第２２回北海道高等学校数学コンテストを終えて

○はじめに

高校生の理科離れ､数学離れが話題になって久しい。私が勤める高校でも理系選択者の人数は、学校全体の定員数削減もあるにしても減っています。最近では日本の大学の理系研究者のうち海外からの留学生がかなりの比率を占め、日本の科学技術レベルの維持に不安が残るという指摘もあります。そんな中、企業の中で卓越した発見、発明で会社に利益を与えた技術者、研究者にそれ相応の報酬を支払うべきであるという裁判結果も報道されています。このことによって努力の割には見返りが少ないとされてきた理系の研究職につく人たちが少しでも脚光をあびることがあればいいと思います。資源も国土も小さな日本という国が国際社会の中で生き残っていくには科学技術振興は不可欠です。全国でもＳＳＨ（スーパーサイエンスハイスクール）などの取り組みが始まっていますが、国公立大学の独立法人化などで地道な基礎研究が割りを食うといった事態が起こらないことを望みます。

○　北海道高等学校数学コンテスト

北海道高等学校数学コンテストも今年の開催で第２２回を数えました。第１回を開いた１９８３年にはまだ日本から国際数学オリンピックへの参加もなかったことを考えると隔世の感があります。主催の北海道算数数学教育会高等学校部会､後援の北海道教育委員会､札幌市教育委員会、北海道高等学校長協会、北海道新聞社、また今年から協賛に加わることになった北海道電力に加え、第一回からずっと協賛していただいているベネッセコーポレーションには、感謝の意を表したいと思います。コンテストは、全道の高校生（希望者）を対象に参加費無料で、高校１年終了程度の内容で数学の各分野から５問を出題し、３時間半で解答してもらい、特に優秀な生徒は表彰するというスタイルで行っています。ただオリンピックと違うのは高校の現役数学教員が中心となって運営していることもあり、できるだけ身近な問題、高校生の興味関心をひきそうな問題も交えていきたいと考えている点です。コンテストの過去の問題をみるとそのことが分かると思います。過去には国政選挙の当選者確定システムであるドント方式の問題やフラクタル図形の問題、和算の問題なども出題されています。現在、第１回から第２０回の数学コンテストの問題、解答と解説、成績概評と講評をまとめた冊子を編集中であり、完成したら北海道内の各高校に送付する予定です。

○　今年のコンテストについて

今年１月９日に行われたコンテストには全道で３１４名の申し込みがあり、当日は２５６名の受験者が日ごろ取り組んでいる問題とはちょっと趣向の違う数学の問題に向かいました。数学離れが言われる中、例年より多くの生徒が参加してくれたことに感謝します。また少数ですが高校３年の参加もありました。過去には中学生で参加し、表彰された人もいます。答案は出題者でもある北数教高校部会研究部の先生方によって採点され、合計点の上位２０名の優秀賞と、合計点ではリストアップされなかったがユニークな解答や発想であると採点者から認められた特別賞の生徒対象に３月６日に表彰式が行われました。

コンテストに参加した学校は以下の通りです｡（順不同）札幌啓成、札幌東、札幌南、室蘭栄、浦河、札幌手稲、北嶺中高、札幌北、札幌国際情報、旭川北、苫小牧東、小樽潮陵、釧路湖陵、千歳、函大柏稜、旭川東、北見北斗、滝川、岩見沢東、札幌西、栗山の２１校です｡（参加申込みはあったが受験者のなかった学校は除く）

○　コンテスト表彰式

３月６日に札幌南高校で行われた表彰式には、北数教会長の大久保和義氏（北海道教育大学教授)、北数教高校部会長、北海道教育委員会、ベネッセ北海道支社の代表の方に加え、大変お忙しい中東海大学教授の秋山仁氏も列席され、受賞者に励ましの言葉をかけていただきました。また、秋山先生はその後の講演の中で現在考えられているテーマをわかりやすく実験器具も用いてお話しいただき、全道から表彰式に参加した生徒諸君も熱心に聞いていました。

表彰されたのは以下の人たちです。

北海道教育委員会教育長賞

　長谷川　保拓君（北海道室蘭栄高校）

北海道新聞社賞

　佐藤　　祐希君（北海道札幌西高校）

北海道算数数学教育会長賞

　長谷川　保拓（室蘭栄高)、佐藤　祐希（札幌西高)、三浦　瞬（札幌北高)、河島　孝彦（北嶺中

高)、別宮　彰（札幌西高)、磯部　武士（札幌南高)、福居　文崇（北嶺中高)、小川　悠（札幌南高)、鈴木　正俊（札幌西高)、平木　一浩（札幌南)、中西　真輝（小樽潮陵高)、川上　潤（北見北斗高)、　西出　麻美（札幌北高)、藤田　孝紘（札幌北高)、金井　悠紀（札幌国際情報高)、高橋　諒（北見北斗高)、前田　一貴（札幌西高)、新見　佳祐（札幌北高)、辻　かおり（札幌北高)、沼田　康希（札幌南高）　敬称略

秋山　仁賞

上記２０名

志賀　浩二賞　　問題３の解答に対して

河岸　唱平君（釧路湖陵高）

〇　優秀賞生徒のコメント

「北海道教育委員会教育長賞」「秋山仁賞」の長谷川保拓君（室蘭栄２年）のコメント

数学を好きになったのは小学校高学年の頃で数学がとても論理的なところに惹かれた。第２問の「モーレーの定理」はその存在は知っていたが、証明方法は知らなかったので，とても楽しめる問題だった。数学セミナーや、フェルマーの最終定理やゲーデルの不完全性定理などの数学関係の本をよく読んでおり，将来は数学者になりたい。

「北海道新聞社賞」の佐藤祐希（札幌西２年）のコメント

自分自身では数学が好きかどうかはわからない。５問の中では，第２問のモーレーの定理の証明に最も興味を感じた。第３問では，３進法を使える問題だとは思わなかった。今後も受験者が楽しめるような問題を出題していってほしい。

「北海道算数数学教育会高校部会長賞」「秋山仁賞」の河島孝彦君（北嶺高１年）のコメント

中学の頃、自分で数学の問題を作ったりするうちに自然と数学が好きになった。数学を勉強していて，極限や無限の考え方に興味を覚えた。第５問をきっかけにガンマ関数やベータ関数についてより深く勉強したくなった。将来は医師になりたい。

「志賀浩二賞」の河岸唱平君（釧路湖陵高２年）のコメント

数学は嫌いだったが、高校入学後勉強していると何とか克服できそうになったために、一転して好きになった。学校ではあまり習わない整数問題に興味がある。第３問では３進法に気づかなかったが、原始的な方法で解けて安心した。コンテスト受験後は論理を展開する能力のなさを改めて感じ悔しかった。

前回の続いて今回も上位に入賞した三浦瞬君（札幌北２年）のコメント

数学は，問題を解くこと自体がパズルを解くようで楽しい。また，その中で，エレガントな解法を見つけられるととても嬉しい。特に好きな分野は整数。将来は，理系大学に進み，環境問題に取り組みたい。

〇　問題作成者より

問題１　二辺と一角の条件になっているので、余弦定理に気がついた受験生は多かった。また（３）では問題文中にcos２８°があるのでn=１２であると気がついても、n≧１３ではだめであるという説明がきちんとしていない答案が非常に多かった。受験生自身は理解していると思っても、採点者からみると説明不足であることが多いように感じた。

北海道千歳高等学校教諭　　大和　達也

問題２　平面幾何の世界で有名なモーレーの定理を作図を交えて楽しんでもらいたいと思って出題した。（１）から（４）までは大変出来もよかった。さすがに（５）は難しく完全な答案はなかったが、（５）の結果を用いて（６）を解いていた人もいたので、証明の流れは理解してもらえたのではないかと思う。

北海道札幌新川高等学校教諭　佐々木光憲

問題３　17 世紀前半の数学者バシェーが考案した問題に「ある商人が４０ポンドの宝石を持っていましたが，あるときそれを落とし，４つに割ってしまいました。割れた宝石片はどれも整数ポンドで、それを天秤の分銅代わりに使うと１ポンドから40 ポンドまでの重さをすべて量れました。さてこの宝石はどのように割れたでしょうか」という問題があります。この第3問もバシェーの問題同様，３進法が解くカギになります。　　北海道札幌白石高等学校教諭　平間　順宏

問題４　確率の問題では全事象を速く、正確に、もれなく表現することが求められます。一般に私たちは、目の前のことは時間をかけて論議するけれども、見えない部分は知らん顔という状況に陥りがちです。数学はそのような隠された部分を解き明かすという面白味があるように思います。今回うまく解けなかった諸君も決して落胆することなく、学習を続け、力を付けていくことを願っています。

北海道札幌東陵高等学校教諭　前田　勝利

問題５　大学で学ぶβ（ベータ）関数に関連した問題です。（３）以降では数列で学ぶ「数学的帰納法」の考え方を使います。一般の関数ｆ（ｘ、ｙ）についても出題したかったが極限の考え方を使わねばならないため断念しました。

北海道札幌平岸高等学校教諭　古川　政春

○　第２２回北海道高等学校数学コンテスト問題

問題１

半径 1 の円C、C_1、C_2、・・・、C_n がある．いま，円C に外接するようにn個の円C_1、C_2、C_3…C_nを左回りに順に重なるように描いていく．ただし，各円C_k (k=1、2、3…、n)は，互いに他の円の中心を含まないように，かつ，互いに中心を通過しないように描いていく．次の問いに答えよ．

(1)　円C の中心O，円C_k の中心をP_k とし，$\angle P_kOP_{k+1}=\theta_k$とするとき，　P_kP_{k+1} の　長さをθ_kで表せ.

(2)　$\cos(\theta_k)$ の値の範囲を求めよ.

(3)　nの最大値を求めよ．必要ならば,

$\cos(28°)>0.88$ を用いてよい.

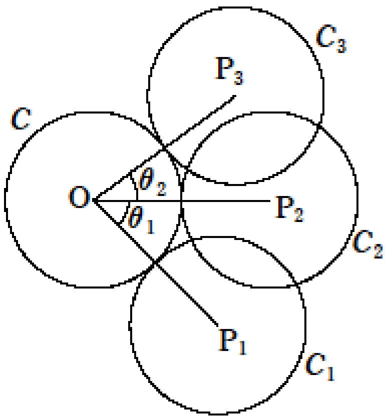

図　　問題１

第２問

「△ABC のそれぞれの内角の３等分線の交点のうち，辺に近い３点を結んでできる三角形は正三角形である（モーレーの定理)」この定理は，どのような三角形についても成立すること，様々な証明方法が可能なことでもよく知られています．ただし，一般の角について定規とコンパスだけを用いて角の三等分線を作図することは不可能であるので，図を描くにも工夫が必要です．次のように答案用紙に作図しながら，この定理の証明をしなさい.

(1)答案用紙の△BCG について，∠B、∠C の２等分線を定規とコンパスを用いて作図し，２等分線の交点 D を答案用紙の図に描きなさい.

(2)線分 GD は∠G の２等分線であることを証明しなさい.

(3)線分 BG、CG に関して点 D と対称な点をそれぞれ M，N とするとき，M，N を作図せよ．また，直線 BM と直線 CN の交点 A も作図せよ.

(4)線分 BG 上に点Ｅを，線分 CG 上に点Ｆをとって，∠EDG=∠FDG=30°となるようにするとき，△DEF は正三角形になることを証明しなさい.

(5)５つの点 A，M，N，E，F は同一円周上にあることを証明しなさい.

(6)以上のことを利用して，モーレーの定理が成り立つことを証明しなさい.

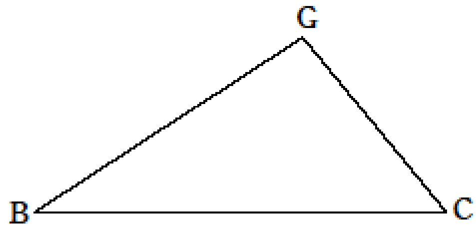

図　　問題２

第３問

負でない整数からなる集合A={a_1, a_2, a_3,…, a_n} を考える．ただし，$0\leqq a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$ であるとする.

(1) A={a_1, a_2, a_3}について,

$0\leqq a_1<a_2<a_3\leqq 8$ かつ $2a_2=a_1+a_3$ が成り立っている.

Aの要素の１つa_iが 4 であるとき，Aはどんな集合か．すべて求めよ.（解答は結果のみ示せばよい）

(2) A={a_1, a_2,…, a_6} において，$a_6\leqq 10$ であるとき，A から３つの要素a_i，a_j，a_kをどのように選んでも，$2a_j=a_i+a_k$ が成り立たないという. そのような A を１つ答えよ.（解答は結果のみ示せばよい）

(3) A={a_1, a_2,……, a_n} は，$n\geqq 9$ かつ$a_n\leqq 18$ を満たし，Aから３つの要素a_i，a_j，a_k をどのように選んでも，$2a_j=a_i+a_k$が成り立たないようにする．このような集合Aは存在しないことを示せ.

(4)　A={a_1, a_2,……, a_n} において，a_n=2004 である．集合Aから３つの要素a_i，a_j，a_k をどのように選んでも，$2a_j=a_i+a_k$ が成り立たないようにするとき，集合Aの要素の個数nすなわち n (A)の最大値を求めよ.（ヒント：$2a_j=a_i+a_k$が成り立たないときの集合 Aの要素を 10 進法以外の表し方で表してみよう）

第４問

Ａ，Ｂ２つの袋があり，Ａの袋には赤球３個，白球３個の計６個，Ｂの袋には赤球３個，白球５個の計８個が入っている．いま，次の試行の順で実行する，

試行１：Ａの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出し，Ｂの袋の中に入れる．

試行２：Ｂの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出し，Ａの袋の中に入れる．

試行３：Ａの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出す．

以下の問いに答えよ．

(1)　試行１において，取り出された２個の球が赤球１個，白球１個となる確率を求めよ．

(2)　試行１のあと，試行２において取り出された２個の球が，赤球１個，白球１個となる　確率を求めよ．

(3)　試行１および試行２のあと，試行３において取り出された２個の球が，赤球１個，白　球１個となる確率を求めよ．

(4)　試行１および試行２のあと，試行３において取り出された２個の球における赤球の個数の期待値を求めよ．

第５問

正の実数 x，y について定義された関数 f (x、y)が，次の性質を満たしている．

（性質１）f (1、1) =1

（性質２）f (y, x)=f (x, y)

（性質３）f (x+1, y)=(x/(x+y)) f (x, y)

以下の問いに答えよ

(1)　 f (2, 1) の値を求めよ．

(2)　 f (3, 2) の値を求めよ．

(3)　自然数 m に対して，　f (m, 1)=1/m であることを示せ．

(4)　自然数 m，　n に対して，

f (m, n)= (m－1)！・ (n-1)！ / (m+n-1)！であることを示せ．

ただし，　k！=1・2・3・…・k、 0！=1 とする．

(5)　(3)の事実から，正の実数 x に対して，f (x, 1)=1/x と定めることとする．

そのとき，自然数 n に対して、

f（x, n）= (n－1)！ / (x＋n－1) (x+n－2)…（x+1) x

であることを示せ．

尚、数学コンテストの解答例は北海道算数数学教育会高等学校部会研究部ホームページ「数学のいずみ」

http：//www.nikonet.or.jp/spring/index.html

をご覧ください。

〇　まとめ

数学コンテストが始まって２２回，現在コンテストの事務局をやっている平間先生は高校２年の時に第５回の優秀賞を受賞しています。数学コンテストを通じて数学に興味をもち，将来数学科を目指す人が出てくれればこれ以上の喜びはありません。メンバーは入れ替わりながらも北海道各地で数学を好きな先生たちが，少しでも生徒たちに数学を好きになってもらうためにボランティアで行っているのが北海道高等学校数学コンテストです。来年はさらに多くの生徒諸君にコンテストに参加してもらうことを望みます。

北数教高等学校研究部代数解析研究会
北海道高等学校数学コンテスト事務局
札幌新川高校　　佐々木　光憲
札幌東陵高校　　前田　　勝利
札幌白石高校　　平間　　順宏