第 11 回
北海道高等学校数学コンテスト

問　　題

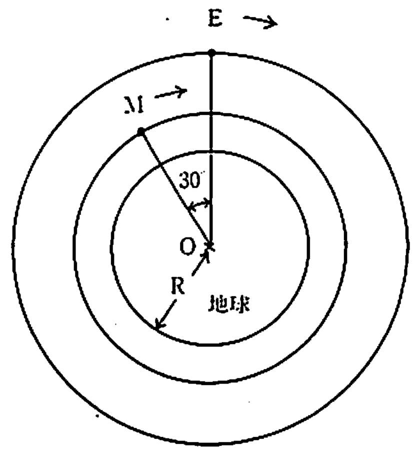
平成５年１月12日(火)

9 時00分～12時30分（210分）

北海道算数数学教育会高等学校部会

問題 1　　地球を中心O，半径Rの球とする。

右図の様に，地球の周回軌道を毛利さんの搭乗したスペースシャトルエンデバー（E）と，秋山さんの搭乗した宇宙ステーションミール（M）が，それぞれ高度R，$(\sqrt{2}-1)$ Rで，同じ方向に飛行している。地球を1周するのに，エンデバーは60分，ミールは40分かかるものとする。



今現在，日本時間で13:00である。次の問に答えよ。

問1　ミール（M）の真上にエンデバー（E）が初めて重なる時刻は，日本時間で何時何分か。

問2　ミール（M）とエンデバー（E）が初めて地球の反対側にある時，つまり∠EOM＝180°となる時刻は日本時間で何時何分か。

問3　毛利さんと秋山さんは，絶えずお互い観察するものとする。初めて地球の陰になり観察不能になるのは日本時間で何時何分から何時何分までか。

問題 2　　正方形ABCDの辺CD上に1点Pがある。∠BAPの二等分線が直線BCと交わる点をQとする。

次の問いに答えよ。

問1　点Qは辺BC上にある（延長上にはない）ことを証明せよ。

問2　求めた点Qを図1につけ加えよ。
以下図はすべてfree handでよい。

問3　3線分AP，BQ，DPの間に次の関係があることを証明せよ。

$$AP=BQ+DP$$

証明に必要な点や直線などは図1につけ加えよ。

問4　最初の文で1点Pが直線CD上にあってP，D，Cの順序に並んでいるときQはどこにあって3線分AP，BQ，DPの関係はどうなるか説明せよ。
図2に必要な点や直線などをつけ加えよ。

問5　また1点PがD，C，Pの順序で1直線上にあるときはどうなるか説明せよ。
図3に必要な点や直線などをつけ加えよ。

問題 3　関数$f(x)$が,

$f(x-y)-f(x-y)=-2f(x+1)f(y+1)$

$f(0)=1$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

ただし，関数$f(x)$は，xの値が整数のとき$f(x)$の値も整数となる。

問1　$f(1)$の値を求めよ。

問2　$f(-x)=f(x)$を示せ。

問3　$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$の値を求めよ。

問4　$f(x+4)=f(x)$を示せ。

問5　$f(1993)$の値を求めよ。

問題 4　111や2222のように各位の数字がすべて同じである２桁以上の自然数は，自然数の平方（平方数）にならないことを証明する。

問1　22…22，33…33，77…77，88…88は平方数にならないことを説明せよ。

問2　55…55，66…66，は平方数にならないことを証明せよ。

問3　11…11は平方数にならないことを証明せよ。

問4　44…44，99…99は平方数にならないことを説明せよ。

問題 5　金曜の夜，ニューヨーク郊外のあるレストランでパーティがあった。

参加者のうち，４人の紳士が１つのテーブルにつくことになった。

実はテーブルのそれぞれの席には名札が付いていたのだが，みな気がつかずに座ってしまったため，全員が自分の名札とちがう席についてしまった。

問1　このような座り方は全部で何通りあるか。

1	2	3	4
○	○	○	○

また５人の場合は何通りになるか。

ヒント $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ ○ & ○ & ○ & ○ \end{pmatrix}$ の形で条件をみたすものの個数

問2　本人と名札を一致させるため，全員席に座ったまま隣の人同士で名札を入れかえることにした。全員の名札と名前が一致するには最大で何回のいれかえをするとよいか。またもっとも少ない回数でいれかえができる場合，何回のいれかえでよいか。同じことをした場合，５人なら何回いれかえになるか。

最大と最小の回数を答えよ。

平成４年度(平成５年１月12日実施)

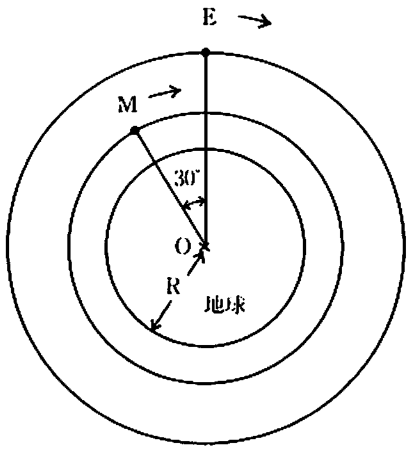
第 11 回

北海道高等学校数学コンテスト

解　答　と　解　説

北海道算数数学教育会高等学校部会

1



地球を中心O，半径Rの球とする。

上図の様に，地球の周回軌道を毛利さんの搭乗したスペースシャトルエンデバー（E）と，秋山さんの搭乗した宇宙ステーションミール（M)が，それぞれ高度R，（$\sqrt{2}-1$）Rで，同じ方向に飛行している。地球を1周するのに，エンデバーは60分，ミールは40分かかるものとする。

今現在，日本時間で13:00である。次の問に答えよ。

問1　ミール（M）の真上にエンデバー（E）が初めて重なる時刻は，日本時間で何時何分か。

問2　ミール（M）とエンデバー（E）が初めて地球の反対側にある時，つまり∠EOM＝180°となる時刻は日本時間で何時何分か。

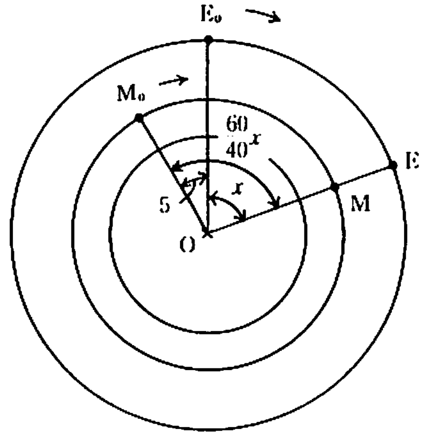
問3　毛利さんと秋山さんは，絶えずお互い観察するものとする。初めて地球の陰になり観察不能になるのは日本時間で何時何分から何時何分までか。

着眼点

x分後の位置関係を作図し，1次方程式を作れば比較的スムーズに解ける。特にEは，60分で1周するので，時計の長針と同じ動きをすることに注意する。

解答例

問1



x分後に，Mの真上にEが来るとすると上図のようになる。M_0，E_0は初期状態

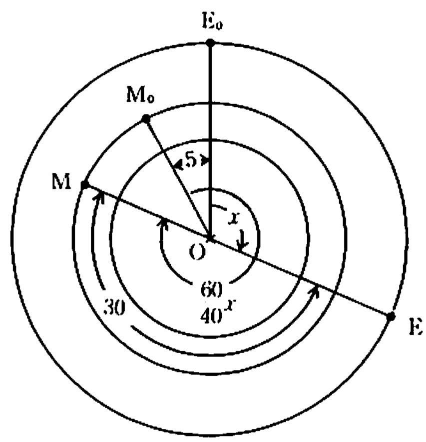
$\frac{60}{40}x = 5 + x$

$x = 10$

10分後に，ミールの真上にエンデバーが重なる状態になる。求める時刻は

∴13時10分……（答）

問2



x分後に∠EOM＝180°になるとすると，

$5 + x + 30 = \frac{60}{40}x$

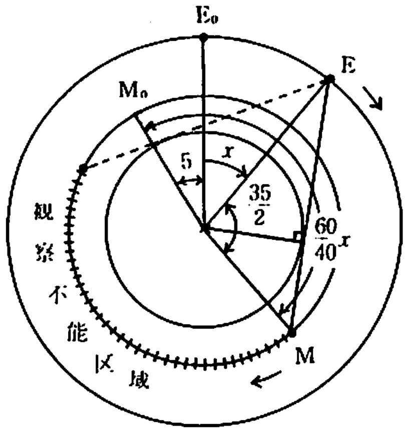
$x = 70$

70分後に，ミールとエンデバーは，地球の反対側に位置する。

∴13：70つまり14：10

∴14時10分……（答）

問3



観察不能になる時

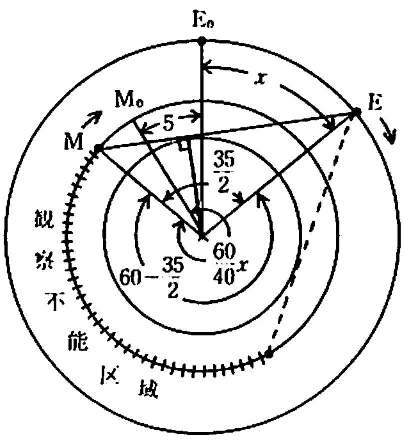
x分後に観察不能になるとする。

$$5+x+\frac{35}{2}=\frac{60}{40}x$$

$x=45$

45分後に観察不能になる。

∴13時45分



観察回復する時

x分後に，観察回復するとする。

$$5+x+60-\frac{35}{2}=\frac{60}{40}x$$

$x=95$

95分後に観察回復する。

13 : 95＝14 : 35

∴13時45分～14時35分まで観察不能。

2

正方形ABCDの辺CD上に1点Pがある。∠BAPの二等分線が直線BCと交わる点をQとする。

次の問いに答えよ。

問1　点Qは辺BC上にある(延長上にはない)ことを証明せよ。

問2　求めた点Qを図1につけ加えよ。

以下図はすべてfree handでよい。

問3　3線分AP，BQ，DPの間に次の関係があることを証明せよ。

AP＝BQ＋DP

証明に必要な点や直線などは図1につけ加えよ。

問4　最初の文で1点Pが直線CD上にあってP，D，Cの順序に並んでいるときQはどこにあって3線分AP，BQ，DPの関係はどうなるか説明せよ。

図2に必要な点や直線などをつけ加えよ。

問5　また1点PがD，C，Pの順序で1直線上にあるときはどうなるか説明せよ。

図3に必要な点や直線などをつけ加えよ。

着眼点

問1　PがCと一致するcase

∠BAP＝∠BACだから∠BAQ＝22.5°

このときの点Qが左端となる。

PがDと一致するcase

∠BAP＝∠BAD=90°，∠BAQ＝∠BAC

QはCと一致する。このときQ点が右端となる。

すなわち，直線AQは直線ABと直線ACの間にある。

問2　図1にはPが定まっているので2等分線らしい線をひいて点QをBC上につけ加えればよい。

問3　離れているAP，BQ，DP 3線分の関係を証明するのであるがhintはAP＝BQ＋DPの中にある。

つまりBQとDPを何らかの方法でつなぎ合わせればよい。DPを移してBQとつなぐ。そこから90°回転に思い当たればよい。角の関係からAP＝BQ＋DPを得る。他の方法では困難である。

問4　90°＜∠BAP＜180° から

直線AQは直線ADと直線ACの間にある故に点QはBCのCの方への延長上にある。

3線分の関係は自分で発見しなければならないが問3では90°回転で成功しているのだから

と試みる。

すなわち，何はともあれ△ADPを90°回転してみる。そこで関係を発見できるであろう。

そしてAP＝BQ－DPに至る。

問5　$0° < \angle BAP < 45°$

直線AQは直線ABと直線APの間にある。free handで点Qを定め前問に同じく90°回転を試みてAP＝BQ＋DPを得る。

解答例

問1　（着眼点）に書いてあるものと殆ど同じことになるので省略。

問2　次の問3解答例に示してある図の通り。

問3

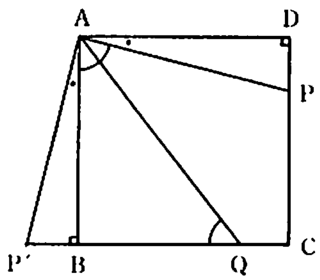


図1に書きいれたものを上に示す。解答文は下記。

△APDをA中心90°回転してDをBに重ね，Pの移った点をP'とすれば∠D＝∠B＝90°だからP'は直線BC上にあってP'，B，Cの順序に並ぶ。

$\angle P'AQ = \angle P'AB + \angle BAQ$

$= \angle PAD + \angle QAP$

$= \angle QAD = \angle P'QA$

$AP' = P'Q = P'B + BQ = PD + BQ$

よって，$AP = BQ + DP$

問4

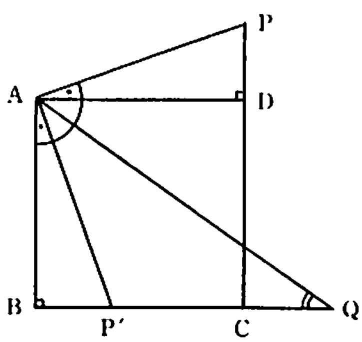


図2に書きいれたものを上に示す。

解答文は下記。

（着眼点）問4にある最初から3行目までのことをかいて以下に続く。

△ADPをA中心90°回転してDをBに重ね，Pの移った点をP'とすれば

∠D＝∠B＝90°からP'は線分BC上にある。

$\angle P'AQ = \angle BAQ - \angle BAP'$

$= \angle QAP - \angle DAP$

$= \angle QAD = \angle Q$

$AP' = P'Q = BQ - BP' = BQ - DP$

よって，$AP = BQ - DP$

問5

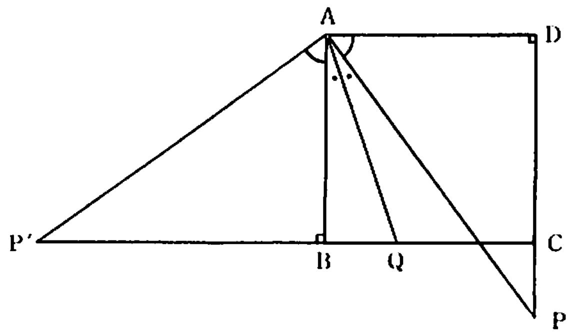


図3にかきいれたものを上に示す。

解答文は下記

（着眼点）問5にある1行目から2行目"…の間にある"までをかいて以下に続く。

△APDをA中心90°回転してDをBに重ね，Pの移った点をP'とすればP'，B，Cの順序で1直線上にある。

$\angle P'AQ = \angle P'AB + \angle BAQ$

$= \angle PAD + \angle QAP$

$= \angle QAD = \angle P'QA$

$A'P = P'Q$

$= P'B + BQ$

$= PD + BQ$

よって，$AP = BQ + DP$

3

関数$f(x)$が，

$f(x+y) - f(x-y) = -2f(x+1)f(y+1)$

$f(0) = 1$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

ただし，関数$f(x)$は，xの値が整数のとき$f(x)$の値も整数となる。

問1　$f(1)$の値を求めよ。

問2　$f(-x) = f(x)$を示せ。

問3　$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$の値を求めよ。
問4　$f(x+4)=f(x)$を示せ。
問5　$f(1993)$の値を求めよ。

着眼点

・関数$f(x)$は三角関数であることに気づきましたか。この問題を作成するとき$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$を決めてから，関数方程式を作りました。

・$f(2)$の値を求めるとき，$x=y=1$を代入すると，$f(2)=-1$，$\frac{1}{2}$の2通りの値がでてきます。解答例のように$x=1$，$y=-1$だと$f(2)=-1$の値のみでてきます。

・$f(1993)$の値は，$f(x+4)=f(x)$を利用すること。
　できれば$f(x+4n)=f(x)$(nは自然数)を証明してから求めてほしいところだが。

解答例

問1　$f(x+y)-f(x-y)$
$=-2f(x+1)f(y+1)$……(A)
(A)に$x=y=0$を代入すると，
$f(0)-f(0)=-2f(1)f(1)$
$0=-2f(1)^2$
よって，$f(1)=0$

問2　(A)に$x=0$を代入すると，
$f(y)-f(-y)=-2f(1)f(y+1)$
(1)より，$f(1)=0$なので
$f(y)-f(-y)=0$
ゆえに，$f(-y)=f(y)$
よって，$f(-x)=f(x)$が成り立つ。

問3　(A)に$x=1$，$y=-1$を代入すると，
$f(0)-f(2)=-2f(2)f(0)$
$f(0)=1$より
$1-f(2)=-2f(2)$
よって，$f(2)=-1$
(A)に$x=2$，$y=1$を代入すると，
$f(3)-f(1)=-2f(3)f(2)$
ところで，$f(1)=0$，$f(2)=-1$より
$f(3)=2f(3)$
よって，$f(3)=0$
(A)に$x=y=2$を代入すると，
$f(4)-f(0)=-2f(3)f(3)$
$f(4)-1=0$
よって，$f(4)=1$

問4　(A)にxを$x+2$，yを2とすると
$f(x+4)-f(x)=-2f(x+3)f(3)$
ところで，$f(3)=0$なので
$f(x+4)-f(x)=0$
よって，$f(x+4)=f(x)$である。

問5　$f(1993)=f(1989+4)$
$=f(1989)$
$=f(1985+4)$
$=f(1985)$
$=$………
$=f(1)=0$

4

111や2222のように各位の数字がすべて同じである2桁以上の自然数は，自然数の平方（平方数）にならないことを証明する。
問1　22…22，33…33，77…77，88…88は平方数にならないことを説明せよ。
問2　55…55，66…66，は平方数にならないことを証明せよ。
問3　11…11は平方数にならないことを証明せよ。
問4　44…44，99…99は平方数にならないことを説明せよ。

着眼点

問1　平方数の1位の数は限られた数しかとれません。
問2　平方数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数。
問3　これが主問題。$(10k+1)^2$や$(10k+9)^2$はどんな形の数になるか調べるとよい。
問4　問3からただちに出る。
　この問題を拡張して，立方数(自然数の3乗)とならないことの証明などはどうなるか。確かめるとよい。

解答例

問1　平方数の1位の数は，0，1，4，5，6，9に限る。よって，1位の数が2，3，7，8となる数は平方数ではない。
問2　55…55$=5\times$11…11が平方数であれば，11…11は5の倍数でなければならない。5の倍数の1位の数は，0，5に限るから，それは不可能である。同様に，66…66$=2\times$33…33が平方数であれば，33…33は2の倍数でなければならな

い。2の倍数の1位の数は偶数に限るから，それは不可能である。

問3　平方して1位の数が1になるのは，元の数の1位の数が1，9に限る。

11…11が平方数であれば，$11\cdots11=(10k+1)^2$ または $(10k+9)^2$（kは自然数）

$(10k+1)^2=100k^2+20k+1$，この数は，十の位の数が偶数となっている。

$$(10k+9)^2=100k^2+180k+81$$
$$=100(k^2+k)+10(8k+8)+1,$$

やはり，この数も十の位の数が偶数となっている。

11…11は十の位が1だから，それは不可能である。

問4　44…44＝4×11…11，99…99＝9×11…11だから，2数のいずれか一方でも平方数ならば，11…11は平方数でなければならず，(3)に矛盾する。

よって，いずれも平方数ではない。

5

金曜の夜，ニューヨーク郊外のあるレストランでパーティがあった。

参加者のうち，4人の紳士が1つのテーブルにつくことになった。

実はテーブルのそれぞれの席には名札が付いていたのだが，みな気がつかずに座ってしまったため，全員が自分の名札とちがう席についてしまった。

問1　このような座り方は全部で何通りあるか。また5人の場合は何通りになるか。

1	2	3	4

○　○　○　○

ヒント $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc\end{pmatrix}$

の形で条件をみたすものの個数

問2　本人と名札を一致させるため，全員席に座ったまま隣の人同士で名札を入れかえることにした。全員の名札と名前が一致するには最大で何回のいれかえをするとよいか。またもっとも少ない回数でいれかえができる場合，何回のいれかえでよいか。同じことをした場合，5人なら何回いれかえになるか。最大と最小の回数を答えよ。

着眼点

問1　$\begin{pmatrix}\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4}\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ のようにn個の数を第i番にiが入らないようにして並べたものを「かくらん順列」という。

$n=3$のときは$\begin{pmatrix}\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3}\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3}\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$の2通りがある。

$n=4$のときは，最初の数を何にするかで場合分けして数え上げてみるとよい。

$n=5$のときも同じ。

実は数学コンテストの第6回で，このかくらん順列の個数の規則性について出題している。興味のある人は考えてみるとよいだろう。

（第6回数学コンテストより）

> 数1，2，3，…，nを全部同時にとりあげて一列に並べる。（これを異なるn個のものからn個とる順列という）その順列の中でどの数字kに対しても数字kがk番目にないものを「かく乱順列」という。例えば$n=3$のとき3，1，2はかく乱順列である。
>
> (1)　n個の数のかく乱順列の総数を$D(n)$で表す。このとき$D(3)$，$D(4)$，$D(5)$を求めよ。
>
> (2)　$D(8)$を求めよ。ただし$D(6)=265$，$D(7)=1854$であることを用いてもよい。

(2)　となりあった人同士で交換するということから，何を連想するだろうか。「あみだくじ」をイメージすることができれば考えやすい。ここであみだくじを用いて説明してみよう。

例えば$\begin{pmatrix}\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4}\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$は何回のいれかえで正しくできるだろうか。

$\begin{pmatrix}\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4}\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ まず1回のいれかえで

$\begin{pmatrix}\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4}\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$ もう一度いれかえて

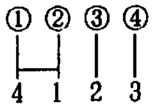
$\begin{pmatrix}\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4}\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$ さらにもう一度いれかえて

$\begin{pmatrix}\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4}\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ で3回のいれかえで正しくなる。

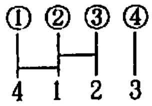
これはあみだくじでいうと　①　②　③　④

4　1　2　3

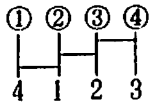
この形に横棒一本いれて



さらに横棒一本いれて



さらに横棒一本いれて



となって
正しくできる。すなわち何回のいれかえで直せるかという問題はあみだくじで何本の横棒をいれると上下の数が対応するようにできるかという問題と同じである。

実はこのことについてはよく知られた次の結果がある。「1～nの数を並べかえたn個の数を1，2，3，4，…，nと対応させるには，下の列で数の順が逆転している総数〔たとえば $\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}&\text{⑤}\\5&3&2&1&4\end{pmatrix}$ ならば(5，3)(5，2)(5，1)(5，4)(3，2)(3，1)(2，1)で7個(これを総転置数という)〕の回数のいれかえを行えばよい」この場合は，かくらん順列の中でどの場合が「総転置数」が最大になるかを考えるとよい。

解答例

問1　4人のとき（1番目1はありえない）

☆1番目が2とすると $\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}\\2&*&*&*\end{pmatrix}$

このとき，2番目に2は入らないので，2番目を1とすると $\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}\\2&1&4&3\end{pmatrix}$

2番目を3とすると　（2，3，4，1）
2番目を4とすると　（2，4，1，3）

☆1番目が3とすると
2番目を1とすると　（3，1，4，2）
2番目を4とすると　（3，4，1，2）
（3，4，2，1）

☆1番目が4とすると
2番目を1とすると　（4，1，2，3）
2番目を3とすると　（4，3，1，2）
（4，3，2，1）

よって9通り

5人のとき

☆1番目が2とすると $\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}&\text{⑤}\\2&*&*&*&*\end{pmatrix}$

2番目が1ならば（2，1，*，*，*）…2通り
（2，1，5，3，4）（2，1，4，5，3）……（3，4，5）のかくらん行列

1番目が2で，2番目が1でないとき（3か4か5）
（2，3，1，5，4）（2，3，4，5，1）
（2，3，5，1，4）（2，4，1，5，3）
（2，4，5，3，1）（2，4，5，1，3）
（2，5，1，3，4）（2，5，4，1，3）
（2，5，4，3，1）9通り

ゆえに①が2のとき9＋2＝11通り。

さらに，1番目が3のとき同様に
（3，1，2，5，4）（3，1，4，5，2）
（3，1，5，2，4）（3，4，5，1，2）
（3，4，5，2，1）（3，4，2，5，1）
（3，4，1，5，2）（3，5，1，2，4）
（3，5，2，1，4）（3，5，4，1，2）
（3，5，4，2，1）

よって①が3のとき11通り

1番目が4，5のときも同様なので4×11＝44通り

問2　4人の場合，かくらん順列で総転置数がもっとも多くなるのは

$\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}\\4&3&2&1\end{pmatrix}$ の場合で(4，3)(4，2)(4，1)(3，2)(3，1)(2，1)より6

よって6回いれかえ（最大）

もっとも少ないのは

$\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ の場合で(2，1)(4，3)より2

2回いれかえ（最小）

5人の場合，総転置数が最大なのは

$\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}&\text{⑤}\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$ であるが，かくらん順列ではないので，これをひとついれかえたもの

$\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}&\text{⑤}\\5&4&2&3&1\end{pmatrix}$ または

$\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}&\text{⑤}\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$ のときで9回（最大）

総転置数が最小なのは $\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}&\text{⑤}\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}$ のように3個のかくらん順列と2個のかくらん順列の組み合わせになっているときで，3回（最小）

第 11 回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

平成５年１月12日(火)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第11回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長　今　西　義　紀

昭和58年度（1983年）1月15日に第1回が実施された「数学コンテスト」も今回で第11回を迎えることができました。今年は全道28校から中学生を含む397名の高校生諸君の参加を得て盛大に開催できたことは関係者一同喜びにたえません。このコンテストに対する理解と数学に対する興味・関心や数学の重要性が認識されてきたことの表れとうれしく思うとともに，全道各地で熱心に指導に当っておられる先生方のご努力に深く感謝と敬意を表します。

この「数学コンテスト」は，アメリカや東欧諸国で行なわれていた“数学オリンピック”にヒントを得て，北海道においてもそれに似た催しを行ない，数学好きの高校生や中学生に刺激を与え，一層数学的な興味を高め，また数学に楽しく挑戦することを通して，潜在している数学的能力を引き出す手立てとして実施してきました。1989年から世界の50ケ国目として，日本も国際数学オリンピックに参加し，予選の日本数学オリンピックにおいて，本道の高校生が毎回優秀な成績を収めておた，特に中国の北京で行われた第31回大会で札幌の高校生が銅メダルを受賞したことは大変嬉しいことでした。本年も本道から1名が2次試験まで歩を進めています。数学コンテストや数学オリンピックは，単に数学の問題を解く力を競い，それに優劣をつけるものではありません。この数学コンテストをとおして，数学教育本来の目標である基本的な概念や原理・法則，論理的思考力や創造的な考え方を自らがそれぞれの持っている能力に応じて問題を解決しながら身につけ，数学にたいする興味・関心を高めることにあります。21世紀に向けての高度情報化と国際化に数学の果す役割はますます重要であります。さらにこの数学コンテストをきっかけとして数学を愛する同好の士が増え，それぞれの学校で互いに励まし合いながら一層本道の数学の学力の水準を高めることに役立ちたいとも念願しています。

終わりになりましたが，北海道教育委員会，札幌市教育委員会，北海道高等学校校長協会より賜わりました後援並びに北海道新聞社，福武書店の物心両面にわたるご高配に厚くお礼申し上げるとともに，本年も問題作成について御尽力頂きました北海道大学理学部数学科，出題や採点からコンテストの運営全般にわたってご苦労いただいた北数教高校部会研究部，さらに全道各地で実施にご協力いただいた会場校や諸先生に厚くお礼申し上げます。今度ともご協力の程よろしくお願いいたします。

●成績優秀者

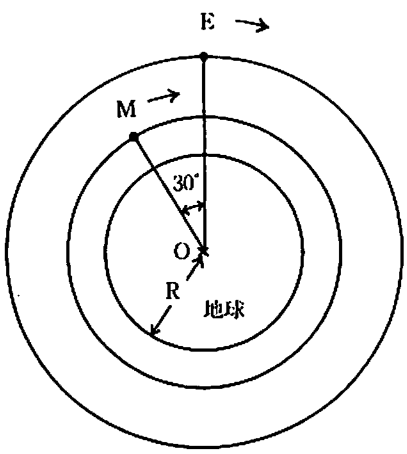
本間象二	安達大介	加藤崇之	鈴木岳大
高橋大介	船川　孝	田澤伸也	林田　亮
森住威文	若桑朝之	堀内俊吾	渡邉　亮
西原昌宏	望月　崇	北川　学	林　謙二
木下靖文	尾田智將	河合　巧	四ツ柳　賢

第11回　数学コンテスト度数分布

得点	問1	問2	問3	問4	問5
40	88	2	38	25	16
39	0	1	1	0	2
38	0	2	2	0	5
37	0	0	1	1	1
36	0	0	1	6	3
35	2	2	0	3	13
34	0	2	2	0	0
33	0	0	0	9	8
32	1	0	13	2	4
31	0	0	1	1	3
30	22	3	0	2	27
29	0	1	0	1	7
28	1	0	0	1	12
27	0	1	3	1	3
26	0	2	17	0	4
25	6	0	1	3	17
24	0	4	0	2	2
23	9	6	0	1	7
22	3	2	0	3	5
21	0	7	1	1	2
20	93	7	11	3	28
19	0	7	2	1	5
18	0	4	0	9	10
17	2	14	2	1	3
16	0	12	0	4	5
15	17	27	1	8	18
14	2	16	0	22	4
13	1	28	2	7	9
12	2	13	0	4	0
11	0	26	5	2	0
10	14	21	1	4	29
9	0	19	0	9	3
8	0	20	1	29	21
7	1	10	0	0	3
6	0	17	0	0	1
5	3	10	14	3	2
4	0	7	0	8	7
3	2	9	3	1	0
2	5	2	2	3	0
1	0	1	0	0	0
0	35	4	184	129	20
受験者数	309	309	309	309	309
総計	7,125	3,989	3,281	3,447	6,272
平均点	23.0	12.9	10.6	11.1	20.2
S・D	13.3	7.0	15.2	13.2	11.3

階級	合計
200 ～ 200	0
195 ～ 199	1
190 ～ 194	0
185 ～ 189	1
180 ～ 184	0
175 ～ 179	2
170 ～ 174	2
165 ～ 169	0
160 ～ 164	3
155 ～ 159	5
150 ～ 154	6
145 ～ 149	3
140 ～ 144	4
135 ～ 139	4
130 ～ 134	5
125 ～ 129	8
120 ～ 124	7
115 ～ 119	6
110 ～ 114	9
105 ～ 109	6
100 ～ 104	12
95 ～ 99	12
90 ～ 94	11
85 ～ 89	20
80 ～ 84	14
75 ～ 79	16
70 ～ 74	4
65 ～ 69	11
60 ～ 64	27
55 ～ 59	13
50 ～ 54	19
45 ～ 49	14
40 ～ 44	10
35 ～ 39	15
30 ～ 34	8
25 ～ 29	8
20 ～ 24	8
15 ～ 19	5
10 ～ 14	5
5 ～ 9	3
0 ～ 4	2
309	
24,114	
78.0	
39.7	

$\boxed{1}$



地球を中心O，半径Rの球とする。

上図の様に，地球の周回軌道を毛利さんの搭乗したスペースシャトルエンデバー（E）と，秋山さんの搭乗した宇宙ステーションミール（M)が，それぞれ高度R，$(\sqrt{2}-1)$ Rで，同じ方向に飛行している。地球を1周するのに，エンデバーは60分，ミールは40分かかるものとする。

今現在，日本時間で13:00である。次の問に答えよ。

問1　ミール（M）の真上にエンデバー（E）が初めて重なる時刻は，日本時間で何時何分か。

問2　ミール（M）とエンデバー（E）が初めて地球の反対側にある時，つまり∠EOM＝180° となる時刻は日本時間で何時何分か。

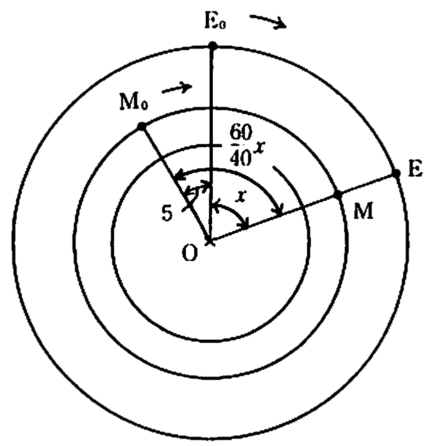
問3　毛利さんと秋山さんは，絶えずお互い観察するものとする。初めて地球の陰になり観察不能になるのは日本時間で何時何分から何時何分までか。

講　評

- $\boxed{1}$の受験人数309名のうち満点の生徒87名で28.15％であり，残念ながら白紙0点の生徒は，35名で11.32％であった。
- 昨年，北海道出身の毛利衛さんが，宇宙実験で活躍しました。北海道の高校生も毛利さんに続く人材に成長して欲しいという願望を抱いて問題を作成しました。
- 「答のみ」という生徒が多く，論理的説明や作図をかなり省略している生徒が予想以上に多かった。
- 『論理的思向能力』を養成することが，高校3年間の数学の勉強する目標の一つであることを自覚しよう。
- 直感的インスピレーションは，作図から得られる。作図をしっかりして視覚的に考える練習をしよう。
- 問題を簡単になるにはどうしたらよいのか。受験テクニックだけに頼らず物事の本質を解決する精神を養え。

解答例

問1



x分後に，Mの真上にEが来るとすると上図のようになる。M_0，E_0は初期状態

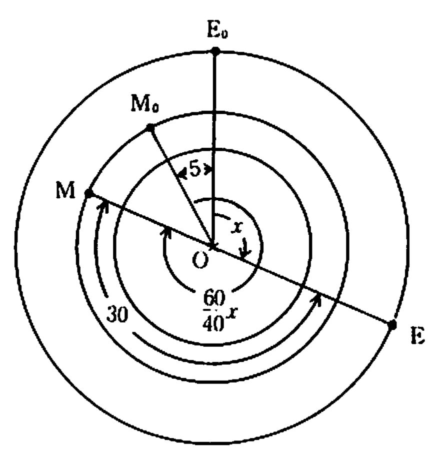
$$\frac{60}{40}x = 5 + x$$

$$x = 10$$

10分後に，ミールの真上にエンデバーが重なる状態になる。求める時刻は

∴13時10分……（答）

問2



x 分後に$\angle EOM=180^\circ$ になるとすると，

$5+x+30=\frac{60}{40}x$

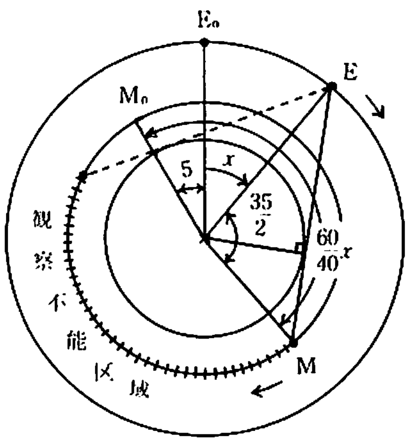
$x=70$

70分後に，ミールとエンデバーは，地球の反対側に位置する。

∴13：70つまり14：10

∴14時10分……（答）

問3



観察不能になる時

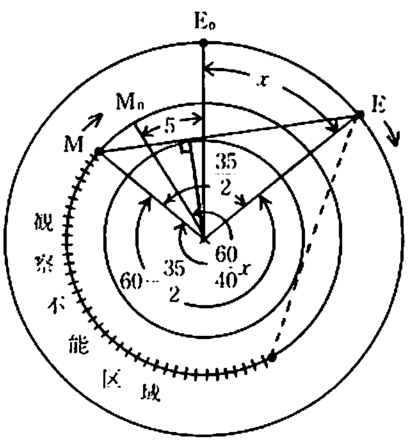
x 分後に観察不能になるとする。

$5+x+\frac{35}{2}=\frac{60}{40}x$

$x=45$

45分後に観察不能になる。

∴13時45分



観察回復する時

x 分後に，観察回復するとする。

$5+x+60-\frac{35}{2}=\frac{60}{40}x$

$x=95$

95分後に観察回復する。

13：95＝14：35

∴13時45分～14時35分まで観察不能。

2

正方形 ABCD の辺 CD 上に 1 点Pがある。$\angle BAP$ の二等分線が直線 BC と交わる点をQとする。

次の問いに答えよ。

問1　点Qは辺 BC 上にある（延長上にはない）ことを証明せよ。

問2　求めた点Qを図 1 につけ加えよ。

以下図はすべて free hand でよい。

問3　3 線分 AP，BQ，DP の間に次の関係があることを証明せよ。

$AP=BQ+DP$

証明に必要な点や直線などは図 1 につけ加えよ。

問4　最初の文で 1 点Pが直線ＣＤ上にあってP，D，Cの順序に並んでいるときQはどこにあって 3 線分 AP，BQ，DP の関係はどうなるか説明せよ。

図 2 に必要な点や直線などをつけ加えよ。

問5　また 1 点PがD，C，Pの順序で 1 直線上にあるときはどうなるか説明せよ。

図 3 に必要な点や直線などをつけ加えよ。

講　評

Ⅰ　配　点

問 1 解答	10点	問 2　図 1	3 点
問 3　図 1	3 点	問 3 解答	6 点
問 4　図 2	3 点	問 4 解答	6 点
問 5　図 3	3 点	問 5 解答	6 点

Ⅱ　配点についての考慮

1．できるだけ多く点を与えることが基本方針である。

2．初等幾何（中学での図形教材）の出題であり高校生は忘れている者が多い。その為に難かしく感ずるらしくアンケートにも“難かしい”が最も多い感想であった。配点の基本方針は之に対する配慮である。

3．答案は問 1 解答が圧倒的に多く，その他は少ないので問 1 解答に10点を与え，他は 6 点とした。

4．図 1 は問 2，3 で 6 点，他は全て 3 点までとした。

5．解答の叙述が誤りであるとか，叙述が無いと

しても図には1点以上与えた。

Ⅲ　問題別感想等

1．問1解答

殆んど全員が書いているが叙述が曖昧であるか直観的なものをそのまま述べた者が多く（之は問3解答以下にも通ずる。）角度の不等式で示す者が解答者の3割弱であった。極少数だが三角関数，座標幾何を使用した者がみられた。

2．問2　さすが殆んど全員がQ点を求めていた。

3．問3解答

① 出題者としてはここに重点を置いた。之を解けば問4，問5についても関連して考えられる解答を書けると思った。それで問3，4，5を同点としたのであるが，此度は出題の方法の配慮不足を認めざるを得ない。親切のつもりで書いた問4，問5の文章が反って生徒には複雑に感ぜられたらしく，そのとまどいが答案に見えていた。P点の所在を図示してあるのでそんなに苦労しないだろうの見解が甘かったのである。

② 解法について

AP＝BQ＋DP は線分の計算であるとの考えかららしく三角関数使用が最も多く複雑な計算の，半数は成功していた。比や二乗関係が次に多かったが成功した者は数名だけ。△APD の平行移動1名不成功，三角形合同定理をうまく使って成功が1名，BC のBの方へ延長上にP′をとりP′B＝DP とした者が10名ほど之は成功した。注目すべきこと△APD を（または△ABQ）A中心に90°回転した者7名いて全員成功。

③ 90°回転について

出題者の希望はここにあった。AP＝BQ＋DP の＋は式での計算ではなく BQ と DP を何らか方法でつなぎ合わせて1つの線分にするということに何故気付いてくれなかったのだろう。ここに数学教育上の重大な問題が存在する。これについては後述する。

④ 表現の誤り

之の問4，問5にもあるが，ここに極めて目立った事を挙げてみる。

i）“点Pが点C上にある”の表現

“点Pが点Cと一致する”“点Pと点Cが重なる”等の表現を知らないか，忘れている。

ii）△ABQ≡△APQ の勘違い。そしてAP＝AB とする。AP＞AD＝AB に気がつかないか忘れている。

iii）“B＜Q＜C”の表現

点に大小はつけられない。前後関係らしいが不等号が前後関係に用いられることは高度の数学では有り得るがここでは誤りとしなければならない。

4．問4，問5について

解答者も少なく特筆することもない。詳細は“附言”にある理由によって省略するが一つだけ問4の解答や図2のQ点について，Q点が辺CD 上にあるとした者が40名程見られた。之は解答を書いているうちに問題文の“∠BAPの二等分線が直線 BC と交わる点をQとする”を忘れてしまったらしい。

5．附　言

之はコンテスト毎実施していることではあるが採点に当たって単に点を示すだけでなく生徒の解答文に応じ答案用紙のブランクに出来るだけ多くのコメントを書いている。時には裏面にも書くことがある。生徒各自が自分に関するこのコメントを読むことが最も有効であることはいうまでもない。この場所での詳述を省略する理由である。一枚一枚の答案用紙に生徒が書いた内容に対応して何等かのコメントを与えることは如何に労力を使うことであるかは採点者であればよく理解されることであろう。またそのことは，この場所で示すよりも教育的価値は段違いであることが了解されることであろう。

Ⅳ　解答例（望ましい）

問1　図略乞了承

PがCと一致するとき　∠BAP＝∠BAC＝45°

$\angle BAQ=\frac{1}{2}\angle BAP=22.5°$

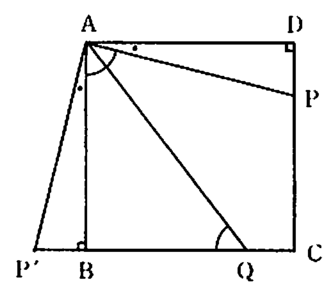
PがDと一致するとき　∠BAP＝∠BAD＝90°

$\angle BAQ=\frac{1}{2}\angle BAP=45°$

以上から22.5°≦∠BAQ≦45°

すなわち　点Qは辺 BC 上にある。

問3（問2略）



△APD をAを中心として90° 回転してDをBに重ねPの移った点P'とすれば∠B＝∠D＝90° から

P'は直線 BC 上にあって

P'，B，C　の順に並ぶ

∠P'AQ＝∠P'AB＋∠BAQ

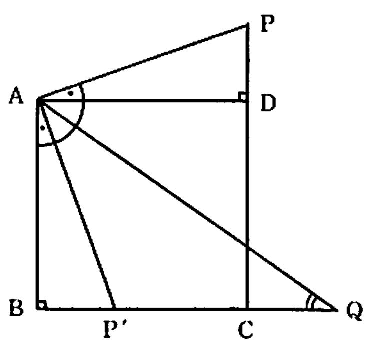
＝∠PAD＋∠QAP

＝∠QAD＝∠P'QA

AP＝AP'＝P'Q

＝P'B＋BQ＝PD＋BQ

問4



∠BAP＞∠BAD＝90°

$\angle BAQ=\frac{1}{2}\angle BAP>\frac{1}{2}\angle BAD=\angle BAC$

QはBC上Cの方への延長上にある。（図2にQをとる）

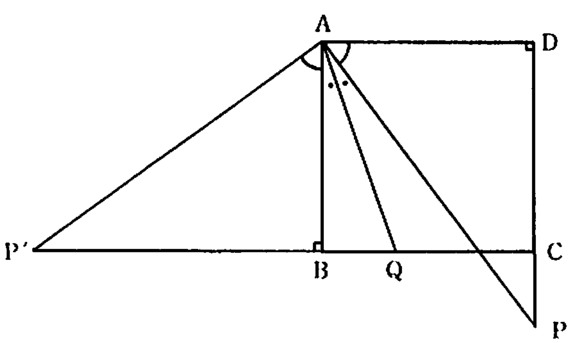
△ADP をA中心90° 回転してDをBに重ねPの移った点をP'とすれば，∠D＝∠B＝90°から、P' は辺 BC 上∠P'AQ＝∠BAQ－∠BAP'＝∠QAP－∠DAP

＝∠QAD＝∠Q

AP＝AP'＝P'Q＝BQ－BP'＝BQ－DP

（必要な図を図2にかく）

問5



0°＜∠BAP＜45°

$0°<\frac{1}{2}\angle BAP=\angle BAQ<22.5°$

QはBと BC，AP の交点との間にある。

（図3にQをとる）

△APD をA中心90° 回転しDをBに重ねPの移った点をP'とする。∠D＝∠B＝90° からPは BC のBの方への延長上にある。

∠P'AQ＝∠P'AB＋∠BAQ＝∠PAD＋∠QAP

＝∠QAD＝∠P'QA

AP＝AP'＝P'Q＝P'B＋BQ＝PD＋BQ

（必要な図を図3にかく）

V　総合的感想

コンテストの問題の中に必ず初等幾何（中学での図形教材）を一題出すことは最初からの申し合わせ事項、基本方針であった。

之は正しく良い方針であり現在にまで続いている。そして既出の殆んど全部が図形移動による解法を必要とするものであり，今後も変わりはない。然し解答には初等幾何のそれを強要はしない。三角関数，座標幾何ベクトル等でも宜しいこととする。今回は出題様式に不備なことがあったことは反省するが問3の解答者が約300名あったうち90° 回転で処理した者が僅かに7名という現実にはショックを受けた。2.3％ということは現在の中学校1クラス約40名とみてその40名中辛うじて1名が図形移動を理解したという事になる。このコンテストに参加する者は高校にあって数学に自信を持つ者であることに思いを致すときその現実に身がひきしまる感がするのは筆者だけだろうか。之は数学教育上由々しき事態ではあるまいか。中学校教師，高校教師両者の止むを得ざる現状を知っているが故に，やりきれない思いで一杯である。何らかの打開策はないものであろうか。

図形移動は変換であり，変換とは数学での重要事項である。中学では移動を合同変換に留めているが私見によれば拡張してよい……である。クラインの定義に思いを致して，変化の中の不変を考え，“平行線による比の移動”“円周による角の移動”“円周による線分積（線分比）の移動”等と移動の概念を拡張することにより合同以後の学習を興味深くし，より本質的にするものではなかろうか。このような指導は生徒達が高校生となったとき，三角関数を始めとする全ての関数教材，座標幾何，ベクトル，マトリクス……の学習に極めて有効に役立つものである。毎コンテスト実施後痛感することであり，ここに強調しておく。

3

> 関数$f(x)$が,
> $f(x+y)-f(x-y)=-2f(x+1)f(y+1)$
> $f(0)=1$
> を満たすとき，次の問いに答えよ。
> ただし，関数$f(x)$は，xの値が整数のとき$f(x)$の値も整数となる。
> 問1　$f(1)$の値を求めよ。
> 問2　$f(-x)=f(x)$を示せ。
> 問3　$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$の値を求めよ。
> 問4　$f(x+4)=f(x)$を示せ。
> 問5　$f(1993)$の値を求めよ。

講　評

0点と40点の生徒が多く，出来る生徒と出来ない生徒がハッキリした問題でした。

こういう抽象的な関数方程式の問題を勉強したことのある生徒は高得点で，全く勉強したことのない生徒は手の付けようもなかったと思います。

入試問題では関数方程式も出題されます。この機会に関数方程式を勉強して得意になって下さい。

ところで、採点して気にかかった事が3点ほどあります。

それは,

① 論理的でない解答があった。

② 問題をよく理解していない。または，問題を自分の都合のいいように解釈している。

③ 説明不足な答案が多い。または，余計な事を書いている。

の3点です。

これから数学を勉強していく人は，この事は常に注意しなければならない事だと思います。

高得点の人でも上の3点のどれかに当たる解答があります。自分の解答は本当に完璧にできているのか，もう一度考えてみて下さい。

解答例

問1　$f(x+y)-f(x-y)$
$=-2f(x+1)f(y+1)$……（A）
（A）に$x=y=0$を代入すると,
$f(0)-f(0)=-2f(1)f(1)$
$0=-2f(1)^2$
よって，$f(1)=0$

問2　（A）に$x=0$を代入すると,
$f(y)-f(-y)=-2f(1)f(y+1)$
(1)より，$f(1)=0$なので
$f(y)-f(-y)=0$
ゆえに，$f(-y)=f(y)$
よって，$f(-x)=f(x)$が成り立つ。

問3　（A）に$x=1$，$y=-1$を代入すると,
$f(0)-f(2)=-2f(2)f(0)$
$f(0)=1$より
$1-f(2)=-2f(2)$
よって，$f(2)=-1$
（A）に$x=2$，$y=1$を代入すると,
$f(3)-f(1)=-2f(3)f(2)$
ところで，$f(1)=0$，$f(2)=-1$より
$f(3)=2f(3)$
よって，$f(3)=0$
（A）に$x=y=2$を代入すると,
$f(4)-f(0)=-2f(3)f(3)$
$f(4)-1=0$
よって，$f(4)=1$

問4　（A）にxを$x+2$，yを2とすると
$f(x+4)-f(x)=-2f(x+3)f(3)$
ところで，$f(3)=0$なので
$f(x+4)-f(x)=0$
よって，$f(x+4)=f(x)$である。

問5　$f(1993)=f(1989+4)$
$=f(1989)$
$=f(1985+4)$
$=f(1985)$
$=\cdots\cdots\cdots$
$=f(1)=0$

4

> 111や2222のように各位の数字がすべて同じである2桁以上の自然数は，自然数の平方（平方数）にならないことを証明する。
> 問1　22…22，33…33，77…77，88…88は平方数にならないことを説明せよ。
> 問2　55…55，66…66，は平方数にならないことを証明せよ。
> 問3　11…11は平方数にならないことを証明せよ。
> 問4　44…44，99…99は平方数にならないことを説明せよ。

講　評

問1．8点、問2．10点、問3．15点、問4．7点。

まず，解答を採点して感じたことは、論理的に飛躍のあるものや場合をすべて尽くしていないものが多いということです。

“11…11が素数である”というのは最悪。また，平方して一の位が6にあたるものは$10n+6$の形だけですか，等々

ところで，問題3の解答で関心したものを紹介します。

「11…11が平方数とする。平方する元の数は奇数に限るから，

$$(2n+1)^2=11\cdots11$$

$$4n(n+1)=11\cdots10 \text{（2桁以上）}$$

左辺は4の倍数，右辺は4の倍数にならない。（矛盾）

よって，11…11は平方数にならない。」

解答例

問1　平方数の1位の数は，0，1，4，5，6，9に限る。よって，1位の数が2，3，7，8となる数は平方数ではない。

問2　55…55＝5×11…11が平方数であれば，11…11は5の倍数でなければならない。5の倍数の1位の数は，0，5に限るから，それは不可能である。同様に，66…66＝2×33…33が平方数であれば，33…33は2の倍数でなければならない。2の倍数の1位の数は偶数に限るから，それは不可能である。

問3　平方して1位の数が1になるのは，元の数の1位の数が1，9に限る。

11…11が平方数であれば，11…11＝$(10k+1)^2$または$(10k+9)^2$（kは自然数）

$(10k+1)^2=100k^2+20k+1$，この数は，十の位の数が偶数となっている。

$$(10k+9)^2=100k^2+180k+81$$
$$=100(k^2+k)+10(8k+8)+1,$$

やはり，この数も十の位の数が偶数となっている。

11…11は十の位が1だから，それは不可能である。

問4　44…44＝4×11…11，99…99＝9×11…11だから，2数のいずれか一方でも平方数ならば，11…11は平方数でなければならず，(3)に矛盾する。

よって，いずれも平方数ではない。

5

金曜の夜，ニューヨーク郊外のあるレストランでパーティがあった。

参加者のうち，4人の紳士が1つのテーブルにつくことになった。

実はテーブルのそれぞれの席には名札が付いていたのだが，みな気がつかずに座ってしまったため，全員が自分の名札とちがう席についてしまった。

問1　このような座り方は全部で何通りあるか。また5人の場合は何通りになるか。

1	2	3	4
○	○	○	○

ヒント $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ ○ & ○ & ○ & ○\end{pmatrix}$ の形で条件をみたすものの個数

問2　本人と名札を一致させるため，全員席に座ったまま隣の人同士で名札を入れかえることにした。全員の名札と名前が一致するには最大で何回のいれかえをするとよいか。またもっとも少ない回数でいれかえができる場合，何回のいれかえでよいか。同じことをした場合，5人なら何回いれかえになるか。最大と最小の回数を答えよ。

講　評

配　点　問1　20点（4人の場合　10点　5人の場合　10点）

問2　20点（4人の場合最多，最小各5点　5人の場合も最多最小各5点）

最初に解答と解説に誤りがあったことをお詫びしなければならない。

解答と解説P6問2で4人の場合の最多のとき$(\underbrace{4,\ 3}_{1})(\underbrace{4,\ 2}_{2})(\underbrace{4,\ 1}_{3})(\underbrace{3,\ 2}_{4})(\underbrace{3,\ 1}_{5})(\underbrace{2,\ 1}_{6})$より7によって7回いれかえ（最大）というのは，まちがい，もちろん総転置数6より，6回いれかえ（最大）が正しいのです。

さて，この問題は問1（かくらん順列……解答と解説参照）と問2（あみだくじの原理と総転置数…解答と解説参照）の2つの問題をドッキングさせたものです。かくらん順列については第6回のコンテストでも出題していますし，あみだくじの原理の話も雑誌などでたびたび取り上げられています。そのせいか答だけを書いていた人もけっこういたのですが，コンテストで出題した以上，答だけ出せばいい

というものではなく，考え方や発想を見ていきたいと思います。答のみの人は減点させてもらいました。というのもクイズ的に知識として知っているだけでは数学としておもしろくないし，いろいろな解答があることがコンテストの最大の意義だと思うからです。

(1) 問1について

さまざまな（採点者が予想しなかったようなものを含めて）解答があって，大変楽しませてもらいました。もちろん「解答と解説」のように数え上げたものが多かったのですが，その他のやり方でユニークなもの，興味深いものがありました。アンケートの中で$\boxed{5}$について，「数え上げるしかない問題はおもしろくない」という意見がありましたが，もちろん他の発想でもいいのです。特に「順列，組み合わせ」についてはふつう高1，高2の授業でやっていない人が多いので，その人にとっては数え上げる方法しかおもいうかばないと思います。「数え上げる」ということは労多くして実り少ないと考える人もいるかもしれませんが，「順序よく」「いろいろな場合をもらさず」数え上げるということは数学的にも重要なことです。有名な四色問題（地図上の国々を異なる色を使って塗り分けるとき，四つの色があれば十分であるという定理）がコンピュータを使って全ての場合を数え上げて解決したというのは有名な例です。

その他の方法で多かったのは、全部の数（並べ方の総数）から，順番の数と下の数が一致するものを除く，という方法で，順列・組み合わせ（高校の教科書では「確率・統計」の教科書で出てきます）の知識を必要とします。といってもたとえば4人の並べ方は全部で，

$$\underset{4\text{とおり}}{\text{①}}\quad\underset{3\text{とおり}}{\text{②}}\quad\underset{2\text{とおり}}{\text{③}}\quad\underset{1\text{とおり}}{\text{④}}\qquad 4\times3\times2\times1=\boxed{24\text{（通り）}}$$

ということだけのなので，特に難しくありません。

以下次のような記号を使います。

〔Ⅰ〕5個のものから3個えらんで並べる並べ方を（5個から3個とる順列という）$\boxed{{}_5P_3}$で表す。

$${}_5P_3=\overset{\text{①}}{5}\times\overset{\text{②}}{4}\times\overset{\text{③}}{3}=60\text{（通り）。}$$

〔Ⅱ〕5個のものから3個えらぶえらび方を（5個から3個とる組み合わせという）$\boxed{{}_5C_3}$で表す。

$${}_5C_3=\frac{\overbrace{(5\times4\times3)}^{5\text{個から}3\text{個並べる並べ方}}}{\underbrace{(3\times2\times1)}_{\text{個の並べかえ}}}=10\text{（通り）}$$

これは確率・統計の教科書の中に出てきます。

これらの知識がなければ解けないというわけではないのですが，数え上げ以外の方法で解いた人はみな（この記号を使っていない人も）この考え方を使っていました。くわしく知りたい人は確率・統計の教科書をのぞいてみて下さい。

（方法1）

$\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}\\ *&*&*&*\end{pmatrix}$ ……①に1が入る場合②，③，④について

$${}_3P_3=3\times2\times1=6\text{（通り）}$$

……①に1が入らないで②に2が入る場合

{②に2が入る場合}－{①に1，②に2が入る場合}

①，③，④で　③，④で

$3\times2\times1\quad-2\times1\ =6-2=4$（通り）

……①に1，②に2が入らないで③に3が入る場合，

{③に3が入る場合}－〔{①が1，③が3の場合}＋{②が2，③が3の場合}－{①が1，②が2，③が3の場合}〕

$3\times2\times1-〔2+2-1〕=3$（通り）

……①に1，②に2，③に3が入らないで④に4が入る場合，

{④に4が入る場合}のうちで①，②，③に1，2，3が入らないもの

3個の数の〔かくらん順列〕（3，1，2）（2，3，1）……2（通り）

よって$24-(6+4+3+2)=24-15=9$（通り）

この方法で5人の場合を考えるのはけっこう大変だと思いますが，正解者も数名いました。

（方法2）

$\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}\\ *&*&*&*\end{pmatrix}$ のうち4人が順番通りのとき

$\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}\\ 1&2&3&4\end{pmatrix}$ ……1通り

3人が順番通りのとき……4人目も一致するので除く

2人が順番通りのとき……$\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$（通り）

例えば $\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}\\ 3&*&1&*\end{pmatrix}$ のとき残りの2つは決まる。このようなとりかたが $C_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$（通り）

1人が順番通りのとき，残りの3人の順番がちがう（かくらん順列）

よって各2通り。よって$4\times2=8$（通り）

例えば $\begin{pmatrix}\text{①}&\text{②}&\text{③}&\text{④}\\ 1&*&*&*\end{pmatrix}$ とすると②，③，④の並べ方は（3，4，2）（4，2，3）のみ，

よって1人も順番通りにならない場合は

$$24-(1+6+8)=\boxed{9\text{(通り)}}$$

この方法だと5人の場合も楽にできます。

5人とも順番通り……1通り

4人が順番通り………残り1名も一致するので除く

3人が順番通り………5人から3人えらぶと残り2人はいれかわり

$$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \\ 1 & * & 3 & 4 & * \end{pmatrix} \quad {}_5C_3=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}$$
$$=10\text{ (通り)}$$

2人が順番通り………5人から2人えらぶと残り3人が順番にならないのは，3人のかくらん順列2通り

$$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \\ 1 & * & * & 4 & * \end{pmatrix} \quad {}_5C_2\times2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot2$$
$$=20\text{ (通り)}$$

1人が順番通り………5人から1人えらぶと残り4人のかくらん順列（先の結果より9通り）がとれる

$$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \\ 1 & * & * & 4 & * \end{pmatrix} \quad {}_5C_1\times9=45\text{ (通り)}$$

よって，1人も順番通りにならないのは，全体$5\times4\times3\times2\times1=120$通りのうち

$$120-(1+10+20+45)=\boxed{44\text{ (通り)}}$$

この方法で正解した人は4～5名でした。この方法だと6名の場合についても，ほぼ同じ方法でしらべることができます。

（方法3）

完全な解答にはなっていませんでしたが，ユニークな発想で感心したものをひとつ。4個のいれかえを考えると，かくらん順列には，

$$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 \nearrow & 3 \nearrow & 3 \nearrow & 4 \end{pmatrix}$$

などのように$1\to2\to3\to4\to1$で4個全てがかくらん順列と

$$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 \nearrow & 1 & 4 \nearrow & 3 \end{pmatrix}$$

のように2個ずつのいれかえによるかくらん順列があります。前者を周期4の巡回置換，後者を周期2の巡回置換ということにします。（周期3はこの場合ありえない）……残り1個が変わらない周期2の場合，4個のうち2個のペアを2つ考えるので，4個から2個をえらぶえらび方は

$$\left(\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{1}{2}=3\text{ とおり}\right)$$

（残り2個もきまる）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ で3通り

周期4の場合

$$\begin{tikzcd} \text{①} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 2 \\ 4 & 3 \end{tikzcd} \quad \begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ * & & & \end{pmatrix}$$

①に対応するのは3通り

例えば①が4に行くとき④に対応するのは

$$\begin{tikzcd} \text{①} \arrow[d] & 2 \\ \text{④} \arrow[r] & 3 \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 4 & & & * \end{pmatrix}$$

2通り

例えば①→④→③と行くとき③に対応する

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & 2 \\ 4 \arrow[r] & \text{③} \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 4 & & * & 3 \end{pmatrix}$$

のは1通り

よって$3\times2\times1=6$（通り）ある。

よって$3+6=9$（通り）

同じ方法で5個のときを考えると，（周期5）のときと（周期3，周期2）の場合があり，

周期5なら　$4\times3\times2\times1=24$（通り）

（周期3，周期2）なら

周期3のとき$2\times1=2$（個），とりかたは5個から3個とる方法

$$\begin{tikzcd} & \text{①} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 & & 3 \end{tikzcd} \qquad {}_5C_3=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$$

残りの2個はいれかえしかないので

$$2\times10=20\text{ (通り)}$$

あわせて　$24+20=\boxed{44\text{ (通り)}}$

この考え方は，代数学の代表的理論のひとつである群論の中の置換の考え方を使っていて，なかなかおもしろい方法です。今年は数学オリンピック予選の中にもこの考え方を使ってできる問題がありました。

あと，題意を誤解して $\begin{pmatrix} \overbrace{\text{①} \quad \text{②} \quad \text{③} \quad \text{④}} \end{pmatrix}$ 上の部分の並べかえも考えて，

4人のとき　$4\times3\times2\times1\times9=216$（通り）

5人のとき　$5\times4\times3\times2\times1\times44=5280$（通り）などとした人もいましたが，ヒントの部分を見てもらうとこのような誤解はおきないはずです。

(2)　問2について

答えだけの答案が多かったのですが，せめてどのような場合に最大となるか，どのような場合に最小になるかを考えてほしいものです。その点で理由を含めてきちんと書かれていると思ったのは156番酒井君，223番新井君などです。229番土江君は4人の場合と5人の場合から最小の場合は最大の場合の$\frac{1}{3}$と予想をしていますが，6人の場合で考えると

最も多いとき $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} & \text{⑥} \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$5+4+3+2+1=15$（回）

最も少ないとき $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} & \text{⑥} \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

3回

となるので正しくありません。ただし一般の場合まで考えたのは大したものです。

さて，「解答と解説」の中「総転置数」ということばを使っています。

例えば $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の並べ方（Ⓐの並べ方をする）を

$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ の形（Ⓑの並べ方とする）に直すのは何回のいれかえが必要とするかを考えましょう。Ⓑの形のように下の数が左から右へ，小さい方から大きい方へ並んでいれば，いれかえは全く不用です。しかしⒶのように一部でも大小が逆転していればいれかえをしなければなりません。例えば $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 3 & 4 & * & * \end{pmatrix}$ のように2つの数の間で（左の数）＜（右の数）が成りたっていれば，この2つの間でのいれかえは不用です。しかし

$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 3 & * & 1 & * \end{pmatrix}$ のような場合，必ずいえかえをしなければなりません。大小が逆転しているような2つの数の組み合わせがあれば，当然そこではいれかえが必要です。このように n 個の数の並べ方の中で，2つの数をとって（左の数）＞（右の数）のような逆転がおこっている個数を数えると，それだけいれかえが必要となります。その個数を総転置数というのです。さて，総転置数の回数だけいれかえをすると，正しい形 $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \cdots & \text{ⓝ} \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ に直せることを確かめましょう。一回のいれかえによって一箇所の大小の逆転が解消されます。ということは，総転置数の回だけいれかえをおこなうと逆転している箇所は全て逆転が解消されるのです。（逆転箇所は総転置数の箇所だけあるので）ただし，これは逆転している箇所を順に直していくと考えた場合です。

Ⓐの場合，逆転している2数の組は3と1，3と2及び4と1，4と2の間なので，この個数すなわち総転置数4のいれかえによってⒷの形に戻ります。

いれかえがもっとも多く必要なのは4人のとき $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のように順序が完全に逆のとき，もっとも少なくてすむのは $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ のように2つずついれかえのときとなります。これについては4人のとき全体でも9通りですから，その全ての場合について調べてもなんともありませんね。5人の場合も同じですが，

最大を $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ としていた人が多くいました。これはかくらん順列ではありません。ここを間違えた人は10回となっていましたが，もちろんこれはダメです。なお

$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ などのような場合，となり同士で同時にいれかえたのを1回と数えた人もいましたが，いれかえの回数を聞いたのですから2回と数えてほしいものです。

(1)(2)とも実名（チャーリとかビルとか……）を上げてかくらん順列や並べかえを具体的にやってくれていた人がたった一人だけいました。手間を考えたら大変かもしれまれんが，コンテストに「遊びの精神」を吹き込んでくれたような気がして，大変おもしろく思いました。「数学」にも「風流心（あそびゴコロ）」は必要です。出来たか出来ないかではなく「楽しめたか」という観点で数学コンテストに参加してくれたら，我々にとってもうれしいことです。

解答例

問1　4人のとき（1番目1はありえない）

☆1番目が2とすると $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 2 & * & * & * \end{pmatrix}$

このとき，2番目に2は入らないので，2番目を1とすると $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2番目を3とすると　（2，3，4，1）

2番目を4とすると　（2，4，1，3）

☆1番目が3とすると

2番目を1とすると　（3，1，4，2）

2番目を4とすると　（3，4，1，2）

（3，4，2，1）

☆1番目が4とすると

2番目を1とすると　（4，1，2，3）

2番目を3とすると　（4，3，1，2）

（4，3，2，1）

よって9通り

5人のとき

☆1番目が2とすると $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \\ 2 & * & * & * & * \end{pmatrix}$

2番目が1ならば（2，1，*，*，*）

…2通り

（2，1，5，3，4）（2，1，4，5，3）

……（3，4，5）のかくらん行列

1番目が2で，2番目が1でないとき（3か4か5）

（2，3，1，5，4）（2，3，4，5，1）

（2，3，5，1，4）（2，4，1，5，3）
（2，4，5，3，1）（2，4，5，1，3）
（2，5，1，3，4）（2，5，4，1，3）
（2，5，4，3，1）9通り

ゆえに①が2のとき9＋2＝11（通り）。

さらに，1番目が3のとき同様に
（3，1，2，5，4）（3，1，4，5，2）
（3，1，5，2，4）（3，4，5，1，2）
（3，4，5，2，1）（3，4，2，5，1）
（3，4，1，5，2）（3，5，1，2，4）
（3，5，2，1，4）（3，5，4，1，2）
（3，5，4，2，1）

よって①が3のとき11通り

1番目が4，5のときも同様なので4×11＝44（通り）

問2　4人の場合，かくらん順列で総転置数がもっとも多くなるのは

$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の場合で（4，3）（4，2）（4，1）（3，2）（3，1）（2，1）より6

よって6回いれかえ（最大）

もっとも少ないのは

$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ の場合で（2，1）（4，3）より2

2回いれかえ（最小）

5人の場合，総転置数が最大なのは

$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ であるが，かくらん順列ではないので，これをひとついれかえたもの

$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ または

$\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のときで9回（最大）

総転置数が最小なのは $\begin{pmatrix} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ のように3個のかくらん順列と2個のかくらん順列の組み合わせになっているときで，3回（最小）