第 2 回
北海道高等学校数学コンテスト

問　　題

昭和59年1月15日（日）

第一部　　　90分

第二部　　　180分

北海道高等学校数学教育会高等学校部会

第　1　部

1　(1)　$3x^2+5xy+2y^2=7$ となる整数の組（x，y）を1組求めよ。

(2)　任意の整数は $3x^2+5xy+2y^2$ の形に（x，y は整数）表わし得ることを証明せよ。

2　四辺形ＡＢＣＤがある。

辺ＢＣと対角線ＡＣを２隣辺とする平行四辺形の第４頂点をＥとする。

このとき次の各問に答えよ。

問１　題意に適する図をかけ（free hand でよい）

問２　△ＤＥＢの面積は，もとの四辺形の面積（これをＳとする）に等しいことを証明せよ。

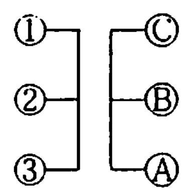
3　$a>0$，$b>0$，$c>0$ で $a^2+b^2=c^2$ のとき次の不等式を証明せよ。

(1)　$a+b>c$

(2)　$a^5+b^5<c^5$

4　平面上において右図が与えられている。

(1)　与えられた図形に交わらないで例のように①とⒶを結ぶ方法は何とおりあるか全てを図示せよ。　例：①　Ⓐ



(2)　(1)の各場合についてそれぞれの図形と交わらないように②とⒷを結んだ図形をすべて書き挙げよ。

(3)　(2)の各場合についてそれぞれの図形と交わらないように③とⒸを結ぶことができるか，もしできなければその理由を示せ。

第　2　部

1　「△ＡＢＣの辺ＢＣ上に定点Ｄがある。

直線ＡＤ上に点Ｐをとって∠BPD＝∠CPDとなるようにせよ」

上の問題について次の各問に答えよ。

問１　点Ｐを適当にみつけて図示せよ。(free hand でよい)

問２　点Ｐのみつけ方を示せ。

問３　問２の方法でみつけた点Ｐが題意に適する点であることを証明せよ。

問４　点Ｐがみつけられない（存在しない）場合はあるか。

もしあるならどのような場合か説明せよ。

2　$\sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}-1$ を解とする有理係数の（代数）方程式の中で，次数の最も低いものを求めよ。ただし最高次の係数は１であるとする。

また，そのような方程式が他にないことを示せ。

3　２次関数 $f(x)=x^2$ について

(1)　d は正の数で集合A, Bを $A=\{x \mid |x-1|<d\}$，$B=\{x \mid |f(x)-f(1)|<0.21\}$ とするとき，$A \subseteqq B$ となる d の範囲を求めよ。

(2)　任意の正の数 e に対してある正の数 d を選ぶと $|x-a|<d$ をみたすどんな x に対しても $|f(x)-f(a)|<e$ となるように d の値の範囲を a と e で表せ。（但し a は定数とする。）

4　n が自然数であるとき，$A(n)$ は整数の順をつけた組 (a, b) $(1 \leqq a \leqq n,\ 1 \leqq b \leqq n)$ のうち，a, b, n の最大公約数が１であるものの個数を表わす。

(1)　p が素数のとき $A(p)$ を求めよ。

(2)　p が素数で e が自然数のとき $A(p^e)$ を求めよ。

(3)　p, q が互いに異なる素数で e, f が自然数のとき $A(p^e q^f)$ を求めよ。

昭和58年度(昭和59年１月15日実施)

第 2 回
北海道高等学校数学コンテスト

解　答　と　解　説

北海道算数数学教育会高等学校部会

第　1　部

1

(1)　$3x^2+5xy+2y^2=7$　となる整数の組（$x\cdot y$）を１組求めよ。
(2)　任意の整数は　$3x^2+5xy+2y^2$　の形に（$x\cdot y$は整数）を表わし得ることを証明せよ。

着眼点

(1)　７は素数だから　$7=1\times7$

$3x^2-5xy+2y^2=(x+y)(3x+2y)$　より

$x+y=\pm1,\ 3x+2y=\pm7$　または

$x+y=\pm7,\ 3x+2y=\pm1$　より x，y を求める。

(2)　任意の整数 n であることより n がどんな整数でも $n=1\times n$ とおけるから

$\left.\begin{array}{l}x+y=1\\3x+2y=n\end{array}\right\}$ 又は $\left\{\begin{array}{l}x+y=n\\3x+2y=1\end{array}\right.$ とおくことにより

整数 x，y が存在することが示しうる。

解答例

(1)　$3x^2+5xy+2y^2$

$=(x+y)(3x+2y)=7$

$x+y=1$　……………①

$3x+2y=7$　…………②

とすると

②−①×２　　$x=5$

①×３−②　　$y=-4$

Ans　$(x,\ y)=(5,\ -4)$

(2)　任意の整数を n とすると

$3x^2+5xy+2y^2$

$=(x+y)(3x+2y)=n$

$3x+2y=n$　…………③

$x+y=1$　……………④

とすると

③−④×２　　$x=n-2$

④×３−③　　$y=3-n$　　ここで $n-2$，$3-n$ は整数

$n=3(n-2)^2+5(n-2)(3-n)+2(3-n)^2$

とおけるから任意の整数は

$3x^2+5xy+2y^2$　の形に表わし得る。

2

四辺形ＡＢＣＤがある。
辺ＢＣと対角線ＡＣを２隣辺とする平行四辺形の第４頂点をＥとする。
このとき次の各問に答えよ。
問１　題意に適する図をかけ。(Free hand でよい)
問２　△ＤＥＢの面積は，もとの四辺形の面積（これをＳとする）に等しいことを証明せよ。

着眼点

問１　はあまり粗雑でなければよろしい。

問２　について

(1)　“平行線による等積移動”がある。

これによって四辺形を等積三角形に変え，その三角形と△ＤＥＢとが等しくなることを，色々の平行線で移動して調べる。通常高校１年としては，これより処理の仕方はないだろう。

(2)　対角線の交角を α とでもして計算で△ＤＥＢ$=\frac{1}{2}$ＡＣ・ＢＤ$\sin\alpha$，四辺形 ABCD$=\frac{1}{2}$AC・ＢＤ$\sin\alpha$ を導いていく。

(3)　四辺形には凸，凹の２種がある。

問１　についてはどちらでも構わないが

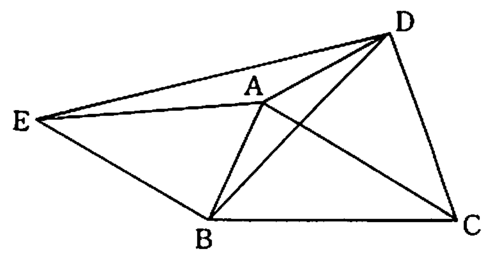
問２　については一般には和と差の違いが出てくる。

四辺形というとき普通は凸の方を考えるだろうが，これはどちらにしても構わない。自分の選んだ方で処理してよろしい。注意しておきたいのは，こんなとき特殊な形（例えば平行四辺形）を始めから設定しないで，できるだけ一般にすること。

解答例

〔凸の場合だけにしておく〕

問１



問2　(i)(等積移動による)

DからACに平行線をひき，BCの延長との交点をFとすると

DF∥ACから

△ACD＝△ACF……………①

S＝△ABC＋△ACD

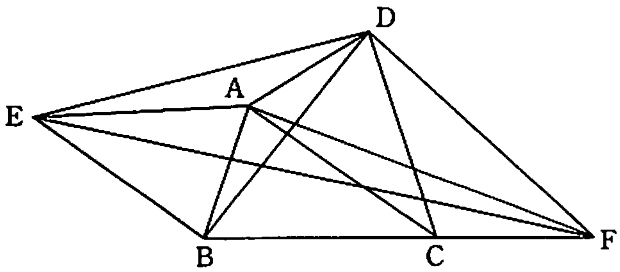
＝△ABC＋△ACF (①から)

＝△ABF……………②

△ABF＝△EBF (EA∥BC)

＝△EBD (DF∥EB)

∴　S＝四辺形ABCD＝△DEB



(ii)　(三角関数による)

ACとBDの交点をOとする。

∠BOC＝αとする，∠EBD＝αともなる。

S＝△OAB＋△OBC＋△OCD＋△ODA …………①

△OAB＝$\frac{1}{2}$OA・OB$\sin(\pi-\alpha)$

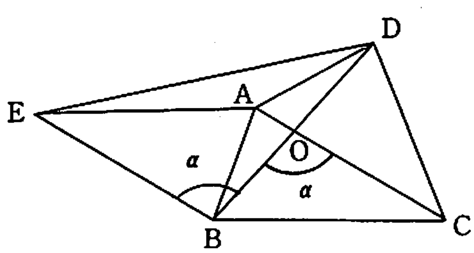
＝$\frac{1}{2}$OA・OB$\sin\alpha$

△OBC＝$\frac{1}{2}$OB・OC$\sin\alpha$

△OCD＝$\frac{1}{2}$OC・CD$\sin(\pi-\alpha)$

＝$\frac{1}{2}$OC・CD$\sin\alpha$

△ODA＝$\frac{1}{2}$OD・OA$\sin\alpha$



①に代入

S＝$\frac{1}{2}$(OA・OB＋OB・OC＋OC・OD＋OD・OA)$\sin\alpha$

＝$\frac{1}{2}${(OA＋OC)OB＋(OA＋OC)OD}・$\sin\alpha$＝$\frac{1}{2}$AC・BD$\sin\alpha$ ……………①′

△DEB＝$\frac{1}{2}$EB・BD$\sin$EBD

＝$\frac{1}{2}$AC・BD$\sin\alpha$……②

①′，②から　　S＝△DEB

3

$a>0,\ b>0,\ c>0$ で $a^2+b^2=c^2$ のとき次の不等式を証明せよ。

(1) $a+b>c$

(2) $a^5+b^5<c^5$

着眼点

(1) 条件が2次式だから両辺を2乗した $(a+b)^2>c^2$ を証明する。

(2) $a^2+b^2=c^2$ より両辺にc^3を掛けてc^5を作る。
$c^5=a^2c^3+b^2c^3>a^5+b^5$ を証明する。

解答例

証)

(1) $a^2+b^2=c^2$ より

$(a+b)^2-c^2$

$=(a+b)^2-(a^2+b^2)$

$=2ab>0$　($\because a>0,\ b>0$)

$\therefore\ (a+b)^2-c^2>0$

$(a+b+c)(a+b-c)>0$

ここで$a>0,\ b>0,\ c>0$ より

$a+b+c>0$

$\therefore\ a+b-c>0$

$\therefore\ a+b>c$

(2) $a^2+b^2=c^2$ の両辺に c^3 を掛けて

$a^2c^3+b^2c^3=c^5$

又，$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)>0$

$c>0,\ a>0$ より　$c+a>0$

よって　$c-a>0$　　$\therefore c>a>0$

同様に　$c>b>0$

$\therefore\ 0<a^3<c^3,\ 0<b^3<c^3$

$a^2a^3<a^2c^3,\ b^2b^3<b^2c^3,$

よって　$a^2a^3+b^2b^3<a^2c^3+b^2c^3$

$\therefore\ a^5+b^5<c^5$

4

平面上において右図が与えられている。

(1) 与えられた図形に交わらないで例のように①とⒶを結ぶ方法は何とおりあるか全てを図示せよ。　例：①　Ⓐ

①　Ⓒ
②　Ⓑ
③　Ⓐ

(2) (1)の各場合についてそれぞれの図形と交わらないように②とⒷを結んだ図形をすべて書き挙げよ。

(3) (2)の各場合についてそれぞれの図形と交わらないように③とⒸを結ぶことができるか，もしできなければその理由を示せ。

着眼点

(1) ①とⒶを結ぶ方法は図形の左，間，右を通る場合がある。

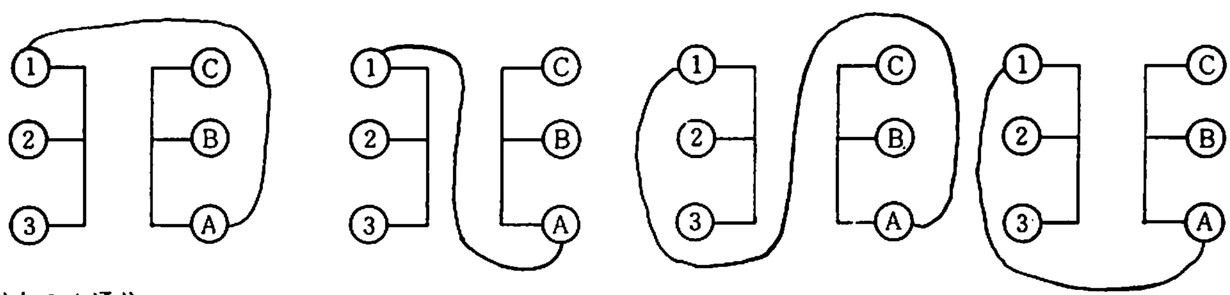
(2) (1)の各場合について②とⒷを結ぶ方法はそれぞれ２通りある。

(3) ①とⒶ，②とⒷを結ぶと①—Ⓐ—Ⓑ—②—①という一つのつながりの曲線（閉曲線）ができる。(2)はどの場合についてもこの曲線によって③とⓒは曲線の内部と外部に分かれる。

解答例

(1)

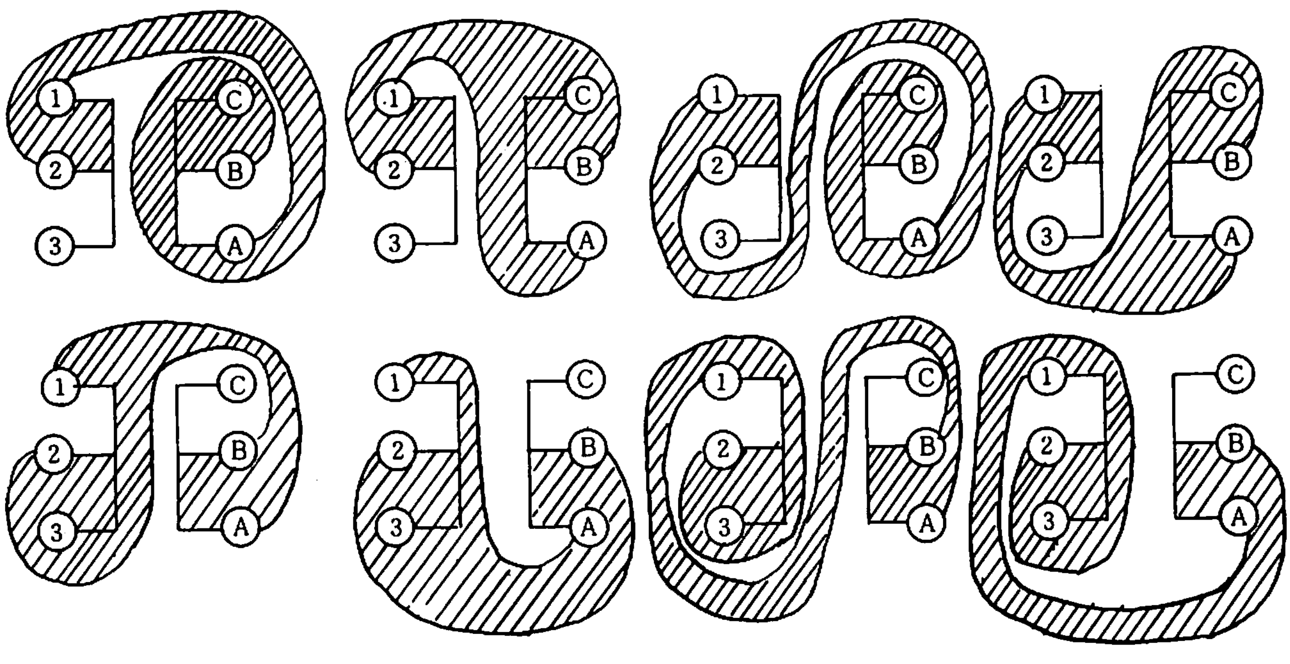
Ⅰ　　Ⅱ　　Ⅲ　　Ⅳ



以上の４通り

(2) (1)のそれぞれの場合について②とⒷをさらにつなぐと

Ⅰ　　Ⅱ　　Ⅲ　　Ⅳ



以上の８通り

(3) 上図の８通りのいずれの場合も閉曲線ができ③とⓒは内部と外部にわかれる。
よって交わらないように①とⒶ，②とⒷ，③とⓒを結ぶことはできない。

第　2　部

1

「△ＡＢＣの辺ＢＣ上に定点Ｄがある。直線ＡＤ上に点Ｐをとって∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤとなるようにせよ」

上の問題について次の各問に答えよ。

問１　点Ｐを適当にみつけて図示せよ。
(Free hand でよい)

問２　点Ｐのみつけ方を示せ。

問３　問２の方法でみつけた点Ｐが題意に適する点であることを証明せよ。

問４　点Ｐがみつけられない（存在しない）場合はあるか。もしあるならどのような場合か説明せよ。

着眼点

問１　∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤらしく見えるだけでよろしい。あまりちがいすぎては不可。

問２　Ｐがどのようにしてみつけられるべきかを筋道をつけて述べる。

Ｐが求められた　*i.e.*　∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤになったとしてＰＡは∠ＢＰＣの２等分線になる。Ｐは始めからあった点（定点）でないが，Ｂ，Ｃは定点である。そこでＢ(またはＣ)のＡＤに関する対称点を求めればこれは定点となる。これをB′とでもすると，CB′，ADは２つとも定直線となりＰはその２定直線の交点として確定する。

問３　問２の方法でみつけた図から∠ＢＰＤ＝∠CPDとなることを証明する。

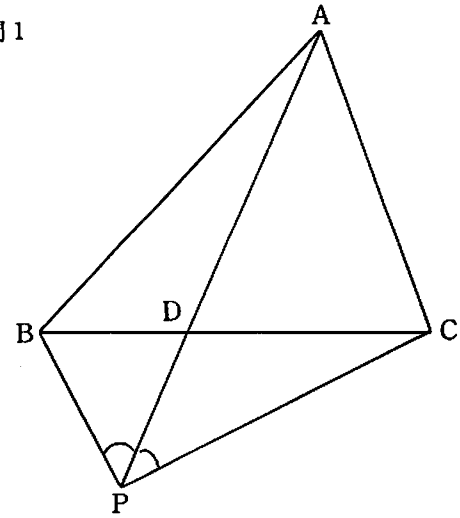
△BPB′でB，B′がＰＡについて対称点となっていることから∠ＢＰＡ＝∠ＣＰＡを導いていく。

問４　ADとCB′が交点を持たない場合
AD∥CB′を考えるとよい。

〔附記〕この問題は「　　」の中の文章だけで問題になっていて〝作図題〟という。これの解答は必らず〝解析〟〝作図〟〝証明〟〝吟味〟の４つの*step*を示さなければならないことになっている。
問１は作図，問２は解析，問３は証明，問４は吟味に対応させられる。第一に考えることは実は問２であったがここではわざと逆にした。

解答例

問１

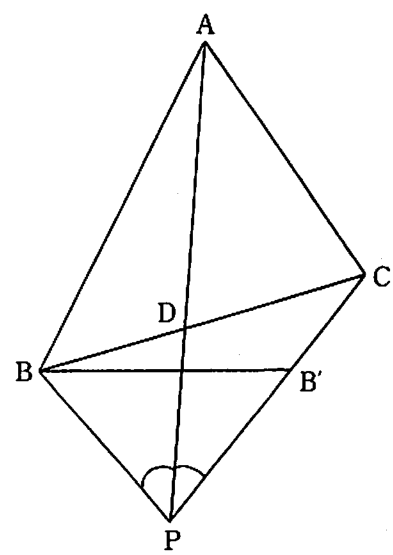


問２　問１の図で∠ＢＰＡ＝∠ＣＰＡとなっているからＡＰに関してＢの対称点をとると，この点はＰＣ上にある。

（△ＡＢＰをＡＰを軸にして折り返せば，ＢＰはＣＰに重なるからＢはＣＰ上の点に移る。）

対称点をB′とすればB′は定点となる。定直線CB′と定直線ADの交点をＰとすればＰは確定する。

〔注〕　この記述の仕方は色々ある。もちろんこの後も色々な記述があるがここでは１つの例とし講評のとき挙げる予定。



問3　直線APは△ABPと△AB'Pの対称軸になっているから

$\angle BPA=\angle B'PA$　*i.e.*　$\angle BPD=\angle CPD$

となる。

問4　問2のみつけ方からすれば

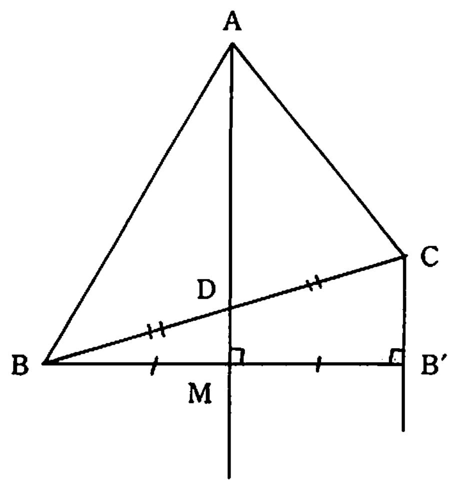
AD∥CB'となるときPは存在しない。

AD∥CB'として直線ADとBB'の交点をMとすれば

BM＝MB'，AM∥CB'から

BD＝DC　となる。

i.e. 定点Dが辺BCの中点となっている場合，所要の点Pは求められない。



〔注〕　*test*が済んだから後は野となれ山となれとブン投げる態度が1番悪い。反省する事によって学力は10倍となる（大げさかな)。また*case*を拡大することも*very important*である。

内角のうち1つが鈍角か直角ならどうか。鋭角三角形としてもDが辺BC上に色々動くとき中点の外は構わないか，更に進んでDが直線BC上(つまり辺BCの両延長上)にあるときどうなるか……等々勉強するなら確かに10倍にもなろう。

2

$\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}-1$ を解とする有理係数の(代数)方程式の中で次数の最も低いものを求めよ。ただし最高次の係数は1であるとする。またそのような方程式が他にないことを示せ。

着眼点

次数の小さい順に一つ一つチェックしていけばよい。与えられた解をもつ方程式が他にないことを示すのに，$\sqrt{2}\pm 1$ を解にもつ方程式

$x^4-6x^2+1=0$　と，導いた方程式が一致することを示す。

解答例

$\sqrt{2}\pm 1$ を解にもつから次数は2以上である。求める方程式が2次方程式のとき

$x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

で不適

三次方程式は

$(x+p)(x^2-2\sqrt{2}x+1)$

$=x^3+(p-2\sqrt{2})x^2+(1-2p\sqrt{2})x+p=0$

pは有理数でなければならないが，そのとき$p-2\sqrt{2}$は無理数となり不適

四次方程式は

$(x^2+px+q)(x^2-2\sqrt{2}x+1)$

$=x^4+(p-2\sqrt{2})x^3+(1-2p\sqrt{2}+q)x^2$

$\quad+(p-2p\sqrt{2}q)x+q=0$

qは有理数でなければならない。$p-2\sqrt{2}$が有理数より

$p=p_1+2\sqrt{2}$（p_1：有理数）とかける。

$p-2q\sqrt{2}=p_1+2(1-q)\sqrt{2}$

が有理数より　$q=1$，更に

$1+q-2p\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}(p_1+2\sqrt{2})$

$=-6-2p_1\sqrt{2}$

が有理数より　$p_1=0$　したがって　$p=2\sqrt{2}$

よって求める方程式は

$(x^2+2\sqrt{2}x+1)(x^2-2\sqrt{2}x+1)$

$=(x^2+1)^2-8x^2$

$=x^4-6x^2+1=0$ …………………（答）

をとることができる。他に$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$　が$\sqrt{2}\pm 1$を解とすれば

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d-(x^4-6x^2+1)=0$

すなわち　$ax^3+(b+6)x^2+cx+(d-1)=0$

これは $\sqrt{2}\pm1$ を解とする3次以下の方程式である。a，b，c，dは有理数であるから係数のうち1つでも0でないものがあれば

3次式以下の方程式が存在することになり矛盾する。

よって $\sqrt{2}\pm1$ を解とする有理数係数の方程式で最低次数で最高次の係数が1のものは

$x^4-6x^2+1=0$

でそれ以外にはない。

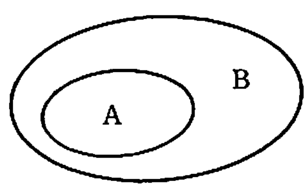
3

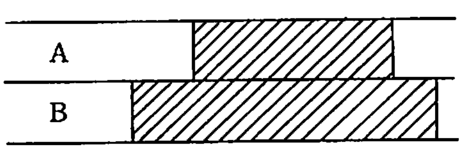
> 2次関数　$f(x)=x^2$について
> (1)　dは正の数で集合A，BをA$=\{x\,|\,|x-1|<d\}$
> B$=\{x\,|\,|f(x)-f(1)|<0.21\}$　とするとき
> A⊆Bとなるdの範囲を求めよ。
> (2)　任意の数eに対してある正の数dを選ぶと
> $|x-a|<d$をみたすどんなxに対しても
> $|f(x)-f(a)|<e$ となるようにdの値の範囲を
> aとeで表せ（但しaは定数とする）。

着眼点

(1)　絶対値記号|　| をきちんとはずすことができることが必要である。特に$a>0$ のとき，基本事項 $|x|<a \rightleftarrows -a<x<a$，$|x|>a \rightleftarrows x<-a$，$a<x$ は大切である。

(2)　集合の包含関係A⊆Bの意味を正確に把握する。ベン図，数直線を利用するのも１つの方法である。





(3)　a,e,dの関係をうまく処理し，じょうずに場合分けすることができるかがポイントである。

解答例

(1)　$|x-1|<d$　より

$-d<x-1<d$

$1-d<x<1+d$ ……………………………①

$|x^2-1|<0.21$　より

$-0.21<x^2-1<0.21$

$\therefore\ -1.1<x<-\sqrt{0.79},\ \sqrt{0.79}<x<1.1$ …②

A⊆Bより　$\sqrt{0.79}\leqq 1-d$　　$1+d\leqq 1.1$

$d\leqq 1-\sqrt{0.79}$　$d\leqq 0.1$

$1-\sqrt{0.79}>1-\sqrt{0.81}=1-0.9=0.1$

$\therefore\ d\leqq 0.1$　よって　$0<d\leqq 0.1$

(2)　$|x-a|<d$　より　$a-d<x<a+d$　……③

$|x^2-a^2|<e$　より　$a^2-e<x^2<a^2+e$

(i)　$a^2-e\geqq 0$　のとき

$-\sqrt{a^2+e}<x<-\sqrt{a^2-e}$,

$\sqrt{a^2-e}<x<\sqrt{a^2+e}$ ……………………④

㋐　$a\geqq 0$　のとき　$a+d>0$ より

$\sqrt{a^2-e}\leqq a-d$, かつ$a+d\leqq\sqrt{a^2+e}$

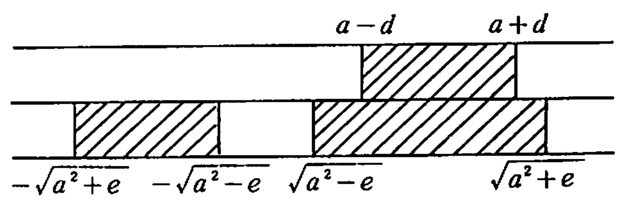
$\therefore\ d\leqq -\sqrt{a^2-e}+a$　かつ$d\leqq\sqrt{a^2+e}-a$

$-\sqrt{a^2-e}+a=\dfrac{e}{\sqrt{a^2-e}+a}$

$\sqrt{a^2+e}-a=\dfrac{e}{\sqrt{a^2+e}+a}$

$e>0$　より　$-\sqrt{a^2-e}+a>\sqrt{a^2+e}-a$

よって　$0<d\leqq\sqrt{a^2+e}-a$



㋑　$a<0$　のとき　$a-d<0$　より

$-\sqrt{a^2+e}\leqq a-d$ かつ $a+d\leqq -\sqrt{a^2-e}$

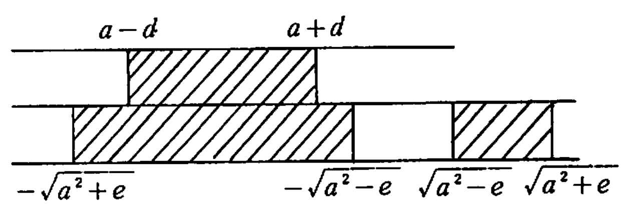
$\therefore\ d\leqq\sqrt{a^2+e}+a$ かつ $d\leqq -\sqrt{a^2-e}-a$

$\sqrt{a^2+e}+a=\dfrac{e}{\sqrt{a^2+e}-a}$

$-\sqrt{a^2-e}-a=\dfrac{e}{\sqrt{a^2-e}-a}$

$e>0$ より $\sqrt{a^2+e}+a<-\sqrt{a^2-e}-a$

よって　$0<d\leqq\sqrt{a^2+e}+a$



(ii)　$a^2-e<0$ のとき　$0\leqq x^2<\sqrt{a^2+e}$

$\therefore\ -\sqrt{a^2+e}<x<\sqrt{a^2+e}$ …………　⑥

③⑥より$-\sqrt{a^2+e}\leqq a-d$

かつ　$a+d\leqq\sqrt{a^2+e}$

$\therefore\ d\leqq\sqrt{a^2+e}+a$ かつ$d\leqq\sqrt{a^2+e}-a$

ゆえに　$a\geqq 0$ のとき $0<d\leqq\sqrt{a^2+e}-a$

　　　　$a<0$ のとき $0<d\leqq\sqrt{a^2+e}+a$

(i)(ii)より

$a^2\geqq e$, $a\geqq 0$ のとき $0<d\leqq\sqrt{a^2+e}-a$

$a^2\geqq e$, $a<0$ のとき $0<d\leqq\sqrt{a^2+e}+a$

$a^2<e$, $a\geqq 0$ のとき $0<d\leqq\sqrt{a^2+e}-a$

$a^2<e$, $a<0$ のとき $0<d\leqq\sqrt{a^2+e}+a$

以上より

$$\begin{cases} a\geqq 0 \text{ のとき} & 0<d\leqq\sqrt{a^2+e}-a \\ a<0 \text{ のとき} & 0<d\leqq\sqrt{a^2+e}+a \end{cases}\quad\text{（答）}$$

$\boxed{4}$

> nが自然数であるとき，A(n)は整数の順をつけた組 (a, b)($1\leqq a\leqq n$, $1\leqq b\leqq n$) のうち，a, b, nの最大公約数が1であるものの個数を表わす。
> (1) pが素数のときA(p)を求めよ。
> (2) pが素数でeが自然数のときA(p^e)を求めよ。
> (3) p, qが互いに異なる素数でe, fが自然数のときA(p^eq^f)を求めよ。

着眼点

(1) pは素だからaかbがpに等しくなければよい。

(2) 1からp^eまでの整数のうちpの倍数は$p^e\div p=p^{e-1}$(個)である。従ってpの倍数でない数は$p^e-p^{e-1}=p^{e-1}(p-1)$

(3) aは(i)p, qの倍数，(ii)pの倍数でqの倍数でない，(iii)pの倍数でなくてqの倍数，(iv)p, qの倍数でない，の4通りの場合が考えられるからそれぞれの場合について求める。

解答例

(1) $1\leqq a\leqq p-1$　のとき

aの個数$=p-1$

bは任意，よってbの個数$=p$

$a=p$のとき

$1\leqq b\leqq p-1$，bの個数$=p-1$

$\therefore\ \mathrm{A}(p)=(p-1)p+p-1=p^2-1$

$\therefore\ \mathrm{A}(p)=p^2-1$

(2) (i) aがpの倍数のとき　aの個数$=p^{e-1}$

bはpの倍数でなければよいから

bの個数$=p^e-p^{e-1}$

(ii) aがpの倍数でないとき

aの個数$=p^e-p^{e-1}$

bは任意にとれるから

bの個数$=p^e$

$\mathrm{A}(p^e)=p^{e-1}(p^e-p^{e-1})+(p^e-p^{e-1})p^e$

$=p^{2e}-p^{2e-2}$

$\therefore\ \mathrm{A}(p^e)=p^{2e}-p^{2e-2}=p^{2e}(1-\frac{1}{p^2})$

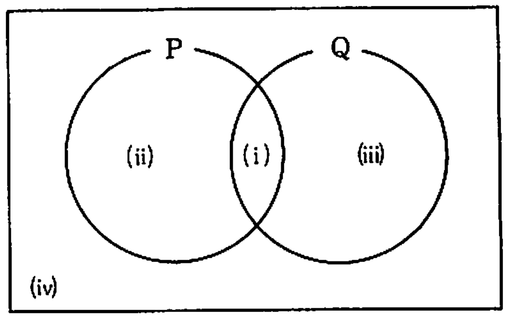
(3) (i) aがp, qで割り切れるとき

aの個数$=p^{e-1}\ q^{f-1}$

bはpでもqでも割り切れなければよいから

bの個数$=p^eq^f-p^{e-1}q^f-p^eq^{f-1}+p^{e-1}q^{f-1}$

$=(p^e-p^{e-1})(q^f-q^{f-1})$



(ii) aがpで割り切れてqで割り切れないとき

aの個数$=p^{e-1}q^f-p^{e-1}q^{f-1}$

$=p^{e-1}q^{f-1}(q-1)$

bはpで割り切れなければよいから

bの個数$=p^eq^f-p^{e-1}q^f=p^{e-1}q^f(p-1)$

(iii) aがpで割り切れなくてqで割り切れるとき

aの個数$=p^eq^{f-1}-p^{e-1}q^{f-1}$

$=p^{e-1}q^{f-1}(p-1)$

bはqで割り切れなければよいから

bの個数$=p^eq^f-p^eq^{f-1}=p^eq^{f-1}(q-1)$

(iv) aがpでもqでも割り切れないとき

aの個数$=(p^e-p^{e-1})(q^f-q^{f-1})$

このときbは任意にとれるから

bの個数$=p^eq^f$

$\therefore\ \mathrm{A}(p^eq^f)=p^{2e-2}q^{2f-2}(p-1)(q-1)$
$+p^{2e-2}q^{2f-1}(p-1)(q-1)$
$+p^{2e-1}q^{2f-2}(p-1)(q-1)$
$p^{2e-1}q^{2f-1}(p-1)(q-1)$
$=p^{2e-2}q^{2f-2}(p-1)(q-1)$
$(1+p+q+pq)$
$=p^{2e-2}q^{2f-2}(p^2-1)(q^2-1)$
$=p^{2e}(1-\frac{1}{p^2})q^{2f}(1-\frac{1}{q^2})$

第　2　回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

昭和59年1月15日(日)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第2回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長　桐　山　正　尚

今回も，第一回目と同様に道教育委員会・北海道高等学校長協会・北海道新聞社・福武書店の御理解と御支援によって終ることができました。

この「数学コンテスト」は，数学に対する興味・関心を高め，素質の向上をめざすとともに学力の向上をはかることを目的として始められました。数学は，人類歴史の発展に寄与しているものであって，順位をつけるものに利用されるものではありません。また，大学入試・模試・実力考査等には，それぞれのよさはありますが，有限の世界に閉じこめてしまいます。そこで，現在欠けている創造力・直観力・思考力を高め，見直し，発見されることが，この「数学コンテスト」と出会うことによってなされるものと期待をしております。

第一回目は，札幌周辺を対象といたしました。参加申込み校数 24 校，参加申込み人数 398 名でした。

結果につきましては，道内ばかりでなく，道外からも高い関心を示され，今後の発展を期待して激励をいただいております。例えば，兵庫教育大学教授佐々木元太郎先生は「このような試みは，ソ連等の東欧に英・西独・仏等についで米国も参加し，活発に行われて来ている。そして，それぞれの国で，学校数学向上をはかる施策をやっている。このような諸外国の趨勢を洞察して具体的に実施にうつされたこと，本当に喜ばしいことである。出題範囲をも広くされて，真に数学的な能力のある生徒の発掘をねらいとした「数学コンテスト」の試みに深く敬意を表する。」という内容の便りをいただいております。

さて，今回は全道を対象といたしましたところ，参加申込み校数 39 校，参加申込み人数 514 名になりました。形がととのったのではないかと考えております。

今後は，内容の充実に力を向ける時期であります。そのためには，各国の数学コンテスト（諸外国では，数学オリンピックと呼んでおります。）の関係者と連絡をとり，情報交換などもしたいと思っております。

終えるに当り，冒頭にも申し述べましたが，関係団体の理解とご支援を謝し，何といっても，関係大学の先生・北数教高校部会研究部の方々の奉仕的な協同活動によってなされていることに深く深く御礼申しあげます。

なお，この資料は今後の学習に役立てていただければ幸と存じます。

●成績優秀者

遠藤浩太郎	高橋素子	小山忠義	斉藤寿徳
堺義明	松崎賢司	長井真人	菅野文雄
奥村克己	佐藤竜人	川村政典	宮田克思
太田博之	白山真司	佐藤弥章	木幡英司
金山拓	高森幹雄	佐々木惣平	松本浩一郎

●特別賞

谷口実　今沢雄一郎

第2回　北海道高等学校数学コンテスト

度数分布表(1)

	I				II			
点数	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
0	114	4	85	44	6	72	144	247
1					22	1		
2			55		23	3	19	
3		9			52	26	23	
4	3	6		5	20	10	10	
5	11	12	9		69	156	23	24
6		4	5	21	15		15	1
7		15			30	2	18	
8	3	31	40	36	9	6	14	14
9		1	8	15	27	3	5	
10	5	152	132	20	5	5	13	54
11		34		17	7		4	
12	170	26	3	31	3	6	7	
13		10	3	25	1	33	15	
14				17	9		5	3
15		25	6	23	6	4	11	
16		1		31	1	2	7	
17	2		1	25	1	3	2	1
18			1	8	1	1	10	8
19				16	1	1		
20	2	8	1	9	19	5	11	
21			1	14	5		1	
22	5		1		14	1	1	1
23	1	9	5	5	10	7	1	2
24		2	1		4			
25	57	26	15	10	1	13	1	5
人数	373	373	372	372	361	360	360	360
合計	3813	4241	2674	4444	2870	2333	1960	1174
平均	10.2	11.3	7.1	11.9	7.9	6.4	5.4	3.2

度数分布表(2)

点数	I	II	点数	総点
00～96		1	200～191	1
95～91	3	1	190～181	1
90～86	3	1	180～171	1
85～81	3		170～161	
80～76	9	2	160～151	3
75～71	4		150～141	3
70～66	12	4	140～131	5
65～61	19	4	130～121	4
60～56	17	7	120～111	14
55～51	25	7	110～101	15
50～46	40	11	100～ 91	20
45～41	47	14	90～ 81	19
40～36	47	26	80～ 71	42
35～31	38	22	70～ 61	57
30～26	22	37	60～ 51	52
25～21	27	36	50～ 41	37
20～16	30	41	40～ 31	40
15～11	21	44	30～ 21	36
10～ 6	4	56	20～ 11	22
5～ 0	29	86	10～ 0	28
人数	372	351		373
合計	15172	8337		23509
平均	40.7	23.3		63.0
S.D	17.7	17.3		32.0

第 1 部

1

(1) $3x^2+5xy+2y^2=7$ となる整数の組 (x, y) を1組求めよ。 (2) 任意の整数は$3x^2+5xy+2y^2$の形に(x, yは整数)を表わし得ることを証明せよ。

答案を読んで感じることは，問題をよく読まない諸君が多いということです。まず，問題をよく読み，題意をきちんとおさえること。

(1) 「$3x^2+5xy+2y^2=7$ となる整数の組 (x, y) を1組求めよ。」

7は素数であるから，$7=1\times7$, また，左辺を因数分解すると，

$$3x^2+5xy+2y^2=(3x+2y)(x+y)$$

となるから，4組の方程式

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 3x+2y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-1 \\ 3x+2y=-7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-7 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$$

が考えられる。4組とも整数解となるので，どれを解いてもよい。1組でよいのにていねいに4組の解を求めた諸君がいます。$x=1$, $y=1$, $x=1$, $y=2$, ……と順に代入して解をみつけ出した諸君もいますが，数学の解答としてはやはりまずい。因数分解を間違い，

$$3x^2+5xy+2y^2=(x+2y)(3x+y)$$

とし，解も違った諸君がいます。因数分解は慎重に行うこと。また，与方程式をxの2次方程式とみなして解き，$x=\dfrac{-5y\pm\sqrt{y^2+84}}{6}$, 根号の中が平方数になることから，$y=0$, ±1, ±2, ……を代入し，$y=-4$, $x=5$を求めてもよい。

(2) $3x^2+5xy+2y^2=n$ (nは整数) とおき，

(1)と同時に，$\begin{cases} 3x+y=n \\ x+y=1 \end{cases}$ を解き，

$\begin{cases} x=1-2n \\ y=3n-1 \end{cases}$ を求めて，はじめの式をみたすx, yの値が整数であることを示すとよい。

$n=pq$ (p, qは整数) とおき，

$\begin{cases} 3x+2y=p \\ x+y=q \end{cases}$ を解き，$\begin{cases} x=p-2q \\ y=3q-p \end{cases}$ を求めてもよい。

(2)も問題文をよく読んでいないため，「x, yの値が整数であれば，$3x^2+5xy+2y^2$の値も整数になる。」と解釈して，x, yに整数値を代入して$3x^2+5xy+2y^2$ の値が整数であることを示している答案もあった。問題文をよく読んでもらいたい。

2

四辺形ＡＢＣＤがある。 辺ＢＣと対角線ＡＣを2隣辺とする平行四辺形の第4頂点をＥとする。 このとき次の各問に答えよ。 問1　題意に適する図をかけ (free hand でよい) 問2　△ＤＥＢの面積はもとの四辺形の面積(これをSとする)に等しいことを証明せよ。

講　評

I　**全体的に**

出題後このままでは第1部の問題としては難かしすぎると気付き，採点の段階で四辺形は凸の場合だけでよいことにした。

II　**配　点**

問1と問2の配点比を2：3にした。問1の比重が大きすぎる感があるが教科書や問題集の中で〝図のように〟と示されていることを多く見かける。その結果，文章で与えられた文意を正しく図で表現することについては，現在の高校生徒は馴れていない。これは学習上極めて重要な1つの手段なので，それを考慮したのである。

III　**問1について**

① コンパスと定規で正式に作図することを要求していないので〝free hand〟と断わり書きを添えた。ここではひどい図でなければ認めた。

② 〝四辺形〟は高一の教科書にも出ている。〝四角形〟と同意である。

③ 〝四辺形〟の文字があるから平行四辺形をかいた者も中には居たかも知れない。図をかく時に重要な注意は，できるだけ一般形にすることであり

問１としては凸か凹の一般形をかくだけでよいが問２の証明ではその場合毎の文をかかなければならない。それでⅠのようにしたのである。

④ 特別形は台形，平行四辺形，長方形，正方形の順に〝より特別〟になる。これらのどれかをかいた者には細分せず大まかに配点の半分を与えた。

⑤ 図でかかれた平行四辺形でＢＣが対角線になっている者が少数居た。これは明らかに題意をとりちがえている。高校で〝２隣辺〟の用語はあまり使わないのかも知れないが，問題文が長くなりすぎるのでこの用語を使った。それでこの図をかいた者にも３割の点を与えた。面白いことにこうしても△ＤＥＢの面積は問題文の通りにとったのと等面積になる。

Ⅳ 問２について

① 問１で特別形をかいたのにもその証明が正解に近いと認めたとき３割を与えた。

② 証明を大別すると次のようになる。

〔イ〕：ＤからＡＣ（従ってＥＢにも）に平行線をひき直線ＢＣとの交点をＦとして等積移動

〔ロ〕：ＤからＡＣ（ＥＢ）に垂線，ＢからＡＣに垂線をひいて面積計算

〔ハ〕：Ｄから直線ＢＣに垂線をひき，それと直線ＥＡとの交点をとって面積計算

〔ニ〕：ＤからＢＣに平行線をひいて面積計算

〔ホ〕：座標を使って面積計算（２名）

〔ヘ〕：ベクルトで同上（３名）

〔ト〕：三角関数で同上（１名）

③ 〔イ〕〔ロ〕〔ハ〕〔ニ〕について

〔イ〕と〔ロ〕は証明として同等であり，〔ハ〕と〔ニ〕も同等そして〔イ〕〔ロ〕と〔ハ〕〔ニ〕を比較すれば前者の方がより良い。⑤を見よ。

④ 〔ホ〕〔ヘ〕〔ト〕について

〔ホ〕 では成功，失敗とそれぞれ１名，その分かれ目は座標のとり方に依る。文字を少なくするのが良い。

〔ヘ〕 どれも失敗，この証明をベクルトでするのには無理がある。

〔ト〕 これは証明自身が楽だが高一では未習，この生徒は成功したから多分高二生であろう。

⑤ 〔ハ〕の証明の不利について

（図は省略する。次の文の通り図をかいてみよ。）

凸四辺形と限定して，Ｄから直線ＢＣに垂線をひき，その足をＨとする。

直線ＥＡと直線ＤＨの交点をＬとすれば

$S=\triangle ABD+\triangle DBC$

$\triangle DEB=\triangle DEA+\triangle AEB+\triangle ABD$

だから

$\triangle DEA+\triangle AEB=\triangle DBC$が成立すればよい。

$\triangle DEA+\triangle AEB$

$=\frac{1}{2}EA\cdot DL+\frac{1}{2}EA\cdot LH$

$=\frac{1}{2}EA(DL+LH)$

$=\frac{1}{2}EA\cdot DH=\frac{1}{2}BC\cdot DH=\triangle DEA$

見事に証明されたようであるが証明は凸四辺形であればどれにも適要されなければならない。所でＡとＢＣの距離をa，ＤとＢＣの距離をd，(共に正）としたとき証明は$a>d$，$a<d$の($a=d$は特別だから除いておくとして）どちらにも正しいか，それとも？

〔イ〕〔ロ〕ではこのようなことがなく凸ならすべてよいが凹でもぐっと楽になる。

Ⅴ 表彰者については満点を与えた者30名近くであったがⅠの理由から遠慮した。

Ⅵ 凸，凹四辺形はどう区別されるか

任意の辺を含む直線に関して，その辺の両端を除いた他の頂点が同じ側にある四辺形を凸四辺形という。

ある辺を含む直線に関してその辺の両端を除いた他の２頂点が反対側にある四辺形を凹四辺形という。

更に，凹四辺形は２つに分けられる。

１：どの対辺（ＡＢとＣＤ，ＢＣとＡＤ）も交わらない。

２：１組の対辺（例えば，ＢＣとＡＤ）が交わる。

ここは自分で図をかいて納得せよ。

Ⅶ 面積の正負

四辺形ＡＢＣＤでもＡＤＣＢでも同じ四辺形であることは高校程度で許されている。

△ＡＢＣと△ＡＣＢは同じ三角形，さて三角形では△ＡＢＣとかけばその３点を頂点とする三角形であるばかりか，その面積も同時に表わす約束になっている。だから　△ＡＢＣ＝△ＡＣＢでよい。

数学の程度が大学以上になれば無断でこうかけば

いけないことになっている。
△ABCの点の順序と△ACBの順序では点の順序が逆になっていてこのように点の順序が逆のとき面積にも正負が生じてくる。

つまり，△ACB＝－△ABCとなる。
中学校で正負の数を習った後で小学校を振り返ると，小学校では絶対値での計算であった。同時に面積について高校以下では絶対値で処理していることになる。真の面積を出すことになれば，この問題は凸四辺形と限定されないでもしかしたら，すべての場合を１つの表明文か高々２つの文で済むかも知れない。これについて後日諸君の先生を通して，その検討を見せたいと思っているので数学に興味ある者は期待していてもらいたい。

3

> $a>0$，$b>0$，$c>0$ で $a^2+b^2=c^2$ のとき次の不等式を証明せよ。
> (1) $a+b>c$
> (2) $a^5+b^5<c^5$

講　評

(1) 証明すべき不等式の両辺を２乗して
$(a+b)^2<c^2$ とし，これを変形していって $ab>0$ であるから証明終とする人が相当数いた。だいたいの感じはわかっているのだが何を証明するのかを的確に把握しなくてはいけない。このことが点数が伸びなかった原因である。また，条件より両辺正であるから，$a+b>c$ と $(a+b)^2>c^2$ は同値であることも触れなければならない。直角三角形における三平方の定理を用いて証明した人も多かったが，図をかいただけで，図より $a+b>c$ とするのでは説明が不足である。
小数であるが三角関数を用いた人もいた。

(2) (1)の影響であろうか，証明すべき不等式の両辺を２乗した $(a^5+b^5)^2>(c^5)^2$ を証明しようとした人がもっとも多かったが，

$$
\begin{aligned}
(c^5)^2&=(c^2)^5\\
&=(a^2+b^2)^5\\
&=a^{10}+5a^8b^2+10a^6b^4+10a^4b^6\\
&\quad+5a^2b^8+b^{10}
\end{aligned}
$$

の後の処理がうまく行なえないようであった。
この場合，右辺－左辺を適当に組み合せて完全平方をつくればよい。
次に多かったのが　$c^2=a^2+b^2$　より

$$
\begin{aligned}
c^5&=(c^2)^2\\
&=(a^2+b^2)^2c\\
&=(a^4+2a^2b^2+b^4)c
\end{aligned}
$$

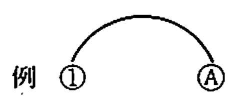
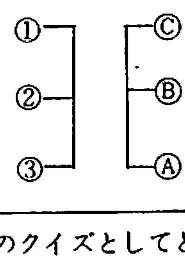
を用いた人でこの場合 c を無理に a，b で表わさないでこのまま残しておく方が簡単である。

$$
\begin{aligned}
a^2&=c^2-b^2\\
&=(c-b)(c+b)
\end{aligned}
$$

より　$c>b$，に気づけば右辺－左辺を因数分解して証明は終わる。
解答例のように　$a^2+b^2=c^2$ の両辺に c^3 をかけて　$a^2c^3+b^2c^3=c^5$ とした人はほとんどいなかった。
a，b，c の中で c が最大であるから

$a+b>c$
$a^2+b^2=c^2$
$a^3+b^3<c^3$　のように c の指数が増えていけば右辺の方が大きくなると類推した人も何人かいたが，証明されている人はほとんどいなかった。
一般に
$a^n+b^n<c^n$（n は自然数，$n\geqq 3$）が成りたつが，解答例のようにすれば これも証明できる。

4

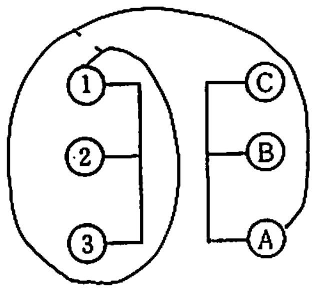
> 平面上において下図が与えられている。
> (1) 与えられた図形に交わらないで例のように①とⒶを結ぶ方法は何とおりあるかすべてを図示せよ
>
> 
>
>
> (2) (1)の各場合についてそれぞれの図形と交わらないように②とⒷを結んだ図形をすべてかきあげよ。
> (3) (2)の各場合についてそれぞれの図形と交わらないように③とⒸを結ぶことができるか，もしできなければその理由を示せ。
>
> 
>

(1)，(2)は一種のクイズとしてとらえることができるが，(3)をきちんと説明するのは，数学的にもかな

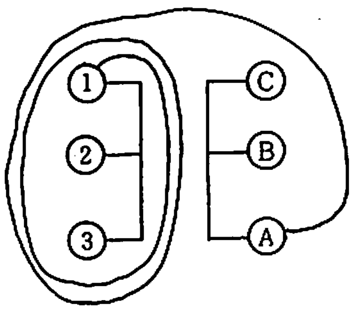
り高度なことであろう。説明力のある答案が少なかったのが残念である。

(1)は①とⒶの結び方，右まわりか左まわり，中を通る場合，通らない場合，全てを考えねばならない。中には右図のように①－②－③のまわりを一回転してⒶにいくものを考えて，４つより多い数をあげていたものものもあったが，一回転の部分を

（１回転）



（２回転）



除くと，必らず解答の４つのうちのどれかと同じになる。回転をふくめると無限に多くの場合が考えられるので，回転は除いておく。

(2)は①とⒶを結んだもの４通りについて，さらに②とⒷを結ぶのだから，まず各場合について見ていくことが大事である。ひとつに①－Ⓐについて，二通りの②－Ⓑの結び方ができる。右まわりと左まわりと考えてもよいし，③を内部にもつか外部にもつかで考えてもよい。

(3) 論理的にもっとしっかりした回答がほしい。いうべきことは四つである。

「つながった曲線①－②－Ⓑ－Ⓐ－(1)が平面上にある」「この曲線は平面を２つに分けている」「分けられた内部と外部に③とⒸがある」「曲線が平面を二つに分けているので内部と外部に分かれた③とⒸは結べない。」

「道がふさがれる」とか「通る場所がない」などの感覚的な表現が多かった。それでは証明にならないし説得力も乏しい。部分点をもらった中や，満点をもらった人の中にも不十分な解答が多かった。なおこの証明の中にある「つながった曲線(閉じた曲線)は平面を２つに分ける」というのは有名な定理で「ジョルダンの曲線定理」とよばれているが，また証明の難しいことでもしられている。一見当然のようにおもえる内容ほど論理的に解明するのは大変なのかもしれない。

点数は８点，８点，９点。満点多数だがこの問題については優秀者はなしとする。

第　２　部

1

> 「△ＡＢＣの辺ＢＣ上に定点Ｄがある。直線ＡＤ上に点Ｐをとって∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤとなるようにせよ」
>
> 上の問題について，次の各問に答えよ。
>
> 問１　点Ｐを適当にみつけて図示せよ。
> 　　(free hand でよい)
>
> 問２　点Ｐのみつけ方を示せ。
>
> 問３　問２の方法でみつけた点Ｐが題意に適する点であることを証明せよ。
>
> 問４　点Ｐがみつけられない(存在しない)場合があるか。もしあるなら，どのような場合か説明せよ。

Ⅰ　配点について

問１　数学用語の〝適当〟とは〝いい加減〟ではなく〝最もよく題意に当てはまる〟の意味。
実はこの図は問２が先行して，その結果でかかれる。ここでは∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤにみえる程度であればよいとの要請であった。

問２　この問題での最重要個所で，題意に適した点をみつけるには∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤをみたす点Ｐが，みつかったと仮定してその仮定のもとに点をさぐりあてるのである。

問３　ここは仮定でなく問２の方法でみつけた点が∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤをみたす理由を示すものだから，問２がしっかりしていれば楽に証明される。

問４　文章通りである。

以上の理由や要請によって配点は問1，問2，問3，問4，の順に1：2：1：1の比例配分をした。

II　参考としての附記

「　」で囲まれた文章だけで，実は完全な問題になっていて，約30年以前には「作図題」の名でそのまま出された。解答は4つの部分になり第1に〝所要の図形がかかれたと仮定して，図をかく手がかりを見出す

第1に〝所要の図形がかかれたと仮定して，図をかく手がかりを見出す〟

第2に〝第1の手掛りをもとにして所要の図形を正しくかく〟(コンパスと定規が必要)

第3に〝第2でかいた図形が所要のものであることを証明する〟

第4に〝所要の図形が求まらない場合について理由をあげて説明する〟

数学の専門用語では，第1を〝解析〟第2を〝作図〟第3を〝証明〟第4を〝吟味〟という。

〝解析〟は所要の図形が得られる必要条件を探り，〝証明〟は，その十分条件を示すことになる。

この問題での，問1，問2は作図，解析に当るが正確でなく，問2が作図と解析を兼ねたようになっている。

III　解答方法と配点上の考慮について

問1　多くは多分△ABCをかいてDを定めそれから∠BPD＝∠CPDにみえるような点Pを探したであろう。また，問2の方法を考えついた者が，その方法でかくのもあったが，とにかく苦労したはず。

だが，ここでも第1部[2]の問1と同様に〝特別形〟をとり上げて示してはいけない。

できるだけ一般形を要請されている。

特別形とは〝2等辺三角形〟〝正三角形〟点DをAから垂線の足とか，辺BCの中点などであるが，解答中図が特別形にみえるものについては問2を読んでから判断した。

問1参考－i

この図のうまいかき方を示しておこう。鉛筆で，△PQR,(∠Qを鈍角，辺PQ＝辺PR）をかいておく。辺QRの中点Mとする。ここまでは全員がフリーハンドできれいにかけるはず。次QはBとペンでかく。

MPのPの方への延長上に任意にAをとりペンで辺ABをかく。その次Bから線分PMと交わるように任意に直線をひきPM，PRとの交点をそれぞれD，Cとする。辺BC，辺AC，線分ADをペンでかいて他の点や線は消して，でき上り。

もちろんこれは点Pのみつけ方を知っていてもできるが，求めるものから逆にかいていく図のかき方は，数学学習上有効で必要もある。

問1参考－ii

一般の三角形のかき方（フリーハンドで）鉛筆で円をかき，中心をきめる。中心と周上の1点（下の弧）を通る半径をかき，その半径の半分からほんの少し上方に，半径と直交する弦をかきペンでBCとする。BCより中心に近く弦ABをかき，ACと結ぶ。ペンでかく。

問2　所要の点Pがみつけられたという仮定のもとにPを探るのだが忘れていけないことA，B，C，Dは定点Pは未知点，当然AB，BC，CA，ADも定直線〝与えられた図形から未知図形を見出す〟のが基本となる。これは〝方程式を解いて未知数を見出す〟計算と同じ意味をもっている。解答の中にはPを定点のように取扱っているものがある。あくまでも仮定点である。

みつけ方の代表を示そう。

① 直線ADを対称軸として

B（またはC）の対称点を求める方法

これはADを軸として線分AB（AC）を〝折り返えす〟ともいう。

ここでBの移った点をB′とすればB′は定点となる。

定直線ADと定直線CB′の交点をPとする。

② BP：PC＝BD：DCとなるように点Pをとる方法。

次の2つの命題に注目せよ。

△BPCでDが辺BC上にある。

「∠BPD＝∠CPDならば

BP：PC＝BD：DCとなる」

「BP：PC＝BD：DCならば

∠BPD＝∠CPDとなる」

2つの命題は共に正しい（真である）
前者は「ＢＰ：ＰＣ＝ＢＤ：ＤＣは
∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤとなるための必要条件である」
ことを示し，後者は「ＢＰ：ＰＣ＝ＢＤ：ＤＣは
∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤとなるための十分条件である」
ことを示している。
（命題が真である証明は各自試みよ）
つまりＢＰ：ＰＣ＝ＢＤ：ＤＣと
∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤとは同値となる。
だからこの方法は解答にならない。やはり点Ｐをその方法でみつけなければならないが，それにはアポロニウスの円という軌跡を使う。これは高校程度でも十分解るが，方法としては①より複雑になり，すすめられない。この解答に対して０点でなく２割与えた。

③　唯一１人であったが次の方法は面白い。
辺ＢＣの垂直等分線と直線ＡＤの交点を求めＥとでもしておく。
△ＢＥＣの外接円をかき，その円と直線ＡＤとの第２の交点をＰとする。

Ｅは定点，従って円も円定，それでＰは定まる。惜しいことにこの生徒問４が無く満点は与えられなかった。方法として面白いというので，より良い方法というのではない。

問３　それぞれ問２に対応して出るので省略。

問４　この問題を一時はなれて単に∠ＢＰＤとかくとき記号はどのような意味をもつているかを考えてみよう。
Ｐはこの角の頂点を示す。ＢＰでのＢとはＰを端点とする。
半直線上の任意の点を示している。
ＰＤでのＤも同様である。
角の定義は非常に難解なもので，今ここで詳述はできない。角の記号表示をもとにして考える。
そこで，問４に戻って上述のことをあてはめてみると∠ＢＰＤ，∠ＣＰＤの意味がわかる。注意しなければならないのはＢ，Ｄは定点ではない，その点のある方の半直線を示すためにたまたまそこにあった点の名をつけたにすぎない。

以上をもとにして次の説明を（自分で図をかき）読んでみること。尚以下で一々半直線とつけないＰＢとあればＰが接点，Ｂは半直線上の任意の点を示すことにする。特に直線のときは一々直接ＡＤのようにする。

①　点Ｄが点Ｂ（点Ｃでも）と一致したとき直線ＡＤ上に任意に点Ｐをとってみると∠ＣＰＤはＰＣとＰＤで作る角であるから存在するが∠ＢＰＤはＰＢとＰＤ（実はＰＢ）だからいうなれば０°となり　∠ＢＰＤ≠∠ＣＰＤ　所要のＰは存在しない。

②　点Ｄが辺ＡＢの中点で（ＡＢ≠ＡＣ）あるとき直線ＡＤに関するＢの対称点をＢ′としてＡＤとＣＢ′の交点を求めれば平行だからＰは存在しない。

③　ＡＤ⊥ＢＣ（ＡＢ≠ＡＣ）のときこれがわかりにくいのである。
②と同様Ｂ′をとってＡＤとＣＢ′の交点をみるとＤになる。Ｐ≡Ｄである。このとき∠ＢＰＤの意味を考えるにＰＢ（ＤＢ）とＰ（Ｄ）を端点とする半直線だから，任意の点をどこかにとってＱとでもしておけばＰＢ⊥ＰＱとなる。
これは∠ＣＰＤでも同様であって，
∠ＢＰＤ＝∠ＣＰＤ＝直角となりＰは存在する。
しかしこれを存在しないとしたものに対して０点とはしなかった。そこまで考えさせるのは無理で，この講評でよく知ってほしいと思ったがらである。尚ＡＢ＝ＡＣ，Ｄが辺ＢＣの中点のときは直線ＡＤ上の点はすべて条件に適する。Ｐの存在する特別に特別な場合となる。これにふれた人にも点を与えた。
アポロニウスの円とか，辺ＢＣの垂直２等分線とＡＤとの交点をとり円をかく方法で考えてみてもＰが存在する結論に致達する。まだ述べたいことが山程あるが紙面のスペース多くとりすぎたので止めて個人的興味ある人はぜひ質問してほしい。
住所は各自学校数学の先生が教えてくれる。

2

> $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}-1$ を解とする有理係数の(代数)方程式の中で次数の最も低いものを求めよ。ただし最高次の係数は1であるとする。またそのような方程式が他にないことを示せ。

講　評

この問題は，解を与えて代数方程式を求めさせるものであるが，係数が有理数であるという条件を忘れている人が多いようでした。だから2次方程式を求めておしまいとしたり，2次にないことはわかったが3次方程式がでてきたり，ちょっとした勘違いでしょう。また，2数のみを解とすると理解した人も結構おりました。

高校生の範囲では，解答例のように解くのが一般的ですが，高校では習わない（代数方程式の解の）共役を持ち出してきた人が数人おりました。宮田克思君，杉山靖君，西道力君，小林洋君，共役の言葉はないが，佐々木基君，菅野文雄君，広瀬浩一君。その他にもいますが，証明となると難しいです。そこで手短かに説明しておきましょう。

a, b, c, d を有理数とする。いま，$\alpha=a+b\sqrt{2}$，$\beta=c+d\sqrt{2}$ に対して，$\alpha'=a-b\sqrt{2}$，$\beta'=c-d\sqrt{2}$ とすると，(i) $(\alpha+\beta)'=\alpha'+\beta'$　(ii) $(\alpha\beta)'=\alpha'\beta'$ が成り立ち，(iii) $a'=a$（a は有理数）となる。この $'$ が共役である，そこで，α を解とする有理係数の代数方程式　$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$　に対し，$\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n=0$ となるので，$'$ をとると，$(\alpha')^n+a_1(\alpha')^{n-1}+\cdots+a_n=0$ となるから，方程式　$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ は，必ず α，α' を解にもつ。だからこの問題の場合，求める方程式は，x^2+2x-1 と，x^2-2x-1 を因数としてもつのである。

解答例

2数 $\sqrt{2}\pm1$ を解とするから，求める方程式は2次以上である。

もし2次方程式であれば，

$$x^2-2\sqrt{2}x+1=0$$

となり不適。もし3次方程式であったとすると，もうひとつの解をPとして，

$$(x-p)(x^2-2\sqrt{2}x+1)=0$$

展開して，

$$x^3-(p+2\sqrt{2})x^2+(2\sqrt{2}p+1)x-p=0$$

条件より，p は有理数。しかし，x^2 の係数 $p+2\sqrt{2}$ は有理数になりえないから不適。

もし4次方程式であったとすると，

$$(x^2+px+q)(x^2-2\sqrt{2}x+1)=0$$

展開して，

$$x^4+(p-2\sqrt{2})x^3+(1-2\sqrt{2}p+q)x^2+(p-2\sqrt{2}q)x+q=0$$

条件より，q は有理数。$1-2\sqrt{2}p+q$ が有理数だから，$2\sqrt{2}p$ は有理数である。$p-2\sqrt{2}=k$（有理数）だから，$2\sqrt{2}$ 倍して，$2\sqrt{2}p-8=2\sqrt{2}k$。左辺は有理数だから，$k=0$ $\therefore p=2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}-2\sqrt{2}q$ が有理数だから，$q=1$ よって，

$$x^4-6x^2+1=0 \qquad \cdots(答)$$

もし他に求める方程式があったとして，それは4次方程式だから $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ とすると，

方程式

$$(x^4+ax^3+bx^2+cx+d)-(x^4-6x^2+1)=0$$

は2数 $\sqrt{2}\pm1$ を解としてもつ，すなわち

$$ax^3+(b+6)x^2+cx+(d-1)=0$$

各係数に0でないものがあれば，前記の結果に矛盾するから，$a=0$，$b=-6$，$c=0$，$d=1$ すなわち，求める解は，唯一つで

$$x^4-6x^2+1=0$$

のみである。

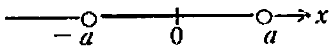
3

> 2次関数　$f(x)=x^2$ について
>
> (1)　d は正の数で集合A，Bを
>
> $A=\{x \mid |x-1|<d\}$
>
> $B=\{x \mid |f(x)-f(1)|<0.21\}$
>
> とするとき，$A \subseteqq B$ となる d の範囲を求めよ。
>
> (2)　任意の正の数 e に対してある正の数 d を選ぶと $|x-a|<d$ をみたすどんな x に対しても $|f(x)-f(a)|<e$ となるように d の値の範囲を a と e で表せ。(但し a は定数とする。)

(1)　絶対値記号| | をきちんとはずすことができていない答案が目についた。着眼点にも書いてあるが，再度確認すると

$a>0$のとき，

① $|x|<a$

数値線上で考えると，原点からの距離がaより小さいから 

$-a<x<a$

② $|x|<a$

㋐ $x\geqq 0$ のとき，$x<a$ ∴$0\leqq x<a$

㋑ $x<0$ のとき，$-x<a$ ∴$-a<x<0$

㋐または㋑より　$-a<x<a$

①，②のいずれにしても，

$|x|<a \Rightarrow -a<x<a$

となる。

なお，集合の包含関係はよく理解していた。

(2) 題意が難かしかったようである。

「任意の正の数eに対して」とは，正の数eが与えられること，すなわち，$|f(x)-f(a)|<e$となるxが先に与えられることであり，$|f(x)-f(a)|<e$となるxの範囲に，$|x-a|<d$となるxの範囲が含まれるように，正の数dの値の範囲を求めればよい。いいかえれば，

$A=\{x \mid |x-a|<d\}$

$B=\{x \mid |f(x)-f(a)|<e\}$

とおくと，まず，集合Bを求め（集合Bを固定すること），その集合Bに集合Aが含まれるように，dの値の範囲を求めればよい。

逆に，考えて，先に集合Aを求め（集合Aを固定して），集合Aが集合Bに無理矢理含まれると感違いしていた人がいました。

(3) 解答の方法は，解答例の他に，グラフを利用した方法を期待していたが，答案を見て見ると，2：1の割合で数直線を利用した方が多かった。以下にグラフを利用した解答例を載せるので，参考にしてほしい。

解答例

(1) $y=x^2$ のグラフを利用する。

集合Aより

$1-d<x<1+d$

集合Bより

$-1.1<x<-\sqrt{0.79}$

または，$\sqrt{0.79}<x<1.1$

$y=x^2$ のグラフは，$x>0$ のとき，下に凸（とつ）で，単調に増加する性質から（図1），題意を満たすには，図2より，$y=1.21$のときのxの正の値$x=1.1$ より$1+d\leqq 1.1$

∴$0<d\leqq 0.1$　　　　（答）

（注　$y=0.79$のときのxの正の値は上の性質より $1-\sqrt{0.79}>1.1-1$ となるから必要ない。

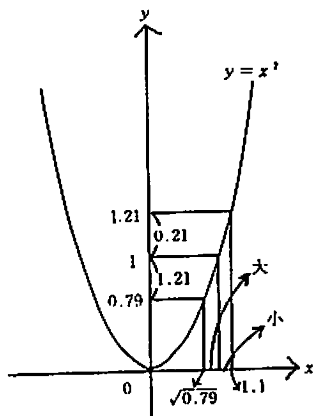


図1

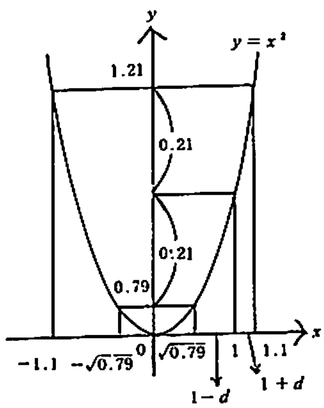


図2

(2) $|x-a|<d$より　$a-d<x<a+d$

$|f(x)-f(a)|<e$より$a^2-e<x^2<a^2+e$

① $a>0$，$a^2-e\geqq 0$ のとき

$x>0$ ならば，$y=x^2$ のグラフは，下に凸で，単調に増加する性質から，図3より

$a+d=\leqq\sqrt{a^2+e}$

∴ $0<d\leqq\sqrt{a^2+e}-a$

② $a>0$，$a^2-e<0$のとき

図4より

$a+d\leqq\sqrt{a^2+e}$

∴$0<d\leqq\sqrt{a^2+e}-a$

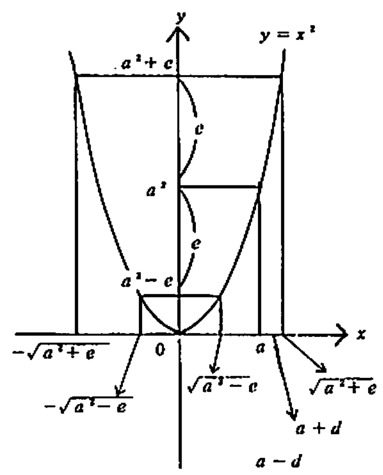


図 3

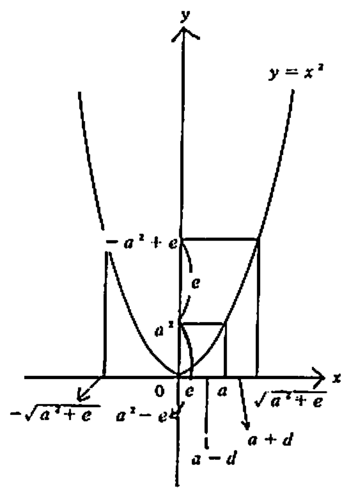


図 4

③　$a<0$，$a^2-e\geqq 0$ のとき

$x<0$ ならば，$y=x^2$ のグラフは，下に凸で，凸で，単調に減少する性質から，図5より

$-\sqrt{a^2+e}\leqq a-d$

$\therefore 0<d\leqq\sqrt{a^2+e}+a$

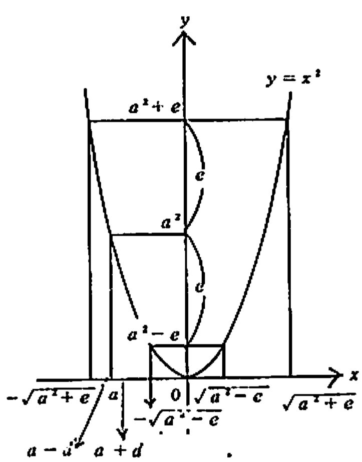


図 5

④　$a<0$，$a^2-e<0$ のときも

$0<d\leqq\sqrt{a^2+e}+a$

⑤　$a=0$ のとき，$0<d\leqq\sqrt{e}$

①，②，③，④，⑤より

$0<d\leqq\sqrt{a^2+e}-|a|$　　　　（答）

なお，別解として，やや複雑になりますが，$y=|x-a|$ のグラフと，$y=|x^2-a^2|$ のグラフを利用して解答していた人が何人かいました。

最後に，(2)の問題は，解析学における連続性の定義の $\varepsilon-\delta$ 論法（イプシロン－デルタ論法）「任意の正の実数 $\varepsilon>0$ に対して，ある正数 δ が存在して

$|x-a|<\delta$ ならば必ず $|f(x)-f(x)|<\varepsilon$

となるとき，関数 $f(x)$ は点 $x=a$ で連続であるという。」

極限lim で表すと

「$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ のとき，関数 $f(x)$ は

点 $x=a$ で連続である。」

から引用したことを付記して解説を終わります。

第2部 $\boxed{4}$ については「採点を終えて」の原稿がありませんでしたので、掲載はできません。