = \frac{3 + \sqrt{9+4k}}{2}$$

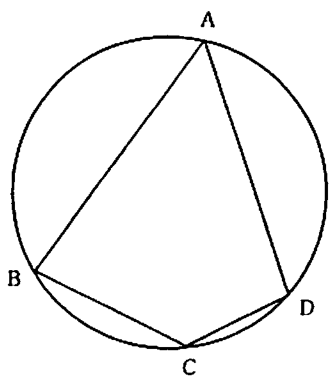
グラフより，nが2から①，②の交点までは①のほうが安く，交点では同じ，交点よりnが大になると，②の方が安い。

$$\therefore \begin{cases} 2 \leqq n < \dfrac{3+\sqrt{9+4k}}{2} \text{ のとき，} \\ \text{個別方式が安い。} \\ n = \dfrac{3+\sqrt{9+4k}}{2} \quad 〃 \quad , \\ \text{どちらも同じ。} \\ n > \dfrac{3+\sqrt{9+4k}}{2} \quad 〃 \quad , \\ \text{中間言語方式が安い。} \end{cases}$$

$\boxed{2}$

図のように四辺形ABCDに外接する円ABCDがある。

直線ABとCDとの交点をE，直線BCとADとの交点をF，円AEFと円ABCDとのもう一つの交点をK，直線KCと円AEFとのもう一つの交点をLとする。



問1　上の文章に適する図をかけ。解答用紙の図に必要な線をつけ加えて完成せよ。すべてfree handでよいがcompassや定規を使ってもよい。

問2　BC // ELを証明せよ。

問3　DC // FLを証明せよ。

問4　直線EFと直線KLの交点をMとすれば，MはEFの中点であることを証明せよ。

講　評

1．配点基準

4問全部10点ずつにした。生徒は文章に適合する図をかくことに不馴れである。

第1問を其他と同点にしたのは，その為であるが此度は第1問を書いたものは唯一名を除いて全員であって，少なくとも10点（25%）を得たということは受験生の気持ちをいくらか和らげることであろう。

次に1つの問題について全くブランクの答案と何か書いてある答案を区別すべきであるとの見解について，その叙述の内容によって前向きであれば勿論，たとえ誤答であってもその内容に応じて若干の加点をした。

2．出題の意図等

以下中学校で学習した図形教材を初等幾何と呼ぶことにするので了承してもらう。コンテストでは第1回から初等幾何を必ず一題入れることを出題採点関係者全員一致で定めている。

初等幾何は中学だけで与えられるが高校では再び現われない。といえば過言であって，初等幾何が中学に移されてから以来，さまざまな形で高校にも現れたのであるが，結局うまくなくて消え去ったというのが実情である。

次の改訂（平成6年）でも平面幾何という名で数学Aの一項目として出ることになるが，これもいずれは消え去る運命にあるものと推察される。

所で高校の教材で関数関係教材，ベクトル座標幾何，マトリックスなどでは初等幾何の知識と手段が極めて有効に作用するのである。コンテストに出題するのは，これによって受験生に初等幾何の有効性と重要性を認識してもらいたいのがその理由である。

出題は初等幾何であるが，解答は三角関数，座標幾何，ベクトルなどを使用してもよく，またその為に得点に不利とならないよう考慮してある。

次に今回の問題について触れよう。

今回は〝内接四辺形の角関係〟，〝平行四辺形の性質〟の2点にだけしぼった易しい問題にした。その為か得点分布がU字型になり最悪な問題となったが止むを得ない，他の問題が非常にhardなので，せめてこの初等幾何でリラックスしてもらいたいのが出題者の気持ちであった。しかし高校入学によって初等幾何を忘れることもあり，また中学では図形移動という重要な事項についてあまり多くの時間をかけないので受験生はどうしても易しいとは感じないらしい。

3．着眼点，解答例等について

述べたい事も色々あるが，コンテストの時に渡した解答と解説を見てもらうことにしてすべて省略する。

4．感　想

問題の内容は易しいが，図の複雑さの為に関係発見に苦心したであろうと推察する。

特に図についてであるが，点の数は問1でローマ大文字A，B，C，D，E，F，K，Lの8個，問4でM1個，計9個の点だけでどの問題も解けるよ

うに配慮しておいた。つまり，受験生が新しく点を追加しなくてもよいようにしたのであるが，せっかくの配慮にかかわらず，点の追加をした者がおり，その叙述が不完全であったり，点を図に示さなかったり色々欠点があらわれた。出題者の配慮が無駄になったのは之等の受験生にたいして残念であった。

答案用紙に問１の図に採点者が赤ペン書きしたのはそれらの注意である。

さて，次に大きな感想を述べたい。初等幾何の解答を調べるに当って最も苦労することは叙述された文章にローマ大文字が最も多く入って居りそのローマ大文字を一字一字ていねいに読まなければならないことである。

論理的に誤りないかを見るのは勿論図とも適合しているかどうかも確かめなければならない。証明問題での最難関であり，時には１題の解答に数分を費やすことがある。これは採点者にとってかなりの苦労である。

そんなことが高校入試に証明問題が出ない原因の一つであろう。

出題者は同時に採点者でもあり，10回のコンテストにあって何度もその苦労を体験してきた，そしていつでも疲れた目と指を休めながら，ふと頭に浮かぶのはこの答案を書いた生徒の心理状態である。

どちらかといえば，この種の答案は誤答であるか，そうでなくともまわりくどい叙述なのである。どうしてそうなるか，受験生はコンテストという異常な状態の中で，精神的に興奮している。その中での必死の健斗なのである。

受験生は苦しんでいる。文字の一つ一つがその苦しみを我々に向かって訴えているのだ。その考えに到達したとき，採点者である我々がこんなことで苦しいなどと思うことは，受験生に対して申し訳がない。受験生の苦しみをそのまま我々の苦しみとして素直に受けとめ，複雑な文章を一字一字配慮しながら，ていねいに読み，受験生の意図をくみとらなければならない。……と思い続け第10回にまで至ったのである。

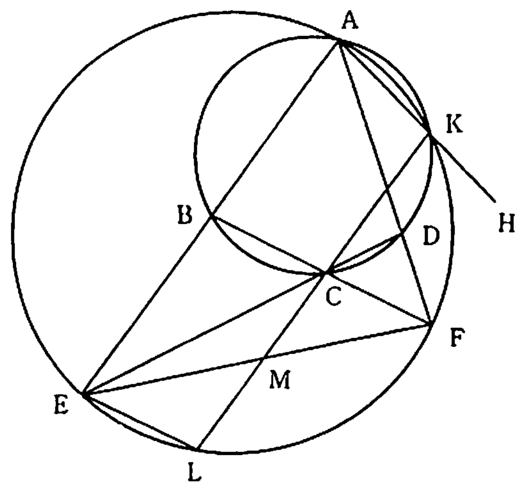
受験生の苦しみを共にしたいという実感が受験生に対する大きな親近感となってくる。

成績の良かった受験生には，その意気で進めと励ましてやりたい。そして成績はあまり良くなかったが，ともかく自分の力でできるだけ精一杯の努力を答案にぶちまけた，これらの受験生にはそうだ，それでいいのだ，人生はもっと苦しいぞ，くじけずに強く生き抜いていってくれよと呼びかけたい。

解答例

問１　作図

円 AEF を正確にかかないと，フリーハンドでは二円の交点 K が見当がつけにくい。



問２　BC // EL を証明するのは，同位角又は錯角と関連づけられるし，円に内接する四辺形がいくつか出来るので円周角あるいは相対する内角とか，外角と内対角の関係定理などが頭にうかんでくるだろう。要するに角の移動が解決の糸口となるだろうと考えて工夫してみる。

BC // EL を証明するには，

$\angle$ ABF＝$\angle$ AEL がいえれば十分である。

$\angle$ ABF を四辺形 ABCK の内角とみると

$\angle$ ABF＝$\angle$ CKH（H は AK の延長）

$\angle$ AEL を四辺形 AELK の内角とみると

$\angle$ AEL＝$\angle$ CKH

$\therefore \angle$ ABF＝$\angle$ AEL

となってめでたしめでたし。

問３　DC // FL を証明するには $\angle$ KCD＝$\angle$ KLF がいえれば十分である。

$\overset{\frown}{\mathrm{KD}}$に対する円周角

$\angle$ KCD＝$\angle$ KAD

$\overset{\frown}{\mathrm{KF}}$に対する円周角

$\angle$ KLF＝$\angle$ KAF＝$\angle$ KAD

$\therefore \angle$ KCD＝$\angle$ KLF

問４　問２，問３により四辺形 CELF は平行四辺形。従って対角線は互いに他を２等分するので

EM＝FM

とやってしまっては，味もそっけもない。ただ問題の結果を定理の形で言いかえたにすぎないので，これだけでは証明したとはいえまい。そこで答案としてはこの定理自体を証明すること

にする。

$\triangle MCF$ と $\triangle MLE$ において平行四辺形の対辺は等しいから

$CF=LE$ ……①

$CF \parallel EL$ なので錯角をつかって

$\angle MCF=\angle MLE$ ……②

$\angle MFC=\angle MEL$ ……③

①，②，③より

$\triangle MCF \equiv \triangle MLE$

$\therefore FM=EM$

ここで①で使った CF＝LE は結論。

FM＝EM と同程度の定理なので，これもついでに証明しておくと，

$\triangle ECL$ と $\triangle FLC$ において

$CL=LC$（共通）……④

$EC \parallel FL$ より

$\angle ECL=\angle FLC$ ……⑤

$EL \parallel CF$ より

$\angle ELC=\angle FCL$ ……⑥

④，⑤，⑥より

$\triangle ECL \equiv \triangle FLC$

$\therefore LE=CF$

3

正の整数 a，b，c，d が $a^2+b^2+c^2=d^2$ を満たしている。このとき，次の問に答えよ。

問1　$a=1$，$b=2$のとき，c，d の値を求めよ。

問2　$d=7$，$a \geqq b \geqq c$ のとき，a，b，c を求めよ。

問3　a，b，c のうち少なくとも2つは偶数であることを証明せよ。

講　評

配点　(1)6点，(2)14点，(3)20点

(1)　だいたいの生徒はできていたが，説明不足の答案もかなりあった。
c，d が正の整数であることから上手に問題を処理していない答案もあった。
基本的な問題なので絶対に出来てほしい問題であった。

(2)　説明不足の答案も多くあったが，全体的にはよく解答していた。
解答としては2通りの考え方があった。
1つは解答例のように a または c の値の範囲を決めて求めていく方法と，2つめは a，b，c は1，2，3，4，5，6のどれかなので，a^2，b^2，c^2 は，1，4，9，16，25，36となることから，和が49となる組み合わせを見つけていく方法の2通りであった。

(3)　思っていた以上によく問題に取り組んでいたように感じる。
a，b，c が3つとも奇数のときは $2x-1$，$2y-1$，$2z-1$ とおき，1個だけが偶数のときは，$2x$，$2y-1$，$2y-1$，$2z-1$ とおいて矛盾を導いている解答が多かったが，4で割ったときの余りに注目して矛盾を導いている解答もあった。
なかには，mod という記号を用いている生徒もいて感心した。

解答例

問1　$a=1$，$b=2$ より，

$$5+c^2=d^2$$
$$d^2-c^2=5$$
$$(d-c)(d+c)=5$$

$d+c>d-c$ なので，$d-c=1$，$d+c=5$

よって，$c=2$，$d=3$

問2　$d=7$ より，$a^2+b^2+c^2=49$ ……①

$a \geqq b \geqq c$ より，$49 \geqq c^2+c^2+c^2 \geqq 3c^2$

ゆえに，$c \leqq \sqrt{\dfrac{49}{3}}=\dfrac{\sqrt{147}}{3}$

ここで，$\dfrac{\sqrt{147}}{3}<\dfrac{13}{3}=4.33\cdots\cdots$，

$\dfrac{\sqrt{147}}{3}>\dfrac{12}{3}=4$

ゆえに，c の値の範囲は，$1 \leqq c \leqq 4$ となる。

$c=1$のとき，①は $a^2+b^2=48$

b	1	2	3	4	5
b^2	1	4	9	16	25
a^2	47	44	39	32	23

表より，$c=1$ のときの整数 a，b の値はなし。

$c=2$のとき，①は $a^2+b^2=45$

b	2	3	4
b^2	4	9	16
a^2	41	36	29

表より，$c=2$のときの整数 a，b の値は，$a=6$，$b=3$

$c=3$のとき，①は $a^2+b^2=40$

b	3	4
b^2	9	16
a^2	31	24

表より，$c=3$のときの整数 a，b の値はなし。

$c=4$のとき，①は $a^2+b^2=33$

$b=4$のとき，$a^2=17$となり，このときの整数 a，b の値はなし。

よって，以上より $a=6$，$b=3$，$c=2$

問 3　a，b，c がすべて奇数とすると，

$a=2x-1$，$b=2y-1$，$c=2z-1$（x，y，z は自然数）とおける

$a^2=4x^2-4x+1$，$b^2=4y^2-4y+1$，

$c^2=4z^2-4z+1$

$a^2+b^2+c^2=4(x^2+y^2+z^2-x-y-z)+3$

$=4m+3$（m は自然数）

ゆえに，d は奇数となり，$d=2n-1$（n は自然数）とおくと，$d^2=4n^2-4n+1$

$4m+3=4n^2-4n+1$

$4m=4n^2-4n-2$

$=2(n^2-n-1)$

$=2\{n(n-1)-1\}$

これより，左辺は 4 の倍数であるが，$n(n-1)-1$は奇数となるので，右辺は 4 の倍数とならない。よって，矛盾する。したがって，a，b，c がすべて奇数となる場合は存在しない。

a，b，c のうち 1 つが偶数で，2 つが奇数とすると，$a=2x$，$b=2y-1$，$c=2z-1$（x，y，z は自然数）としても一般性を失わない。

$a^2+b^2+c^2=4x^2+4y^2-4y+1+4z^2-4z+1$

$=4(x^2+y^2+z^2-y-z)+2$

$=4m+2$（m は自然数）$=d^2$

このとき，d は偶数となるので，$d=2n$（n は自然数）とおける。

ゆえに，$4m+2=4n^2$

$2m+1=2n^2$

左辺は奇数，右辺は偶数となり，矛盾する。

ゆえに，1 つが偶数，2 つが奇数となる場合は存在しない。

よって，すくなくとも 2 つは偶数である。

(Q.E.D.)

（別解）

一般的に，

奇数のとき$(2n+1)^2=4n(n+1)+1\equiv 1 \pmod 4$

偶数のとき$(2n)^2=4n^2\equiv 0 \pmod 4$

ここで，a，b，c がすべて奇数のとき，

$a^2+b^2+c^2\equiv 1+1+1=3 \pmod 4$

よって，d が奇数でも偶数でも矛盾する。次に，a，b，c のうち 1 個だけが偶数のとき，

$a^2+b^2+c^2\equiv 0+1+1=2 \pmod 4$

よって，d が奇数でも偶数でも矛盾する。

以上より，少なくても 2 つは偶数である。

4

関数$f(x)=|x^2+ax+b|$ の$-1\leqq x\leqq 1$における最大値を$\mathrm{M}(a, b)$とおく。ただし，a，b は実数の定数とする。

問 1　$\mathrm{M}(0, -\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ を示せ。

問 2　$\mathrm{M}(1, b)$が最小となるように b の値を定め，そのときの最小値を求めよ。

問 3　$\mathrm{M}(a, b)$の最小値は$\frac{1}{2}$で，$a=0$，$b=-\frac{1}{2}$ に限ることを証明せよ。

講　評

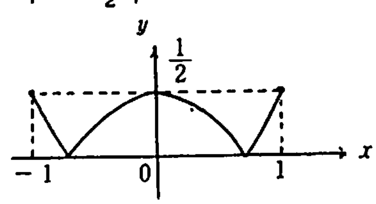
良くできていた生徒の名前を挙げると，田辺君（札南），山崎君（札北），木澤君（室栄），夏井坂君（北嶺高）ぐらいだろう。

解答の中で"$\mathrm{M}(a, b)$ が最小となるのは$f(-1)=f(-\frac{a}{2})=f(1)$に限る"と言及している生徒が多いが，その他に最小になることはないことをきちんと証明している生徒は全くいない。残念である。

解答例

問 1　ほとんどの生徒がグラフを書いて確かめていた。

$f(x)=|x^2-\frac{1}{2}|$

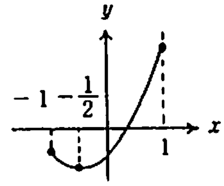


図より，$\mathrm{M}(0, -\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$．（10点）

問 2　$f(x)=x^2+x+b$

$g(x)=x^2+x+b=(x+\frac{1}{2})^2+b-\frac{1}{4}$，

$-1\leqq x\leqq 1$における $g(x)$の最大値M，最小値mは，



$\mathrm{M}=g(1)=b+2$

$m=g(-\frac{1}{2})=b-\frac{1}{4}$

常に，$\mathrm{M}-m=\frac{9}{4}$，

$f(x)=|g(x)|$の最大値 $\mathrm{M}(1, b)$ は，M，mの挙動に従って決定される。

$M > \frac{9}{8}$ なら，$-\frac{9}{8} < m < M$ だから，

$M(1, b) = M > \frac{9}{8}$，

$m < -\frac{9}{8}$ なら，$m < M < \frac{9}{8}$ だから，

$M(1, b) = |m| > \frac{9}{8}$，

よって，$M = -m = \frac{9}{8}$ のとき，$M(1, b)$ は最小値をとる。

故に，$b = -\frac{7}{8}$ のとき，最小値 $\frac{9}{8}$

（15点）

問3　a の値についての場合分け。

$g(x) = x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}$

問2，同様 $-1 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最大値をM，最小値を m とする。

(i) $-\frac{a}{2} < -1$，すなわち $a > 2$ のとき，

$M = f(1) = 1 + a + b$

$m = f(-1) = 1 - a + b$

常に，$M - m = 2a$（b に依存しない）。

よって，$M = a$ かつ $m = -a$ のとき，$M(a, b)$ は最小となる。

故に，$b = -1$ のとき，最小値 a（> 2）

(ii) $-1 \leqq -\frac{a}{2} < 0$，すなわち $0 < a \leqq 2$ のとき，

（問2の場合が含まれる）

$M = g(1) = 1 + a + b$

$m = g(-\frac{a}{2}) = b - \frac{a^2}{4}$

常に，$M - m = \frac{a^2}{4} + a + 1$（$b$ に依存しない）。

よって，$M = \frac{1}{2}(\frac{a^2}{4} + a + 1)$ かつ，$m = -\frac{1}{2}(\frac{a^2}{4} + a + 1)$ のとき，$M(a, b)$ は最小となる。

故に，$b = \frac{a^2}{8} - \frac{a}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(a^2 - 4a - 4)$ のとき，最小値 $\frac{1}{8}(a+2)^2$（$> \frac{1}{2}$）。

(iii) $-\frac{a}{2} = 0$，すなわち $a = 0$ のとき，

$M = g(-1) = g(1) = 1 + b$

$m = g(0) = b$

常に，$M - m = 1$（b に依存しない）

よって，$M = \frac{1}{2}$ かつ $m = -\frac{1}{2}$ のとき，$M(0, b)$ は最小値となる。

故に，$b = -\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\frac{1}{2}$

(iv) $0 < -\frac{a}{2} \leqq 1$，すなわち $-2 \leqq a < 0$ のとき，

$M = g(-1) = 1 - a + b$

$m = g(-\frac{a}{2}) = b - \frac{a^2}{4}$

常に，$M - m = \frac{a^2}{4} - a + 1$（$b$ に依存しない）

よって，$M = \frac{1}{2}(\frac{a^2}{4} - a + 1)$ かつ $m = -\frac{1}{2}(\frac{a^2}{4} - a + 1)$ のとき，$M(a, b)$ は最小となる。

故に $b = \frac{a^2}{8} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(a^2 + 4a - 4)$ のとき，最小値 $\frac{1}{8}(a-2)^2$（$> \frac{1}{2}$）

(v) $-\frac{a}{2} > 1$，すなわち，$a < -2$ のとき，

$M = g(-1) = 1 - a + b$

$m = g(1) = 1 + a + b$

常に，$M - m = -2a$（b に依存しない）。

よって，$M = -a$，$m = a$ のとき，$M(a, b)$ は最小をなる。

故に，$b = -1$ のとき，最小値 $-a$（> 2）

(i)〜(v)から，$M(a, b)$ が最小となるのは，(iii)の場合で，証明が終わる。

（15点）

5

> 半径2の円板（円周と円の内部）D上に半径1の円板（円周を含む）を何枚かおいて完全におおいつくしたい。
>
> 問1　半径1の円板を7枚用いると，Dをおおいつくすことができることを示せ（作図せよ）。
>
> 問2　半径1の円板6枚ではDをおおいつくすことができないことを証明せよ。

（採点基準）

問1…20点（中心に1枚，まわりに6枚用いることに気がついていたら10点）

問2…20点（円周部をおおうのに6枚必要ということに気がつくと10点）

講　評

受験後のアンケートをみると，5の感想としては「おもしろい」「いろいろと考えられて楽しい」などの意見もあったが，「わけがわからない」「どうやって証明したらよいのか見当もつかない」などの声もあった。円や正方形などでいろいろな図形を「おおいつくす」「うめつくす」問題は秋山仁，ピーターフランクルなどの数学者が雑誌の記事やエッセイなどでも取り上げたりして，もしかすると見かけたことのある人もいるかもしれない。予備知識はそれほど必要はなく，やさしいと思って出題したのだが，「かんたんだ」と思った人と「どうやって手をつけてよいのかわからない」という2つの人がいたかと思う。ポイントは半径2の円をおおうためには円周だけでも6個の半径1の円がいることに気がつくことにある。また問2も同じ発想(円周をおおうのに6枚必要）でできる。

問1

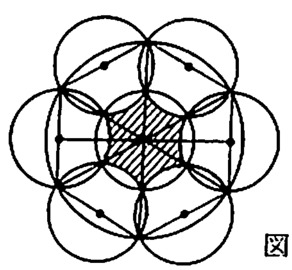


図1

半径2の円と半径1の円の共通弦の最大値は2で，このとき弧に対する中心角は60°である。

よって $OH=\sqrt{3}$，$AH=1$，$OA=2$ である。また，$\angle AOH=30°$より $OAB=60°$よって$\triangle ACH$も正三角形ゆえに $AH=CH=AC=1$ よって $OC=1$

また $OD=\sqrt{3}-1$ となる。図1のように半径1の円板6枚で円周はすべておおうことができて，残った部分（図1の斜線部）も半径2の円の中心からの距離は最大で1より半径2の円の中心を中心とする半径1の円によってすべておおうことができる。(図2参照)

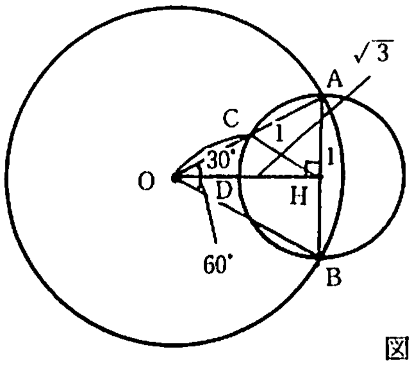


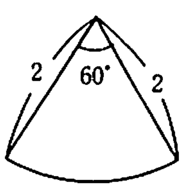
図2

採点時のポイントは3つの円がすべて一点で交わるということであり，このことから半径が1より少しでも小さければ7枚でもおおえないことがわかる。

問2　問1の発想をそのままもってくればよい。「円周をおおうためには6枚の円板が必要だが，円周をおおうと，半径2の円の中心はどの円板にもおおわれていない」ということでよいのだが，そこのところをしっかり書いてくれた人はほとんどいなかった。「まん中があいてしまう」「まん中にずらすとおおわれなくなる」など意図はわかるがもっとはっきり述べてほしい。その意味で満点の答案だったのは受験番号16番の本間君だけだった。他の人は多かれ少なかれ説明不足だった。

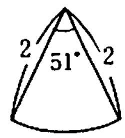
別解として2つのパターンがあった。大きい円の中心にひとつ，まわりに5つの半径1の円を配置して，半径2の円をおおうことができない（正五角形を作る）ことを示したものだが，この配置でおおうことができないことはいえても，一般に6枚ではおおえないことは示すことができない。

もうひとつ『円を6等分してできる扇形を半径1の円でおおうことができないことから円は半径1の円板6枚でおおえない』としたものもかなりあったが，これは正しいだろうか。論理を考えてみよう。



Ⓐ　| 1つの扇形は半径1の円でおおえない | ⇨ | 円板全体は半径1の円6枚でおおえない |

これが正しいとすると円を7等分してできる中心角$\frac{360°}{7}\fallingdotseq 51°$の扇形も半径1の円でおおえないことから，円板7枚でもおおえなくなってしまう（矛盾!!）



よってこの論理は正しくない。正しそうに見えても正しくないのである。一方次は正しい。

Ⓑ　| 1つの扇形を半径1の円でおおえる | ⇨ | n個の扇形からなる大円はn個の小円でおおえる |

命題 $p\to q$ に対して $q\to p$ を命題の逆

（$\overline{p}$ は p の否定）　$\overline{p}\to\overline{q}$ を命題の裏

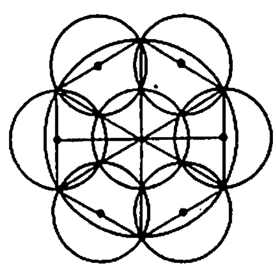
$\overline{q}\to\overline{p}$ を命題の対偶というが，

この場合Ⓑは ⒶのうらとなっていてⒷが正しいからといってもⒶも正しいとはいえないのである。

少数だが次のような発想で考えていた人もいた。どうやればもっとも少ない円板でおおえるかということで，円板の重なり，及び大円板の外側へのはみだしを極力少なくすることによってできるだけ無駄の少ないおおいつくしを考えるという方法である。今回の問題においてはその発想はなかなか生かせなくて，その発想で問2を説明できた人はいなかったが，大切な考えである。今回の問題をみて興味をもった人は，ぜひ，最近何冊か出ている「有限幾何」の本を読んでもらいたい。

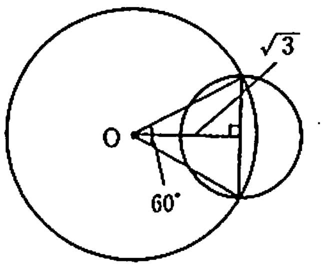
解答例

問1　下のようにおけばよい。



問2　まず半径2の円板と半径1の円板の交わってできる弧と弦の長さに注目する。弦の長さの最大値は2である。そのときの弧に対応する中心角は60°である(三角形は正三角形)，またそのとき2つの円の中心間の距離は $\sqrt{3}$ である。

（∵　2つの円が交ってできる点を結ぶ弦の長さは弦が小さい円の中心を通るとき最大となる。）



さて半径2の円板の円周をおおいつくすのに何個の円板が必要か考えてみよう。弦の長さ最大のとき弧の長さも最大になり，そのとき中心角60°より，円周を完全におおうには$\frac{360°}{60°}=6$個の半径1の円が必要である。円板全体をおおうには円周，及び内部の点をおおわなければならないので半径1の円板は6枚以上が必要である。

背理法を用いる。半径1の円板6枚でDをおおうとするとDの円周をおおわなければならない。しかしこのとき半径1の円と半径2の円の中心距離$\sqrt{3}$よりDの中心はどの半径1の円板にも含まれない。これは半径1の円板6枚でDをおおえるとした仮定に反する。よって命題成立。

担当委員

井原　驍	永渕敬二
坂下正雄	成田雅博
佐々木光憲	林　重一
鈴木雅博	古川政春
中居基昭	皆川一雄
長尾　章	湊川三竿
中田保之	大和達也