問題４

定義域が $4n+2$（n は整数）を除く実数である実数値関数 $f(x)$ について、$f(1)=1$, $f(4)=0$

$$f(x)+f(y)=f(x+y)\{1-f(x)f(y)\}$$

を満たす。次の問いに答えよ。

問１　$f(0)$ の値を求めよ。

問２　$f(-x)=-f(x)$ を示せ。

問３　$f(3)$ の値を求めよ。

問４　関数 $f(x)$ は、任意の実数 x に対して、ある整数 p が存在して、$f(x+p)=f(x)$ が成り立つ。この整数 p はどのような数か求めよ。

問５　$f(2003)$ の値を求めよ。

【配　点】

問１　６点　　問２　６点　　問３　８点　　問４　１４点　　問５　６点

※問２問４の証明ができなくとも問３問６の解答が正解であれば得点を与えた。

【着眼点】

$f(x)=\tan(45°\cdot x)$ をイメージして出題しました。この関数方程式は $\tan x$ の加法定理となっていることに気が付けば、解きやすいと思います。

問１〜問３は関数方程式の問題としては基本的な設問です。

問４について、$f(x+p)=f(x)$ は周期関数であることを意味しています。$f(p)=0$ と問１から問３の設問より、p は４の倍数であることが推定できますが、やはり求めるということは、数学的帰納法が必要です。問５は問１から問４より直ぐに出来る設問です。

【解答例】

$f(x)+f(y)=f(x+y)\{1-f(x)f(y)\}$ ・・・（＊）

問１　（＊）に $x=1$、$y=0$ を代入すると、$f(1)+f(0)=f(1)\{1-f(1)f(0)\}$

$f(1)=1$ より　$1+f(0)=1-f(0)$

ゆえに　$f(0)=0$

問２　（＊）に $y=-x$ を代入すると、$f(x)+f(-x)=f(0)\{1-f(x)f(-x)\}$

問１の結果より $f(0)=0$ だから、$f(x)+f(-x)=0$

ゆえに　$f(-x)=-f(x)$

問３　（＊）に $x=4$、$y=-1$ を代入すると、$f(4)+f(-1)=f(3)\{1-f(4)f(-1)\}$

ここで、問２より、$f(-1)=-f(1)=-1$、$f(4)=0$ を代入し $0-1=f(3)$

ゆえに　$f(3)=-1$

問４　（＊）に $y=p$ を代入すると $f(x)+f(p)=f(x+p)\{1-f(x)f(p)\}$

ここで、$f(x+p)=f(x)$ より、$f(x)+f(p)=f(x)\{1-f(x)f(p)\}$

$f(p)=-\{f(x)\}^2 f(p)$　したがって、$f(p)\left[\{f(x)\}^2+1\right]=0$

ゆえに　$f(p)=0$
ここで、いままでの結果より、
$\cdots$、$f(-4)=-f(4)=0$、$f(-3)=-f(3)=1$、$f(-2)=$値なし、$f(-1)=-f(1)=-1$、$f(0)=0$、$f(1)=1$、$f(2)=$値なし、$f(3)=-1$、$f(4)=0$、$\cdots$
よって、p は４の倍数と推定できる。
　ここで、数学的帰納法を用いて『$f(4n)=0$（n は自然数)』を証明する。
$n=1$のとき　$f(4)=0$ となるので成り立つ。
$n=k$ のとき、成り立つと仮定する。すなわち、$f(4k)=0$（k は自然数）
$n=k+1$のとき、$f(4(k+1))=0$ を示す。
（＊）に $x=4k$、$y=4$ を代入すると、$f(4k)+f(4)=f(4k+4)\{1-f(4k)f(4)\}$
ここで、$f(4)=0$ と $f(4k)=0$ より、$f(4k+4)=0$
ゆえに、$n=k+1$のときも成り立つ。
すべての自然数 n に対して $f(4n)=0$ が成り立つ。
問２の結果より $f(-4n)=-f(4n)=0$ となるので、整数 p は４の倍数である。

問５　$f(2003)=f(4\cdot 50+3)=f(3)=-1$

【講　評】
　関数方程式の問題を解いた経験があるかないかで大きく差がついたようです。関数方程式の問題は数学コンテストでもこれまで何度か出題している話題です。また、大学入試問題や数学オリンピックでもたびたび出題される問題です。このような問題をまだ解いたことのない生徒はこれを機会に勉強して下さい。
　出題者としては、$\sin x$、$\cos x$ ばかりではなく、$\tan x$ も出題してみたい、ということと周期関数を話題にしてみたいということから、この問題を作成しました。
　受験生の答案についてですが、経験のある生徒は問４以外の設問については楽に解答ができたように感じています。出題者として、何名の生徒が問題の関数 $f(x)$ が１次関数などの整関数とおいた受験生がいました。
　解答した中で高得点になるかどうかの分かれ道はやはり問４の出来具合でした。p が４の倍数となることを推定して終わっていた生徒が大変多かったのが目立ちました。
やはり、求めるということは証明が必要であるということが大切なところだと思います。
　最後に、採点するとき、いつも指摘していることでしたが、やはり今回も同様に、あまりにも答案の書き方が良くないということを痛感しました。
　単に式の羅列であって、どのような方針で、どのような思考で解いたのか・・・全く説明のない答案が大変多かったように思います。

（北海道千歳高校　教諭　大和達也）