第 12 回
北海道高等学校数学コンテスト

問　　　　題

平成 6 年 1 月12日(水)

9 時00分～12時30分（210分）

北海道算数数学教育会高等学校部会

問題 1　　1994年，ある国で総選挙が行われ，指名された総理が連立政権を作るにあたり，連立与党党首による組閣の話し合いがなされた。その結果，閣僚ポストの総数をXとし，連立与党第 1 党から閣僚 2 人とその残りのポストの$\frac{1}{n}$を選ぶ。連立与党第 2 党から閣僚 4 人とその残りのポストの$\frac{1}{n}$を選ぶ。連立与党第 3 党から閣僚 6 人とその残りのポストの$\frac{1}{n}$を選ぶ。以下同様の方法で順次に連立与党に閣僚ポストを配分することを決めた。連立与党第k党の得た閣僚ポスト数をx_kとする。

(1)　x_1をn，Xで表せ。

(2)　x_kをn，a，X，x_1，x_2，……，x_{k-1}で表せ。ただし，$k \geqq 2$。

その結果，連立与党各党は同数の閣僚x人となった。

(3)　xおよびXをnで表せ。

(4)　nを自然数とする時，この連立政権の閣僚ポストの総数を28から34の間にあるとする時，いったいこの政権の連立与党は何党あるのか。また閣僚ポストの総数は何個あるのか。

問題 2

問 1　解答用紙に与えられた図は，直角三角形 ABC（∠A＝90°）で点Mは辺 BC の中点である。AM＝BM を証明せよ。

注：以下すべて追加する図については，定木，コンパス必要なく free hand でよい。また証明文の中では追加する図の説明を必らず明記すること。

問 2　解答用紙に与えられた図は，鋭角三角形 ABC（AB＞AC）である。

(1)　辺 AC の中点をDとし，Aから BC に垂線を下してその交点をHとする。
辺 BC の延長上に点Eをとり BH＝CE にする。
之らの点D，H，Eを与えられた図に追加せよ。

(2)　(1)のように 3 点をとったとき DB＝DE を証明せよ。

問題 3　199X年，プロ野球セントラルリーグの首位打者（最高打率者）争いは終盤まで激しい競争が続いた。Tチームのオマリー選手が全試合を終わった時点で462打数168安打でトップ，それを追ってDチームのおちあい選手とSチームのふるた選手が残り一試合で最終戦に逆転をかけている。

(1) 打率は $\dfrac{(\text{安打数})}{(\text{打数})}$ で計算する。オマリー選手の打率を既約分数で表せ。

(2) おちあい選手は残り一試合の段階で456打数164安打であった。オマリー選手をぬくためには，最終戦で何打数何安打打てばよいか。ただし，一試合に回ってくる打数は4回または5回とし，その他の可能性はないものとする。

(3) ふるた選手の残り一試合の段階での打数を N，安打数を a とする。ふるた選手が最終戦で4打数2安打であれば，オマリー選手を逆転して首位，しかし5打数2安打では逆転できないものとする。この条件から N，a についての不等式を作れ。また N，a の可能な値の組を全て求めよ。ただし，$450 \leqq N < 460$とする。

問題 4　関数 f は任意の実数 t，x，y に対して，

$$f(tx+(1-t)y)=tf(x)+(1-t)f(y)$$

を満たしているものとする。

$f(0)=1$，$f(1)\neq 1$ のとき，次の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$を$f(1)$と x で表せ。

(2) $f(f(x))$を$f(1)$ と x で表せ。

(3) $f(a)=f(b)$ならば$a=b$ となることを示せ。

(4) 任意の実数 x に対して，

$$f(f(f(x)))=f(x)$$

が成り立つとき，$f(x)$ を x で表せ。

問題 5　正の整数 m,n は，$\sqrt{n} \leqq m+\dfrac{1}{2} \leqq \sqrt{n+1}$ を満たしている。

$A=[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]$，$B=[\sqrt{4n+2}]$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$[x]$ は，xを越えないような整数のうち，最大のものである。

例：$[2.7]=2$，$[3]=3$

(1) $n=2$ のとき，m，A，B の値を求めよ。

(2) $m=3$ のとき，n，A，B の値を求めよ。

(3) n を m で表せ。

(4) $A=B=2m+1$ を示せ。

平成５年度(平成６年１月12日実施)

第 12 回
北海道高等学校数学コンテスト

解 答 と 解 説

北海道算数数学教育会高等学校部会

1

1994年，ある国で総選挙が行われ，指名された総理が連立政権を作るにあたり，連立与党党首による組閣の話し合いがなされた。その結果，閣僚ポストの総数をXとし，連立与党第1党から閣僚2人とその残りのポストの$\frac{1}{n}$を選ぶ。連立与党第2党から閣僚4人とその残りのポストの$\frac{1}{n}$を選ぶ。連立与党第3党から閣僚6人とその残りのポストの$\frac{1}{n}$を選ぶ。以下同様の方法で順次に連立与党に閣僚ポストを配分することを決めた。連立与党第k党の得た閣僚ポスト数をx_kとする。

(1) x_1をn，Xで表せ。

(2) x_kをn，a，X，x_1，x_2，……，x_{k-1}で表せ。ただし，$k \geqq 2$。

その結果，連立与党各党は同数の閣僚x人となった。

(3) xおよびXをnで表せ。

(4) nを自然数とする時，この連立政権の閣僚ポストの総数を28から34の間にあるとする時，いったいこの政権の連立与党は何党あるのか。また閣僚ポストの総数は何個あるのか。

着眼点

・文章を読んで数式を組み立てることができるか。

・数学Ⅰの恒等式を文章問題にアレンジしたが，kに関する恒等式である点が見抜くことができるか。

・簡単な整数問題を解くことができるか。

・最後に普段から新聞を読んで政治問題に関心を持っていることが大事です。

解答例

(1) $x_1 = 2 + (X-2) \times \frac{1}{n}$ ……（答）

(2) 連立与党第k党の閣僚ポスト数はx_kより

$$x_k = 2k + \{X - (x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_{k-1}) - 2k\} \times \frac{1}{n} \text{ ……（答）}$$

(3) $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_k = x$より

$$x = 2k + \{X - (k-1)x - 2k\} \times \frac{1}{n}$$

$$\therefore x = 2k + \frac{X - (k-1)x - 2k}{n}$$

分母を払って整理すると

$$nx = 2kn + X - (k-1)x - 2k$$

$k = 1, 2, 3$……について成立するので，kに関する恒等式とみなすことができる。

kについての係数比較法を行うと

$$nx = (2n - x - 2)k + X + x$$

$$2n - x - 2 = 0,\ nx = X + x$$

$$x = 2n - 2 \qquad X = (n-1)x$$

$\therefore x = 2(n-1)$ ……（答）

$x = 2(n-1)$ を$X = (n-1)x$へ代入

$\therefore X = 2(n-1)^2$ ……（答）

(4) $28 < 2(n-1)^2 < 34$ 前問(3)を利用した簡単な整数問題へ帰着される。

$14 < (n-1)^2 < 17$ $n-1$は自然数より

$(n-1)^2 = 16 \quad \therefore n-1 = 4 \quad \therefore n = 5$

$X = (n-1)x$より，連立与党の数は$n-1$

つまり，4党……（答）

又，前問(3)より $X = 2(n-1)^2$ より

$X = 32$

閣僚ポストの総数は32個……（答）

2

問1 解答用紙に与えられた図は，直角三角形ABC（$\angle A = 90°$）で点Mは辺BCの中点である。AM＝BMを証明せよ。

注：以下すべて追加する図については，定木，コンパス必要なくfree handでよい。また証明文の中では追加する図の説明を必らず明記すること。

問2 解答用紙に与えられた図は，鋭角三角形ABC（AB＞AC）である。

(1) 辺ACの中点をDとし，AからBCに垂線を下してその交点をHとする。

辺BCの延長上に点Eをとり BH＝CE にする。

之らの点D, H, Eを与えられた図に追加せよ。

(2) (1)のように3点をとったとき DB＝DE を証明せよ。

着眼点

問1 直角三角形の性質として暗記している者が多いかも知れないが，ここでは改めて始めに戻って考える。方法は色々ある。とにかく中学では始めに図形移動を習っているので処理の仕方は楽であろう。角計算，円の性質，中点連結・・・

問2

(1) free handであるから正確でなくともよいが，あまり粗末なのはいけない。またここでは

点や線分を追加するだけで説明不用であることはいうまでもない。

(2) ここには図形移動での着眼点だけ示すが，もちろん座標幾何や三角関数でのそれもある。"中点があったら一応180°回転を試みる" 之はお定まりである。

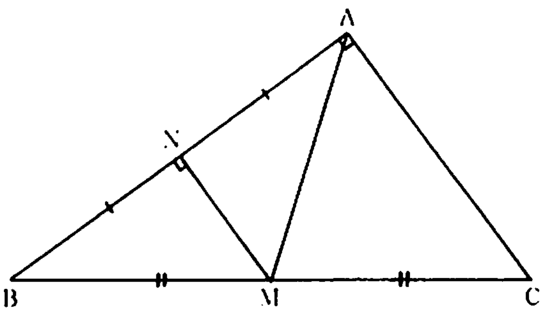
△DCE をD中心に180°回転する。以下・・・

別法として始めに△AHC に問1の結果からDH＝DC 発見

次に△DCE の折り返し・・・

解答例

問1　解答例－1



Mから AB に垂線をひき交点をNとすれば

MN//CA，BM＝MC から

AN＝NB

△ANM を MN 軸に折り返せばAはBに重なる。

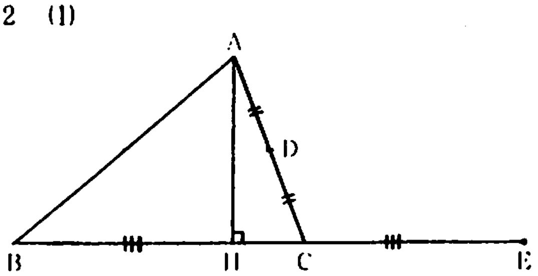
∴AM＝BM

問1　解答例－2

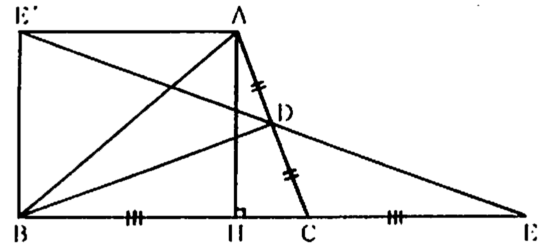
図省略Mを中心，BM を半径とする円を考えれば，BC は直径となり直径に対する円周角は直角になる。従って AM は半径になる。

i. e.　　AM＝BM

問2　(1)



問2　(2)　解答例－1



△DCE をD中心180° 回転すればCはAに重なる。

Eの移った点を E' とすれば

E'A//CE ………①

E'A＝CE＝BH ………②

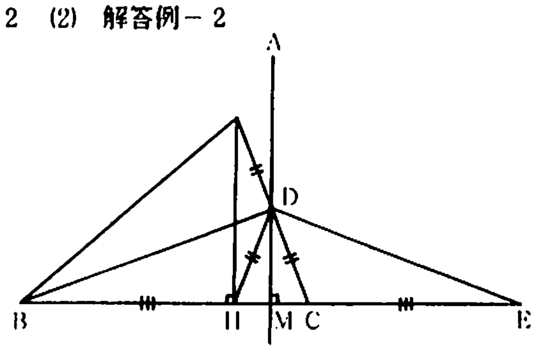
①，②から四辺形 E'BHA は平行四辺形である。

∠E'BH＝∠E'AH＝∠AHB＝90°

△E'BE で問1より

DB＝DE

問2　(2)　解答例－2



△AHC で∠AHC＝90°，AD＝DC であるから問1によって DH＝DA＝DC となる。Dを通って BC に垂線をひき BC との交点をMとする。△DBM を DM 軸に折り返せばHはCに重なる。

HM＝MC，BH＝CE からBはEに重なる。

i. e.　　DB＝DE

3

199X年，プロ野球セントラルリーグの首位打者（最高打率者）争いは終盤まで激しい競争が続いた。Tチームのオマリー選手が全試合を終わった時点で462打数168安打でトップ，それを追ってDチームのおちあい選手とSチームのふるた選手が残り一試合で最終戦に逆転をかけている。

(1) 打率は $\frac{(安打数)}{(打数)}$ で計算する。オマリー選

手の打率を既約分数で表せ。

(2) おちあい選手は残り一試合の段階で456打数164安打であった。オマリー選手をぬくためには，最終戦で何打数何安打打てばよいか。ただし，一試合に回ってくる打数は4回または5回とし，その他の可能性はないものとする。

(3) ふるた選手の残り一試合の段階での打数をN，安打数をaとする。ふるた選手が最終戦で4打数2安打であれば，オマリー選手を逆転して首位，しかし5打数2安打では逆転できないものとする。この条件からN，aについての不等式を作れ。またN，aの可能な値の組を全て求めよ。ただし，$450 \leqq N < 460$とする。

着眼点

(1) 単純に約分するとよい。ユークリッドの互除法を知っていると，分子と分母のG．C．M．が早くみつかる。

(2) 最終戦で4打数k安打で逆転するには，$\frac{164+k}{456+4} > \frac{4}{11}$（オマリーの打率）ならよい。5打数$k$安打のときも同様。

(3) (2)と同様に考えて $\frac{a+2}{N+5} < \frac{4}{11} < \frac{a+2}{N+4}$ が成り立つとよい。

この式から$11(a+2) < 4(N+5)$，$4(N+4) < 11(a+2)$。

よって，$11a+2 < 4N < 11a+6$が得られる。ここで，4と11は互いに素より①$a=4k$の場合，②$a=4k+1$の場合，③$a=4k+2$の場合，④$a=4k+3$の場合の4通りについて考えると可能なNの値も定まる。

解答例

(1) $\frac{168}{462} = \frac{42 \cdot 4}{42 \cdot 11} = \frac{4}{11}$ ……（答）

(2) （i）4打数k安打の場合

$\frac{164+k}{456+4} > \frac{4}{11}$ となればよいので

$11(164+k) > 4 \cdot 460$

したがって，$11k > 36$　　$\therefore k=4$

［4打数4安打］

（ii）5打数k安打の場合

$\frac{164+k}{456+5} > \frac{4}{11}$ となればよいので

$11(164+k) > 4 \cdot 461$

したがって，$11k > 40$　　$\therefore k=4,\ 5$

［5打数4安打または5安打］

（答）4打数4安打，5打数4安打，5打数5安打

(3) N，aについての不等式は（着眼点参照），

（答）$11a+2 < 4N < 11a+6$

次に，上の不等式をみたすN，aの組をもとめる。

① $a=4k$のとき

$44k+2 < 4N < 44k+6$．

よって，条件を満たすのは$4N=44k+4$．

すなわち，$N=11k+1$．

② $a=4k+1$のとき

①と同様にして，$44k+13 < 4N < 44k+17$より，$N=11k+4$．

③ $a=4k+2$のとき

$44k+24 < 4N < 44k+28$となるので，条件をみたすNはない。

④ $a=4k+3$のとき

$44k+35 < 4N < 44k+39$より，$N=11k+9$

これらの中で，$450 \leqq N \leqq 460$をみたすのは①，②の$k=41$の場合のみで，このとき

$(N,\ a)=(452,\ 164)$，$(455,\ 165)$ ……（答）

4

関数fは任意の実数t，x，yに対して，

$f(tx+(1-t)y)$

$=tf(x)+(1-t)f(y)$

を満たしているものとする。

$f(0)=1$，$f(1) \neq 1$のとき，次の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$を$f(1)$とxで表せ。

(2) $f(f(x))$を$f(1)$とxで表せ。

(3) $f(a)=f(b)$ならば$a=b$となることを示せ。

(4) 任意の実数xに対して，

$f(f(f(x)))=f(x)$

が成り立つとき，$f(x)$をxで表せ。

着眼点

$f(tx+(1-t)y)=tf(x)+(1-t)f(y)$は，“点$x$，$y$を$(1-t):t$の比に分けた点$tx+(1-t)y$における関数値が，点$f(x)$，$f(y)$を$(1-t):t$の比に分けた点$tf(x)+(1-t)f(y)$に等しい”ということを表しているので，関数$f$のグラフは直線になる。

また，$f(1) \neq f(0)(=1)$より，この直線の

傾きは0でない。したがって，(3)の証明には，$f(1)\neq 1$を使う必要がある。

(4)では(3)を利用することによって，$f(f(x))=x$がわかるので，(2)から，$f(1)$の値が求まる。

解答例

(1) $x=1$，$y=0$とすると，

$f(t)=tf(1)+(1-t)f(0)$

$=f(1)t+1-t$．　tは任意だから，

(答) $f(x)=(f(1)-1)x+1$

(2) $f(f(x))=f((f(1)-1)x+1)$

$=(f(1)-1)((f(1)-1)x+1)+1$

$=(f(1)-1)^2x+f(1)-1+1$．

(答) $f(f(x))=(f(1)-1)^2x+f(1)$

(3) $f(a)=f(b)$のとき，(1)より，

$(f(1)-1)a+1=(f(1)-1)b+1$

$(f(1)-1)(a-b)=0$．

$f(1)-1\neq 0$なので，$a-b=0$．

ゆえに，$a=b$．(証明終わり)

(4) $f(f(f(x)))=f(x)$のとき，(3)より，

$f(f(x))=x$．

したがって，(2)の結果を使うと，

$(f(1)-1)^2x+f(1)=x$．

これはxの恒等式なので，$(f(1)-1)^2=1$かつ$f(1)=0$．

ゆえに，$f(1)=0$．　これを(1)の答えにあてはめて，

(答) $f(x)=-x+1$

5

正の整数m，nは，$\sqrt{n}\leqq m+\frac{1}{2}\leqq\sqrt{n+1}$を満たしている。

$A=[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]$，$B=[\sqrt{4n+2}]$とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$[x]$は，xを越えないような整数のうち，最大のものである。例：$[2.7]=2$，$[3]=3$

(1) $n=2$のとき，m，A，Bの値を求めよ。

(2) $m=3$のとき，n，A，Bの値を求めよ。

(3) nをmで表せ。

(4) $A=B=2m+1$を示せ。

着眼点

(1) $\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$程度は，ことわり無く用いてよい。

厳密に比較するなら，$1.4<\sqrt{2}\leqq m+\frac{1}{2}\leqq\sqrt{3}<1.8$で，$m=1$の必要性を，そして，$\sqrt{2}<1.5\leqq m+\frac{1}{2}<1.7<\sqrt{3}$で，$m=1$の十分性を示さなければならない。或いは，各辺2乗し，mの連立2次不等式を解く手もある。

(2) $n\leqq a\leqq n+1$から$a-1\leqq n\leqq a$を導けることに思い至らなかった者は，数直線をイメージするとよい。$a-1$，n，a，$n+1$の順に点が並ぶ様から容易に納得できる。また，根号を減らす（又は，無くす）ために，平方するという発想は自然であろう。

(3) 各辺を2乗するという発想自体は，そう難しくないであろう。計算に不慣れでその後の展望が見えない者は（そういう者こそ），実際に手を動かして見てほしい。

(4) $[x]=n\leftrightarrow n\leqq x<n+1$である。[ ]の記号（ガウス記号と呼ばれる）を初めて見る者には，「$n\leqq x<n+1$を示すことで，$[x]=n$を結論する」という方法に思い至るのは，少し難しいかもしれない。しかし，初めて接する概念に対して，与えられた性質を適切に用いていく能力も，数学には大切なものである。

解答例

(1) $\sqrt{2}\leqq m+\frac{1}{2}\leqq\sqrt{3}$

$\sqrt{2}-\frac{1}{2}\leqq m\leqq\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

$\sqrt{2}-\frac{1}{2}\fallingdotseq 1.4-0.5=0.9$,

$\sqrt{3}-\frac{1}{2}\fallingdotseq 1.7-0.5=1.2$

よって，$m=1$……（答）

次に，$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$とおく。

$x^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$

$2<\sqrt{6}<3$より，

$5+2\times 2<x^2<5+2\times 3$

$9<x^2<11$

ゆえに，

$3<x<\sqrt{11}<4$

よって，$A=[\sqrt{2}+\sqrt{3}]=3$……（答）

$B=[\sqrt{4\times 2+2}]=[\sqrt{10}]=3$……（答）

(2) $\sqrt{n}\leqq 3+\frac{1}{2}\leqq\sqrt{n}+1$

各辺を2乗すると，

$n\leqq\frac{49}{4}\leqq n+1$

ゆえに，$\frac{45}{4}\leqq n\leqq\frac{49}{4}$

よって，$n=12$……（答）

$\sqrt{12}+\sqrt{13}=y$とおく。

$y^2=12+4\sqrt{39}+13=25+4\sqrt{39}$

$25+4\times 6<y^2<25+4\times 7$

$49<y^2<53$

ゆえに，$7<y<\sqrt{53}<8$

よって，$A=[\sqrt{12}+\sqrt{13}]=7$ …… (答)

$B=[\sqrt{4\times12+2}]=[\sqrt{50}]=7$ …… (答)

(3) $\sqrt{n}\leqq m+\frac{1}{2}\leqq\sqrt{n+1}$ の各辺を2乗して，

$n\leqq m^2+m+\frac{1}{4}\leqq n+1$

ゆえに，$m^2+m-\frac{3}{4}\leqq n\leqq m^2+m+\frac{1}{4}$

よって，$n=m^2+m$ …… (答)

(4) $A=2m+1$ を示す。

$2m+2$，$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ いずれも正なので，それぞれの2乗を比較する。

$(2m+2)^2-(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2$

$=4m^2+8m+4-\{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\}$

$=2m^2+6m+3-2\sqrt{(m^2+m)(m^2+m+1)}$

$(\because n=m^2+m)$

$C=2m^2+6m+3$，$D=2\sqrt{(m^2+m)(m^2+m+1)}$ とおくと，

C，D いずれも正であるから，C^2，D^2 を比較すると，

$C^2-D^2=4m^4+24m^3+48m^2+36m+9$

$-4(m^4+2m^3+2m^2+m)$

$=16m^3+40m^2+32m+9>0$

したがって，$C>D$，すなわち，

$2m+2>\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ ……①

$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ と $2m+1$ それぞれの2乗を比較する。

$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2-(2m+1)^2$

$=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$

$-(4m^2+4m+1)$

$=2\sqrt{(m^2+m)(m^2+m+1)}-2m^2-2m$

$(\because n=m^2+m)$

$=2\sqrt{(m^2+m)(m^2+m+1)}-2\sqrt{(m^2+m)^2}$

$=2\sqrt{(m^2+m)}(\sqrt{(m^2+m+1)}-\sqrt{(m^2+m)})>0$

よって，$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>2m+1$ …………②

①，②より

$2m+1<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<2m+2$

すなわち，$A=2m+1$ …… (答)

$B=2m+1$ を示す。

$2m+2$ と $\sqrt{4n+2}$ それぞれの2乗を比較する。

$(2m+2)^2-(\sqrt{4n+2})^2$

$=4m^2+8m+4-(4n+2)$

$=4m^2+8m+4-4(m^2+m)-2$

$(\because n=m^2+m)$

$=4m+2>0$

よって，$2m+2>\sqrt{4n+2}$ ……③

$\sqrt{4n+2}$ と $2m+1$ それぞれの2乗を比較する。

$(\sqrt{4n+2})^2-(2m+1)^2$

$=4n-4m^2-4m+1$

$=4(m^2+m)-4m^2-4m+1$

$(\because n=m^2+m)$

$=1>0$

よって，$\sqrt{4n+2}>2m+1$ …………④

③，④より，$2m+1<\sqrt{4n+2}<2m+2$

すなわち，$B=2m+1$ ………… (答)

第 12 回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

平成６年１月12日(水)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第12回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長　今　西　義　紀

昭和58年度（1983年）１月15日に第１回が実施された「数学コンテスト」も今回で第12回を迎えることができました。今年は全道26校から中学生を含む314名の高校生諸君の参加を得て盛大に開催できたことは関係者一同喜びにたえません。このコンテストに対する理解と数学に対する興味・関心や数学の重要性が認識されてきたことの表れとうれしく思うとともに，全道各地で熱心に指導に当っておられる先生方のご努力に深く感謝と敬意を表します。

この「数学コンテスト」は，アメリカや東欧諸国で行なわれていた“数学オリンピック”にヒントを得て，北海道においてもそれに似た催しを行ない，数学好きの高校生や中学生に刺激を与え，一層数学的な興味を高め，また数学に楽しく挑戦することを通して，潜在している数学的能力を引き出す手立てとして実施してきました。1989年から世界の50ケ国目として，日本も国際数学オリンピックに参加し，予選の日本数学オリンピックにおいて，本道の高校生が毎回優秀な成績を収めておた，特に中国の北京で行われた第31回大会で札幌の高校生が銅メダルを受賞したことは大変嬉しいことでした。数学コンテストや数学オリンピックは，単に数学の問題を解く力を競い，それに優劣をつけるものではありません。この数学コンテストをとおして，数学教育本来の目標である基本的な概念や原理・法則，論理的思考力や創造的な考え方を自らがそれぞれの持っている能力に応じて問題を解決しながら身につけ，数学にたいする興味・関心を高めることにあります。21世紀に向けての高度情報化と国際化に数学の果す役割はますます重要であります。さらにこの数学コンテストをきっかけとして数学を愛する同好の士が増え，それぞれの学校で互いに励まし合いながら一層本道の数学の学力の水準を高めることに役立ちたいとも念願しています。

終わりになりましたが，北海道教育委員会，札幌市教育委員会，北海道高等学校校長協会より賜わりました後援並びに北海道新聞社，福武書店の物心両面にわたるご高配に厚くお礼申し上げるとともに，本年も問題作成について御尽力頂きました北海道大学理学部数学科，出題や採点からコンテストの運営全般にわたってご苦労いただいた北数教高校部会研究部，さらに全道各地で実施にご協力いただいた会場校や諸先生に厚くお礼申し上げます。今度ともご協力の程よろしくお願いいたします。

●成績優秀者

松島　毅	大森拓也	髙橋　亮	島田清稔
吉田一星	大森一樹	樋口和弘	寺本泰明
杉田純一	平田健司	中川恭志	本間英範
樺沢正之	藤嶋佳子	佐々木耕太	二元和朗
船川　孝	東森信就	吉田幸生	菅原大輔

第12回　数学コンテスト度数分布

得点	問1	問2	問3	問4	問5
40	60	143	18	14	1
39	0	0	31	0	0
38	0	16	8	0	1
37	0	7	1	1	0
36	0	1	2	0	1
35	8	14	12	10	2
34	0	0	3	0	1
33	1	1	10	0	1
32	1	3	3	0	3
31	0	0	2	0	4
30	18	9	54	5	3
29	0	0	3	0	1
28	1	1	6	0	0
27	0	0	1	0	0
26	0	2	6	0	0
25	7	4	19	0	1
24	0	0	6	1	2
23	0	0	3	2	1
22	0	0	2	0	23
21	0	0	4	0	3
20	44	8	6	7	26
19	0	0	5	0	10
18	0	1	7	1	27
17	0	0	0	0	17
16	0	10	4	0	10
15	5	3	1	0	22
14	0	0	2	0	11
13	1	0	5	2	7
12	1	1	2	0	9
11	0	3	0	0	8
10	62	1	0	7	6
9	0	0	0	0	7
8	0	1	5	0	2
7	0	1	0	0	1
6	0	2	0	0	7
5	5	1	0	0	4
4	0	0	0	0	1
3	0	0	0	2	1
2	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0
0	19	0	2	181	8
受験者数	233	233	233	233	233
総計	5113	8162	6803	1427	3888
平均点	21.9	35.0	29.1	6.1	16.6
S・D	13.5	9.0	8.7	12.7	7.3

階級	合計
200 ～ 200	0
195 ～ 199	0
190 ～ 194	1
185 ～ 189	2
180 ～ 184	2
175 ～ 179	2
170 ～ 174	4
165 ～ 169	6
160 ～ 164	1
155 ～ 159	8
150 ～ 154	7
145 ～ 149	4
140 ～ 144	6
135 ～ 139	7
130 ～ 134	7
125 ～ 129	16
120 ～ 124	10
115 ～ 119	13
110 ～ 114	14
105 ～ 109	13
100 ～ 104	14
95 ～ 99	14
90 ～ 94	21
85 ～ 89	13
80 ～ 84	7
75 ～ 79	7
70 ～ 74	6
65 ～ 69	7
60 ～ 64	5
55 ～ 59	3
50 ～ 54	4
45 ～ 49	4
40 ～ 44	1
35 ～ 39	1
30 ～ 34	1
25 ～ 29	1
20 ～ 24	1
15 ～ 19	0
10 ～ 14	0
5 ～ 9	0
0 ～ 4	0
233	
25393	
108.9	
33.8	

1

1994年，ある国で総選挙が行われ，指名された総理が連立政権を作るにあたり，連立与党党首による組閣の話し合いがなされた。その結果，閣僚ポストの総数をXとし，連立与党第1党から閣僚2人とその残りのポストの$\frac{1}{n}$を選ぶ。連立与党第2党から閣僚4人とその残りのポストの$\frac{1}{n}$を選ぶ。連立与党第3党から閣僚6人とその残りのポストの$\frac{1}{n}$を選ぶ。以下同様の方法で順次に連立与党に閣僚ポストを配分することを決めた。連立与党第k党の得た閣僚ポスト数をx_kとする。

(1) x_1をn，Xで表せ。

(2) x_kをn，k，X，x_1，x_2，……，x_{k-1}で表せ。ただし，$k \geqq 2$。

その結果，連立与党各党は同数の閣僚x人となった。

(3) xおよびXをnで表せ。

(4) nを自然数とする時，この連立政権の閣僚ポストの総数を28から34の間にあるとする時，いったいこの政権の連立与党は何党あるのか。また閣僚ポストの総数は何個あるのか。

講　評

(1) 文章を読んで内容を数式化する問題である。基礎問題の1番にふさわしくほとんどの生徒が正解であった。しかし，問題文のなかで『閣僚ポスト』，『連立政権』といった語句の意味がわからない生徒もいた。

(2) 前問題(1)を一般化した問題であり，この問題も文章を読んで数式化するタイプの問題であるが(1)よりできが悪かった。

(3) さらに(2)に条件を付け加えた問題である。この条件を付け加えて，kに関する整式と見なしていく事が大切である。しかし、途中の計算過程を省略する生徒がかなり存在し，中途点を設けたのだが，あまり恩恵を受ける生徒は居なかった。

(4) (3)の結果を利用した単純な『整数問題』になっている。

問題全体として気がついた事は

・計算過程，思考過程を省略している生徒が多いのに驚いた。どうやって解を得る事ができたのか，採点する側として不思議な答案もあった。

・単純の条件の積み重ねをどうやって数式化できるか。

・問題文の語句『閣僚ポスト』『連立政権』といった意味を理解するためにも理科系と言えども毎日新聞を読むことが必要である。

解答例

(1) $x_1 = 2 + (X-2) \times \frac{1}{n}$ ……（答）

(2) 連立与党第k党の閣僚ポスト数はx_kより

$$x_k = 2k + \{X - (x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_{k-1}) - 2k\} \times \frac{1}{n} \text{ ……（答）}$$

(3) $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_k = x$より

$$x = 2k + \{X - (k-1)x - 2k\} \times \frac{1}{n}$$

$$\therefore x = 2k + \frac{X - (k-1)x - 2k}{n}$$

分母を払って整理すると

$nx = 2kn + X - (k-1)x - 2k$

$k = 1,\ 2,\ 3$……について成立するので，kに関する恒等式とみなすことができる。

kについての係数比較法を行うと

$nx = (2n - x - 2)k + X + x$

$2n - x - 2 = 0$，$nx = X + x$

$x = 2n - 2$　　$X = (n-1)x$

$\therefore x = 2(n-1)$ ……（答）

$x = 2(n-1)$ を$X = (n-1)x$へ代入

$\therefore X = 2(n-1)^2$ ……（答）

(4) $28 < 2(n-1)^2 < 34$　前問(3)を利用した簡単な整数問題へ帰着される。

$14 < (n-1)^2 < 17$　　$n-1$は自然数より

$(n-1)^2 = 16$　　$\therefore n - 1 = 4$　　$\therefore n = 5$

$X = (n-1)x$より，連立与党の数は$n-1$つまり，4党……（答）

又，前問(3)より　$X = 2(n-1)^2$より

$X = 32$

閣僚ポストの総数は32個……（答）

2

問1　解答用紙に与えられた図は，直角三角形ABC（∠A＝90°）で点Mは辺BCの中点である。AM＝BMを証明せよ。

注：以下すべて追加する図については，定木，コンパス必要なく free hand でよい。また証明文の中では追加する図の説明を必らず明記すること。

問2　解答用紙に与えられた図は，鋭角三角形ABC（AB＞AC）である。

(1) 辺ACの中点をDとし，AからBCに垂線を下してその交点をHとする。

辺 BC の延長上に点Eをとり BH＝CE にする。

之らの点 D, H, E を与えられた図に追加せよ。

(2) (1)のように3点をとったとき DB＝DE を証明せよ。

講　評

I　配点

問1．解答　10点

問2．(1)　6点　　(2)　24点

II　配点についての考慮

1．出来るたけ多くの点を与えるのが基本方針。

2．free hand をすすめている。

3．問2の(2)では採点者の主観が入るのは止むを得ないが，全体として一貫した見解によっている。

III　出題についての配慮

問1は問2に役立てる為の伏線としたが，結果的には問2を問1と無関係にした者が多く，出題の配慮が無駄になった。

IV　採点後の反省

このコンテストでは第一回から必らず初等幾何（中学での図形教材）を一題出すことになっている。

高校生となれば忘れている者が多いようであるがコンテストの他の問題は可成高度のもので難解なので，リラックスさせる為に今までも易しく解けるよう出題に工夫をしたのであるが此度は余りにも易しすぎた。

満点が6割もあるので所謂J字曲線となるテストとしては最悪の問題であったが，反面受験生の全員が全力を尽くして当ってくれ嬉しく頼もしく採点をさせてもらった。

V　問題別感想等

1．採点者は毎回必らず一枚一枚の答案用紙にコメントを書いて来た。此度も長短の別はあっても個人個人に対して示してあるので、ここに改めて書く必要もないようだが，できるだけ全体的な観点のものを挙げてみよう。

2．問1について

この問題を受験生は定理として暗記して居る者が多く，従って改めて〝証明せよ〟と出されて面喰らったであろう。それにしては殆ど全員が苦心して解答してくれた。感心した。

次に解答方法について触れてみよう。

① 円の性質利用

面白いことに札幌地区ではこれによった者が多かったが，地方では円で処理した者が少なかった。

② Mからの垂線或は平行線をひく方法では圧倒的に多かったが、中点連結の定理を忘れた為に複雑にした者が大部分であった

③ ベクトル利用

数名居たが，それぞれよく処理していた。

④ 座標利用

これは2名であったが，それぞれ苦心して居た。

⑤ 其他三角関数や線分の長さなどの計算も数名居たが之も苦心していた。

⑥ 一般に三角形の合同で処理して，図形移動のそれはほんの数名であった。

3．問2について

① IIIにも書いたように問1の結果利用で DH＝DC をすぐ決めない為の余計な手数がかかっていた。

② DからBCに垂線をひく方法。之が圧倒的に多かった。その後で中点連結の定理を使わない為の余計な複雑さを求めた者が多かった。その後，結局三角形の合同に持ち込んで行った為尚更複雑になってしまった。

この垂線がBEの垂直二等分線であることを示して DB=DE を等ひき出した者もあって仲々多彩であった。

③ 其他，ベクトル使用，ピタゴラスの定理による計算，座標使用，辺からAHに平行線をひく等々，色々な方法もあってまた殆んど皆が成功していた。図形移動を使った者が一名居たが馴れていない為か欠点が目立った。

④ 非常に気になることとして〝2点を結ぶ〟の用語使用が殆ど無く，複雑な別の表現をしていた事，この用語を何故使えないのか疑問である。

⑤ 合同とか相似を式表示しないで例えば〝△DBH と△DEC は合同である〟のような表現，之れは賛成できない。

合同，相似は対応点の順序が重要なのであるが，それを明確にするのが式表示である。この表現は式表示にすべきであろう。

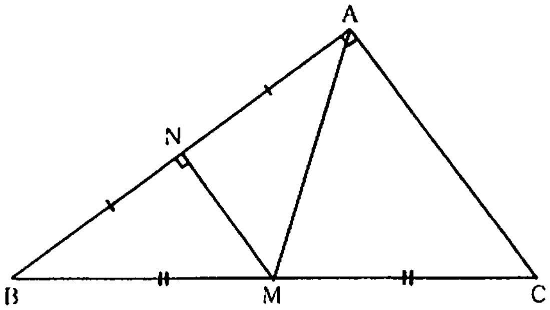
4．最後に中学での図形教材では〝図形移動〟が重要であり，更に高校ではそれが極めて有効なものであるとの所信を持ち続けている採点者であるが，此度の問題については図形移動を試み

た者が一，二名しか居なかった。図形移動使用の程でもないのかも知れないが，合同に持ち込むよりも図形移動の方が良いと考える，このことには憂慮している。

以上

解答例

問1　解答例－1



Mから AB に垂線をひき交点をNとすれば

MN//CA，BM＝MC から

AN＝NB

△ANM を MN 軸に折り返せばAはBに重なる。

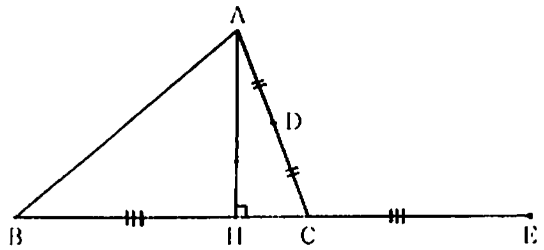
∴AM＝BM

問1　解答例－2

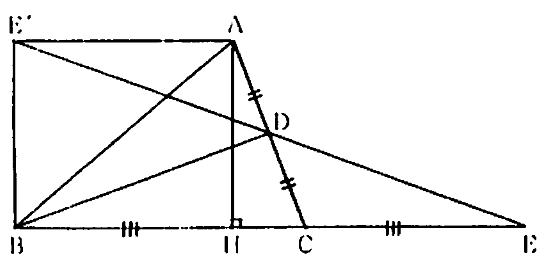
図省略Mを中心，BM を半径とする円を考えれば，BC は直径となり直径に対する円周角は直角になる。従って AM は半径になる。

i.e.　　AM＝BM

問2　(1)



問2　(2)　解答例－1



△DCE をD中心180°回転すればCはAに重なる。

Eの移った点を E' とすれば

E'A//CE ………①

E'A＝CE＝BH ………②

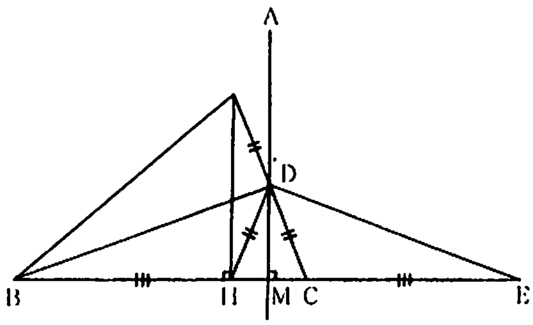
①，②から四辺形 E'BHA は平行四辺形である。

∠E'BH＝∠E'AH＝∠AHB＝90°

△E'BE で問1より

DB＝DE

問2　(2)　解答例－2



△AHC で∠AHC＝90°，AD＝DC であるから問1によって DH＝DA＝DC となる。Dを通って BC に垂線をひき BC との交点をMとする。△DBM を DM 軸に折り返せばHはCに重なる。

HM＝MC，BH＝CE からBはEに重なる。

i.e.　　DB＝DE

3

199X年，プロ野球セントラルリーグの首位打者（最高打率者）争いは終盤まで激しい競争が続いた。Tチームのオマリー選手が全試合を終わった時点で462打数168安打でトップ，それを追ってDチームのおちあい選手とSチームのふるた選手が残り一試合で最終戦に逆転をかけている。

(1)　打率は $\dfrac{(\text{安打数})}{(\text{打数})}$ で計算する。オマリー選手の打率を既約分数で表せ。

(2)　おちあい選手は残り一試合の段階で456打数164安打であった。オマリー選手をぬくためには，最終戦で何打数何安打打てばよいか。ただし，一試合に回ってくる打数は4回または5回とし，その他の可能性はないものとする。

(3)　ふるた選手の残り一試合の段階での打数を N，安打数を a とする。ふるた選手が最終戦で4打数2安打であれば，オマリー選手を逆転して首位，しかし5打数2安打では逆転で

きないものとする。この条件からN，aについての不等式を作れ。またN，aの可能な値の組を全て求めよ。ただし，$450 \leqq N < 460$とする。

講　評

まずひとつおわびと訂正をしなければなりません。

コンテスト終了後に配布された解答について何人かの人から問い合わせがありました。文章の解釈についてで詳しくは後ほど説明しますが，問題文をよく読むと指摘が正しく，(3)にもうひとつの正解があるので訂正をします。

(3)について，問題文中に「ふるた選手が最終戦で4打数2安打であればオマリー選手を逆転して首位，しかし5打数2安打であれば逆転できないものとする。」とあります。4打数2安打の場合は逆転して首位ということから等号は含みません。しかし5打数2安打であれば逆転できないということは，5打数2安打の時どうなるのかという疑問がでてきます。問題担当者は当初逆転できないのだから2位という解釈で解答を作りました。しかし逆転できないという文章からは2位のままの場合と，逆転はしていないのだから同率一位で並んでいる場合も考えられます。すなわちこちらの方は等号を含むと考えたほうが妥当です。

実は採点を始めるまではこのような解釈の違いが生ずるとは思いませんでした。しかし諸君らのうちで(3)に手をつけた人の半数以上は等号を含んだ解釈に従って問題を解いていました。担当者も問題文をじっくり検討すると等号を含んだ解釈の方が妥当だという結論に達し解答の訂正を行うことにします。

よって(3)の条件式は次のようになります。

$$\frac{a+2}{N+5} \leqq \frac{4}{11} < \frac{a+2}{N+4}$$

（解答には等号はついていませんでした）

そのためそれぞれその後の式に等号がつくため答も変わってきます。

(3)の正解は452打数164安打，455打数165安打の他に457打数166安打も条件を満たしているのでこの3つで正解です。

文章にあいまいな表現があったことをおわびします。また直接ご指摘をくださった方にはお礼を申し上げます。

さて今回の問題はプロ野球の打率をネタに分数不等式を解いてもらおうという趣向です。

昨年の夏頃オマリー選手が首位打者を独走していたころに作ったのでこのようになっているがもちろん選手はだれでもいい。実名を上げると差し障りがあるのならば，仮名にしてもいいと思ったが，そのままの方がおもしろいということでこのような形になりました。それぞれの球団のファンの人は好きな選手の名前に変えて考えてもいいです。

一般に打率は少数で表すが，電卓でもあれば計算は容易であるけれども打率の高い低いの比較にいちいち少数に直すとわずらわしい。大小比較には分数の形で比較するのがよい。とはいっても具体的な数値について，すべて通分して比較するのももっとたいへんです。よって解答のように文字と式で表すのがベストであると思います。

とはいえ，少数で計算して正解を得る人もいました。それはそれでかまわないが解答の方法もよく読んでほしいと思います。

それでは個々の問題についてみてみよう。

(1)はコンテスト史上もっともやさしい問題かもしれません。ただ約分するだけでおわりなのだから。なぜこんな問題を出したかというと，先ほど書いたように打率の計算ということで黙っていると少数に直して計算する可能性が高いかと考えて，(2)，(3)へのヒントとして出題しました。

予想通りほとんどの人が満点でした。約分途中の人，少数で出した人（よく文章を読んでほしい）が数名いただけだった。ユークリッドの互除法を使うとよいと解答には書いたが，使わなくても約分できるということでしょう。使った人はいませんでした。でも分母，分子ともに大きくなると共通因数を探すのに苦労すると思う。

例えば $\frac{2997}{8769}$ を約分するには互助法は有効です。やってみられたし。

(2)も出来は良かった。予想通りすべて少数に直して比較した人もいたが多くの人は解答のように文字を使って不等式を作っていました。いくつか別解もあったので紹介します。

少数を使った解答の例をひとつ。

オマリーの打率4／11＝0.3636を最終戦4打数の場合の最終打数460とかけると

0.3636＊460＝167.27

よって最終安打数が168以上ならばオマリーの打率を越える。よって最終戦で4打数4安打打たねばならない。5安打の場合も同じように0.3636＊461＝167.67より最終安打数が168以上ならばオマリーを越えるがそのためには最終戦で4打数以上を打たねばならない。この方法は少数は使っているがすっきりしています。

まちがいの例をひとつ。おちあいの最終戦の前の打率164分の456を約分して，

$$\frac{164+a}{456+4}=\frac{41+a}{114+4}$$

とした人がいたがこれは間違いです。

答が合っていた人の中にもとんでもない勘違いをしている人もいました。

(2)の解答の中にもいたが4打数3安打で逆転できないのなら，それ以下の打率では逆転は不可能という主張は正しいでしょうか。この問題の場合逆転できるのは4打数4安打と5打数4安打と5安打の場合だから正しそうに思えるかもしれませんが，その日のみの打率から判断する事は危険です。

今のおちあいの例で仮に最終戦で3打数2安打打った場合と5打数3安打だった場合を考えてみましょう。

3打数2安打だとこの日の打率は0.666ですが

最終打率は166／459≒0.361

5打数3安打ならこの日の打率は0.6なのに

最終打率は167／460≒0.363

この日の打率をみると3打数2安打の方が上なのに最終打率では5打数3安打の方が上にくる。分数の大小比較にはきちんと不等式を作って比較してください。

もうひとつ，ふたりの選手が同じ打率で並んでいて次の試合で同じくM打数A安打打った。ふたりの打率は同じといえるか。この問題もつい同じと答えてしまいがちです。

みなさんちょっと考えてみてください。

(3)は不等式を作るところまではかなりの人ができていました。不等式を変形してNまたは，aについての不等式を作るところまでできた人もかなりいました。

$$\frac{a+2}{N+5}\leqq\frac{4}{11}<\frac{a+2}{N+4}$$

から

$$11a+2\leqq 4N<11a+6 \qquad ①$$

あるいは，

$$4N-6<11a\leqq 4N-2 \qquad ②$$

を導いて，条件を満たすNとaを求めればよい。

一番多かったのは②に$N=450$を代入して

$1794<11a\leqq1798$

よって$163\frac{1}{11}<a\leqq163\frac{5}{11}$

この場合は条件を満たす自然数はaはない。

以下同様にして$N=451$の時，452の時と調べていくと条件を満たすaがすべて見つかる。

このやり方は手間はかかるが確実に条件を満たすaが見つかる。また$N=450$の時のaの範囲

$$163\frac{1}{11}<a\leqq163\frac{5}{11}$$

$N=451$の時，

$$163\frac{5}{11}<a\leqq163\frac{9}{11}$$

という風にaの範囲は$\frac{4}{11}$ずつずれていく。

（Nが1増えると両端が同じだけ増えるので）

このことを使うと毎回わり算をしなくてよいので手間はかからなくなる。このことを使った答案は数直線を用いたりグラフ化したりして色々な表現があって面白かった。

①からaの範囲を調べようという答案も多かったが，間違いが多かった。

①を変形して

$$\frac{11a+2}{4}\leqq N<\frac{11a+6}{4}$$

これから

$450=\frac{11a+2}{4}$などとした者がいたがそれは正しくない。

条件の$450\leqq N<460$と①は別々の不等式でありもっと詳しく言うとこの2つの不等式の共通範囲を求める（連立不等式）のであるので

450と$\frac{11a+2}{4}$を比較するのは意味がない。

逆に②からaの範囲を求めようとする人もいましたがこちらのほうは正解が多かったようです。

$450\leqq N<460$より

②の左辺に$N=450$を代入した値が最小値

②の右辺に$N=459$を代入した値が最大値

と考えると，

$$163\frac{1}{11}\leqq a<166\frac{10}{11}$$

より

$$164\leqq a<166$$

これから$a=164,\ 165,\ 166$と定まりそのそれぞれのaに対してNを調べると条件を満たすaとNが定まる。

不思議なことに筆者が解答で示した方法で解いた人はいませんでした。整数の性質を使ってaの4で割った余りで分類する方法（剰余類という）は決して特別な方法ではないと思うのですが。

(3)はヒントの部分をよく読めば，条件式までは必ず導ける筈の問題です。しかし条件式を解く段階でこんなに多種多様な方法で諸君が解いてくれるとは毎回コンテストの採点をするときの最大の喜びです。

ただひとつ気になったのは，昨年も「採点を終えて」の中にも書いたのですが，答しか書かない人がまだいたのは残念でした。ひとつの不等式を解くにもずいぶんいろんなやりかたがあります。そこを見たくて採点しているのだからどういう方法で解いた

か見える答案にしてほしいものです。

最後に印象に残るコメントをいくつか。

「おちあいは四球が多いから4打数4安打も打てないのでは」

「まさかおちあいがGチームに入ってしまうとは，事実はコンテストより奇なり」

けっこう楽しませてもらいました。

解答例

(1) $\dfrac{168}{462}=\dfrac{42\cdot4}{42\cdot11}=\dfrac{4}{11}$ …… (答)

(2) (i) 4打数k安打の場合

$\dfrac{164+k}{456+4}>\dfrac{4}{11}$ となればよいので

$11(164+k)>4\cdot460$

したがって，$11k>36$　$\therefore k=4$

[4打数4安打]

(ii) 5打数k安打の場合

$\dfrac{164+k}{456+5}>\dfrac{4}{11}$ となればよいので

$11(164+k)>4\cdot461$

したがって，$11k>40$　$\therefore k=4,\ 5$

[5打数4安打または5安打]

(答) 4打数4安打，5打数4安打，5打数5安打

(3) N，aについての不等式は（着眼点参照），

(答) $11a+2\leqq4N<11a+6$

次に，上の不等式をみたすN，aの組をもとめる。

① $a=4k$のとき

$44k+2\leqq4N<44k+6$.

よって，条件を満たすのは$4N=44k+4$.

すなわち，$N=11k+1$.

② $a=4k+1$のとき

①と同様にして，$44k+13\leqq4N<44k+17$より，$N=11k+4$.

③ $a=4k+2$のとき

$44k+24\leqq4N<44k+28$となるので，条件をみたすNはない。

④ $a=4k+3$のとき

$44k+35\leqq4N<44k+39$より，$N=11k+9$

これらの中で，$450\leqq N\leqq460$をみたすのは①，②の$k=41$の場合のみで，このとき

$(N,\ a)=(452,\ 164),\ (455,\ 165),\ (450,\ 166)$ …（答）

4

関数fは任意の実数t，x，yに対して，

$f(tx+(1-t)y)$
$=tf(x)+(1-t)f(y)$

を満たしているものとする。

$f(0)=1$，$f(1)\neq1$のとき，次の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$を$f(1)$とxで表せ。

(2) $f(f(x))$を$f(1)$とxで表せ。

(3) $f(a)=f(b)$ならば$a=b$となることを示せ。

(4) 任意の実数xに対して，

$f(f(f(x)))=f(x)$

が成り立つとき，$f(x)$をxで表せ。

講　評

配点：(1)，(2)，(3)，(4)各10点，計40点，0点の生徒が多く，出来る生徒とそうでない生徒が，ハッキリした問題でした。

答案には，論理的でないものや，説明不足のものもありました。白紙の答案も多かったのですが，まず，手を動かしてみてください。書いていくうちに，わかるということもあります。また，与えられた関数方程式の意味を考え，関数をイメージしたり，図をかいてみることも大切です。

この関数方程式は，直線を表しますが，tの範囲を“$0\leqq t\leqq1$”に制限しても直線になります。意欲のある人は，tを$0\leqq t\leqq1$として，(1)をもう一度解いてみてください。

もちろん，答えは“$f(x)=(f(1)-1)x+1$”です。

解答例

(1) $x=1$，$y=0$とすると，

$f(t)=tf(1)+(1-t)f(0)$
$=f(1)t+1-t$.　tは任意だから，

(答) $f(x)=(f(1)-1)x+1$

(2) $f(f(x))=f((f(1)-1)x+1)$
$=(f(1)-1)((f(1)-1)x+1)+1$
$=(f(1)-1)^2x+f(1)-1+1$.

(答) $f(f(x))=(f(1)-1)^2x+f(1)$

(3) $f(a)=f(b)$のとき，(1)より，

$(f(1)-1)a+1=(f(1)-1)b+1$

$(f(1)-1)(a-b)=0$.

$f(1)-1\neq 0$なので，$a-b=0$．
ゆえに，$a=b$．（証明終わり）

(4) $f(f(f(x)))=f(x)$ のとき，(3)より，
$f(f(x))=x$．
したがって，(2)の結果を使うと，
$(f(1)-1)^2x+f(1)=x$．
これはxの恒等式なので，$(f(1)-1)^2=1$ かつ$f(1)=0$．
ゆえに，$f(1)=0$． これを(1)の答えにあてはめて，

（答）$f(x)=-x+1$

5

> 正の整数m，nは，$\sqrt{n}\leqq m+\frac{1}{2}\leqq\sqrt{n+1}$を満たしている。
> $A=[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]$，$B=[\sqrt{4n+2}]$とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$[x]$は，xを越えないような整数のうち，最大のものである。例：$[2.7]=2$，$[3]=3$
> (1) $n=2$のとき，m，A，Bの値を求めよ。
> (2) $m=3$のとき，n，A，Bの値を求めよ。
> (3) nをmで表せ。
> (4) $A=B=2m+1$を示せ。

講 評

配 点
(1) 9点（各3点）
(2) 9点（各3点）
(4) 4点
(5) 18点

全体的に感じた事は，
・答案の書き方，説明・計算など不十分なものが多かった。
・白紙の答案はあまりなく，受験生のほとんどが手を出すことのできる問題であり，出題者としては大変うれしい。
・ガウス記号［ ］を理解していない受験生は少数であった。

ガウス記号を知らなかった生徒はこの機会によく理解し，おぼえてほしい。
次に，各設問で気づいた事は，

(1) $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$の近似値はよく知られているので，この値を用いてもよいが，できれば$\sqrt{2}+\sqrt{3}$は$3<\sqrt{2}+\sqrt{3}<4$を示してほしかった。解答の大部分は近似値を使っていた。
特に，$\sqrt{10}$は$3<\sqrt{10}<4$とすぐ分かることなので，$\sqrt{10}$の近似値はまったく用いる必要はない。

(2) (1)と同様に，$\sqrt{12}$，$\sqrt{13}$の近似値で解答している生徒がかなりいた。$\sqrt{12}+\sqrt{13}$は解答例のように，2乗して不等式で評価してほしかった。

(3) この設問の出来具合いも比較的良かった。
残念なのは，$m^2+m-\frac{3}{4}\leqq n\leqq m^2+m+\frac{1}{4}$で終わっている解答が大変多かった。
また予想外の解答としては，nとmの値を計算し，階差数列となっていることから求めた生徒がいた。しかし，この場合は推定であり，求めたということにはなりません。

(4) この設問が完全にできたのは，河合麦君（札幌北），高橋亮君（札幌北）の2名，多少のミスはあったがほぼ完全にできていたのは，松島毅君(札幌北)，杉田純一君（札幌北）の2名であった。
解答については，$A=2m+1$が難しかっようだ。
$2m+1\leqq\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<2m+2$を証明するために，解答例のようにそれぞれの2乗を比較していく解答が多かった。
$B=2m+1$の証明については，

$$4n+2=4(m^2+m)+2$$
$$=4m^2+4m+2$$
$$>4m^2+4m+1=(4m+1)^2$$
$$4m^2+4m+2<4m^2+8m+4$$
$$=(2m+2)^2$$

より，$B=2m+1$と解答した生徒が多く，感心した。

解答例

(1) $\sqrt{2}\leqq m+\frac{1}{2}\leqq\sqrt{3}$

$\sqrt{2}-\frac{1}{2}\leqq m\leqq\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

$\sqrt{2}-\frac{1}{2}\fallingdotseq 1.4-0.5=0.9$，

$\sqrt{3}-\frac{1}{2}\fallingdotseq 1.7-0.5=1.2$

よって，$m=1$ ……（答）
次に，$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$とおく。

$x^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$

$2<\sqrt{6}<3$より，

$5+2\times2<x^2<5+2\times3$

$9<x^2<11$

ゆえに，

$3<x<\sqrt{11}<4$

よって，$A=[\sqrt{2}+\sqrt{3}]=3$ ……（答）
$B=[\sqrt{4\times2+2}]=[\sqrt{10}]=3$ ……（答）

(2) $\sqrt{n}\leqq 3+\frac{1}{2}\leqq\sqrt{n}+1$
各辺を2乗すると，

$n \leqq \frac{49}{4} \leqq n+1$

ゆえに，$\frac{45}{4} \leqq n \leqq \frac{49}{4}$

よって，$n=12$……（答）

$\sqrt{12}+\sqrt{13}=y$ とおく。

$y^2=12+4\sqrt{39}+13=25+4\sqrt{39}$

$25+4\times 6<y^2<25+4\times 7$

$49<y^2<53$

ゆえに，$7<y<\sqrt{53}<8$

よって，$A=[\sqrt{12}+\sqrt{13}]=7$……（答）

$B=[\sqrt{4\times 12+2}]=[\sqrt{50}]=7$……（答）

(3) $\sqrt{n} \leqq m+\frac{1}{2} \leqq \sqrt{n+1}$ の各辺を２乗して，

$n \leqq m^2+m+\frac{1}{4} \leqq n+1$

ゆえに，$m^2+m-\frac{3}{4} \leqq n \leqq m^2+m+\frac{1}{4}$

よって，$n=m^2+m$……（答）

(4) $A=2m+1$ を示す。

$2m+2$，$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ いずれも正なので，それぞれの２乗を比較する。

$(2m+2)^2-(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2$

$=4m^2+8m+4-\{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\}$

$=2m^2+6m+3-2\sqrt{(m^2+m)(m^2+m+1)}$

$(\because n=m^2+m)$

$C=2m^2+6m+3$，$D=2\sqrt{(m^2+m)(m^2+m+1)}$ とおくと，

C，D いずれも正であるから，C^2，D^2 を比較すると，

$C^2-D^2=4m^4+24m^3+48m^2+36m+9$

$-4(m^4+2m^3+2m^2+m)$

$=16m^3+40m^2+32m+9>0$

したがって，$C>D$，すなわち，

$2m+2>\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ ……①

$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ と $2m+1$ それぞれの２乗を比較する。

$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2-(2m+1)^2$

$=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}-(4m^2+4m+1)$

$=2\sqrt{(m^2+m)(m^2+m+1)}-2m^2-2m$

$(\because n=m^2+m)$

$=2\sqrt{(m^2+m)(m^2+m+1)}-2\sqrt{(m^2+m)^2}$

$=2\sqrt{(m^2+m)}(\sqrt{(m^2+m+1)}-\sqrt{(m^2+m)})>0$

よって，$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>2m+1$ …………②

①，②より

$2m+1<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<2m+2$

すなわち，$A=2m+1$……（答）

$B=2m+1$ を示す。

$2m+2$ と $\sqrt{4n+2}$ それぞれの２乗を比較する。

$(2m+2)^2-(\sqrt{4n+2})^2$

$=4m^2+8m+4-(4n+2)$

$=4m^2+8m+4-4(m^2+m)-2$

$(\because n=m^2+m)$

$=4m+2>0$

よって，$2m+2>\sqrt{4n+2}$ ……③

$\sqrt{4n+2}$ と $2m+1$ それぞれの２乗を比較する。

$(\sqrt{4n+2})^2-(2m+1)^2$

$=4n-4m^2-4m+1$

$=4(m^2+m)-4m^2-4m+1$

$(\because n=m^2+m)$

$=1>0$

よって，$\sqrt{4n+2}>2m+1$ …………④

③，④より，$2m+1<\sqrt{4n+2}<2m+2$

すなわち，$B=2m+1$ …………（答）

担当委員

坂下正雄	古川政春
佐々木光憲	松本睦郎
鈴木雅博	皆川一雄
棚橋　純	湊川三竿
永渕敬二	和田文興
中居基昭	大和達也
中田保之	