第１問

△ABCにおいて，AB＝4，BC＝3，∠ABC＝90°である．

⑴　辺ACの長さを求めよ．

⑵　△ABCに内接する円の半径を求めよ．

⑶　△ABCの内部に点Dがあり，Dから辺AB，BC，CAに垂線をおろし，その交点をそれぞれE，F，Gとする．

　①　解答用紙の△ABC（図１）を用いて点Dを適当な位置に記し，さらに，E，F，Gを書き足せ．

　②　DE＝2，DF＝1であるとき，DGの長さを求めよ．

⑷　△ABCの外部に，辺ACについて点Bと反対側に点Hがあり，Hから辺AB，BC，CAに垂線をおろし，その交点をそれぞれI，J，Kとする．

　①　解答用紙の△ABC（図２）を用いて点Hを適当な位置に記し，さらに，I，J，Kを書き足せ．

　②　HI＝2，HJ＝3であるとき，HKの長さを求めよ．

⑸　△ABCの内部に点Lがあり，直線ALと辺BCの交点をM，直線BLと辺ACの交点をN，直線CLと辺ABの交点をOとする．

　AL＝a，LM＝b，BL＝c，LN＝d，CL＝eとするとき，LOの長さを，a，b，c，d，eを用いて表せ．

第１問

着眼点

三角形の内接円の半径を求めるときには，面積を利用する方法がよく用いられます．△ABCにおいて，３辺の長さをa，b，c，面積をS，内接円の半径をrとすると，

【公式】　$S=\dfrac{(a+b+c)r}{2}$

が成り立ちます．これは，△ABCの内接円の中心をＩとすると，面積について

△ABC＝△IAB＋△IBC＋△ICA

が成り立つことを利用したものです．このことを用いれば，⑶⑷は解けます．

⑸は一見「チェバの定理」を用いるかのように思えますが，これも面積を利用して解きます．解答例にあるとおり，△ABCの形状や面積によらず

$$\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{AM}}+\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{BN}}+\frac{\mathrm{LO}}{\mathrm{CO}}=1$$

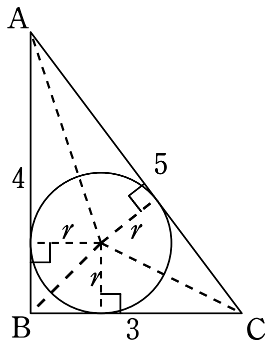
が成り立ちます．

解答例

⑴　三平方の定理より　$\mathrm{AC}^2=3^2+4^2$　　よって，AC＝5

⑵　△ABCの面積をSとすれば

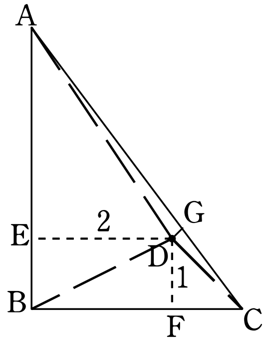
$S=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6$



内接円の半径を r とすれば

$6=\dfrac{1}{2}(4+3+5)r$　　よって，$r=1$

(3)①図のとおり



②三角形の面積について

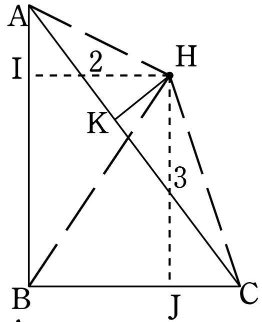
$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ADB}+\triangle\mathrm{BDC}+\triangle\mathrm{CDA}$

であるから

$6=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2+\dfrac{1}{2}\times 3\times 1+\dfrac{1}{2}\times 5\times \mathrm{DG}$

よって，$\mathrm{DG}=\dfrac{1}{5}$

(4)①図のとおり



②三角形の面積について

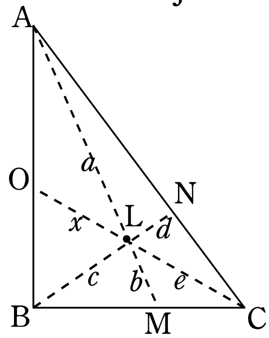
$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{AHB}+\triangle\mathrm{BHC}-\triangle\mathrm{CHA}$

であるから，

$6=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2+\dfrac{1}{2}\times 3\times 3-\dfrac{1}{2}\times 5\times \mathrm{HK}$

よって，$\mathrm{HK}=1$

(5)　$\mathrm{LO}=x$ とおくと，$\triangle\mathrm{ABC}=6$ であるから，



$\triangle\mathrm{LBC}=\dfrac{b}{a+b}\times 6$，$\triangle\mathrm{LCA}=\dfrac{d}{c+d}\times 6$，

$\triangle\mathrm{LAB}=\dfrac{x}{e+x}\times 6$

これらをたしあわせると，

$\triangle\mathrm{LBC}+\triangle\mathrm{LCA}+\triangle\mathrm{LAB}=\triangle\mathrm{ABC}=6$ であるから，

$$\frac{b}{a+b}+\frac{d}{c+d}+\frac{x}{e+x}=1$$

$$\frac{x}{e+x}=1-\frac{b}{a+b}-\frac{d}{c+d}=\frac{(a+b)(c+d)-b(c+d)-d(a+b)}{(a+b)(c+d)}$$

$$\frac{x}{e+x}=\frac{ac-bd}{ac+ad+bc+bd}$$

$$(ac+ad+bc+bd)x=(ac-bd)(e+x)$$

$$(ac+ad+bc+bd)x=(ac-bd)e+(ac-bd)x$$

$$(ad+bc+2bd)x=(ac-bd)e$$

よって，$\mathrm{LO}=x=\dfrac{(ac-bd)e}{ad+bc+2bd}$