

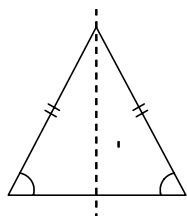
第1問

着眼点

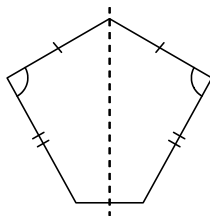
普段から図形の対称性による美しさ感動しているような人には易しかったかもしれない。子どもの頃の純真な気持ちで考えてみよう。

解答例

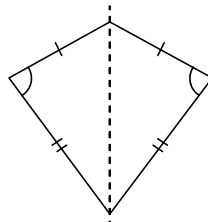
(1) 二等辺三角形



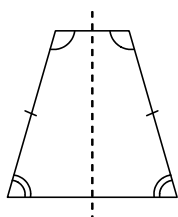
(2)



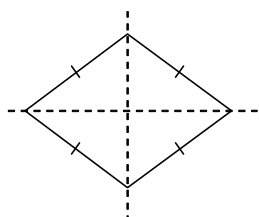
(3)(A) たこ型



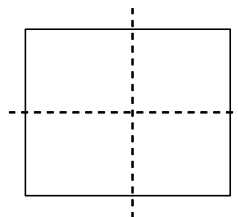
(3)(B) 等脚台形



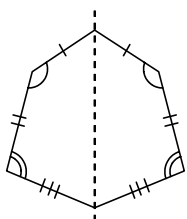
(4)(A) ひし形



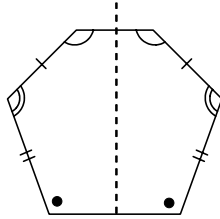
(4)(B) 長方形



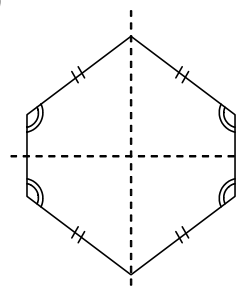
(5)(A)



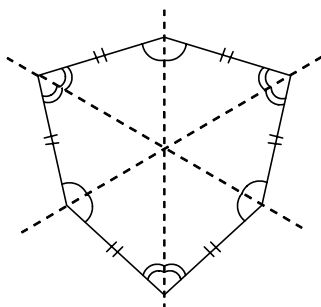
(5)(B)



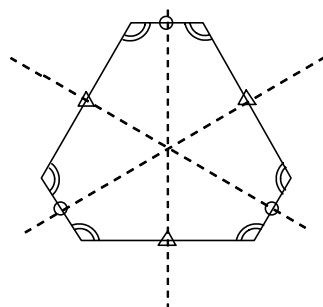
(6)



(7)(A)



(7)(B)



辺の長さは6辺とも等しい

$$\angle + \angle = 120^\circ$$

$$\angle, \angle \neq 60^\circ$$

内角はすべて等しく, 120°

講評

図形に回転移動や対称移動のような変換を施してもその図形が元の図形と一致する性質をシンメトリー (symmetry) といいます。このような変換の全体はその図形の**変換群**と呼ばれており、現代代数学の**群**と呼ばれるものの典型例となっています。

この問題は、北海道算数数学教育会（北数教）会長で北海道教育大学札幌校教授の大久保和義先生に教えていただいたものです。思わず解いてみたいと思える、たのしそうな問題ですが、実際に考えてみると結構奥が深い問題だとも思います。皆さん熱心に考えてくれたので、満点が27人もいました。（満点だった中学生もいます）

出題者は、凸な図形の解答が多いだろうと予想していましたが、凹な図形を考えてくれた人も意外に多く、バラエティーに富んだ解答で楽しく採点ができました。

この問題だけではなく、例えば

(4)の問題で、対称軸の1本が(A)、他の1本が(B)となるもの

(6)の問題で、2本とも(A)または2本とも(B)となるもの

(7)の問題で、1本が(A)、他の2本が(B)となるもの

などの例はあるでしょうか。また、一般の n 角形ではどうか考えてみるのも面白いでしょう。

また、この問題で扱った対称軸の本数をよく見てみると

3角形……1本, 3本

4角形……1本, 2本, 3本

5角形……1本, 5本

6角形……1本, 2本, 3本, 6本

となっています。 $3 \leq n \leq 6$ のとき、 n 角形には対称軸が(n の約数)本あるようです。

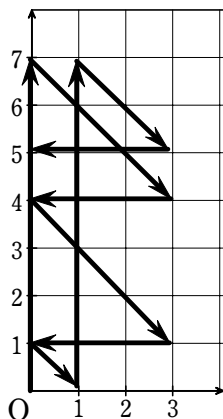
一般の n についても、このようなことがいえるでしょうか。考えてみませんか。

(札幌静修高等学校 教諭 杉本幸司)

第 2 問

着眼点

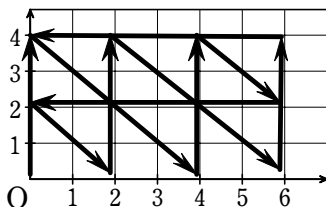
日本の和算家である吉田光由（1598～1672）は、『塵劫記』という大衆向けの楽しい数学書を著して、数学を普及させるのに大いに貢献しました。その中に「油分け算」として、「1斗桶に油が1斗（1斗＝10升）あるのを7升ますと3升ますを使って、5升ずつに分けるにはどうするか」という問題があります。今回の解答では、2通りの方法を見つけるため、不定方程式から解きましたが、図のような解法も考えられます。



縦軸を7升ます，横軸を3升ます内の油の量とする。
 原点からはじめる。
 7升ますでくみ出す。
 3升ますに移す。
 3升ますがいっぱいになったら桶に戻す。
 5升になったら終了。
 この図の場合9回の移動で5升ずつ分けられた。
 3升ますからくみ出す方法もある。

この作業をさらに続けると，右の図のように縦軸，横軸のすべての点を通過する。よって，この問題では1升きざみに2つのますの合計である1斗（10升）までをはかり出すことができることがわかる。このことは，2つのますの容量が互いに素であるためである。

「 A と B が互いに素である自然数のとき，
 $mA - nB = 1$ となる整数 m, n が存在する」



(2)

手順															
16ℓ	9	9	2	2	11	11	4	4	13	13	6	6	15	15	8
9ℓ	0	7	7	9	0	5	5	9	0	3	3	9	0	1	1
7ℓ	7	0	7	5	5	0	7	3	3	0	7	1	1	0	7

手順															
16ℓ	7	7	14	14	5	5	12	12	3	3	10	10	1	1	8
9ℓ	9	2	2	0	9	4	4	0	9	6	6	0	9	8	8
7ℓ	0	7	0	2	2	7	0	4	4	7	0	6	6	7	0

- (3) 5ℓ 容器で x 回, 3ℓ 容器で y 回くみ出すとすると (x, y は整数),
 $5x + 3y = 4$ より, $3(x + y) = 4 - 2x$
 $4 - 2x$ は 3 の倍数なので, $4 - 2x = 3n$ (n は整数) とすると,
 $x = \frac{4 - 3n}{2}$, $y = \frac{5n - 4}{2}$ より, $|x| + |y|$ が最小となるのは,
 $(x, y) = (-1, 3), (2, -2)$ であるので, $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ の方法がとれる。
 また, 次に $|x| + |y|$ が最小となるのは, $(x, y) = (-4, 8), (5, -7)$ なので,
 3ℓ 容器で 8 回くみ出し, 5ℓ 容器で 4 回戻す。
 5ℓ 容器で 5 回くみ出し, 3ℓ 容器で 7 回戻す。
- (4) 11ℓ 容器で x 回, 6ℓ 容器で y 回くみ出すとすると (x, y は整数),
 $11x + 6y = 8$ より, $6(x + y) = 8 - 5x$
 $8 - 5x$ は 6 の倍数なので, $8 - 5x = 6n$ (n は整数) とすると,
 $x = \frac{8 - 6n}{5}$, $y = \frac{11n - 8}{5}$ より, $|x| + |y|$ が最小となるのは, $(x, y) = (-2, 5)$ であるので, 6ℓ 容器で 5 回くみ出し, 11ℓ 容器で 2 回戻す。
- (5) 27ℓ 容器で x 回, 12ℓ 容器で y 回くみ出すとすると (x, y は整数),
 $27x + 12y = 21$ より, $12(x + y) = 21 - 15x$
 $21 - 15x$ は 12 の倍数なので, $21 - 15x = 12n$ (n は整数) とすると,
 $x = \frac{7 - 4n}{5}$, $y = \frac{9n - 7}{5}$ より, $|x| + |y|$ が最小となるのは, $(x, y) = (-1, 4)$ であるので, 12ℓ 容器で 4 回くみ出し, 27ℓ 容器で 1 回戻す。

配点 (1)各 4 点 (2)各 4 点 (3)説明 4 点, 方法各 5 点 (4)5 点 (5)5 点

講評

平均点は 25.8 点とよくできていました。全問正解者も多数いました。ただ, 表に書き込む問題で最後まで記入しなかった人や, 手順を途中でとばしてしまった人たちも多く, 理解できていたのに問題文のようにならず, 正解にはできないような解答があったのは残念でした。この問題を解くにあたっては, くみ出し専用の容器と壺に戻す専用の容器に分けて考えればよいのですが, 多くの人が解答例のように不定方程式をたてて解いていましたが解答例の解き方は少数で, 実際にあてはまる数で考えているものが多くありました。

その中で気になった点をあげますと、

例えば(3)の場合、 $< A > 5 \ell$ 容器で x 回くみ出し 3ℓ 容器で y 回戻す場合と、その逆に $< B > 3 \ell$ 容器で x 回くみ出し 5ℓ 容器で y 回戻す場合に分け、それぞれの式を $5x - 3y = 4$, $3x - 5y = 4$ とおき、それぞれの式を満たす x, y の値を求めている人が多かったのですが、この設定では x, y は自然数になります。解答の中には負の整数になっているものがありました。 $< A >$ と $< B >$ を逆にしていることにはなりますが、くみ出すことと戻すことが正負の関係であることに気がつかず、容器の容量と取り違えている解答があったのは残念です。また、 $|5x - 3y| = 4$ と式をたてた人の中にも同様の解答がありました。この場合は解答のように $5x + 3y = 4$ とおき、正の場合は「くみ出し」で負の場合は「戻す」であると統一した方が、解きやすくなると思われます。

(4), (5)も同様ですが、この2問は最短になる手順が1通りしかないので2通りの式で考えるよりもよいと思われます。前の問題と同じように2つの答えがかかっているものがありました。また、方程式を満たしていても戻してくみ出すことはできません。

(北海道札幌琴似工業高等学校 教諭 中居基昭)

第3問

着眼点

等幅曲線（定幅曲線）とは、曲線で囲まれた図形で、平行線で挟んだときの間隔が一定である（その幅を計ったとき、どこで計っても等しい幅になる）図形です。円が、最も簡単な図形ですが、この等幅曲線については、19世紀のドイツの時計技師であったフランツ＝ロレックスによって初めて本格的に研究がなされました。ロレックスは、時計製作の過程で、ある時、等幅で動く部品を開発することが必要になり、そのために必要な研究を進めてゆく中で、この等幅曲線の研究がなされたということです。

もっとも、等幅である物は、ロレックス以前にも、イギリスで発行されていた正七角形に近い形の20ペンス硬貨や50ペンス硬貨などがありましたし、さらに古くは古代ローマ帝政時代にも等幅でできた硬貨がありました。これらの硬貨は、ある幅の入り口に入れる場合、引っかからず、隙間もできないことによる利用価値があり、精巧に作られたスロットマシンに使用できました。

現代では、20世紀にイギリス人技師H. J. ワットは、正三角形を元にした等幅曲線を使って、正方形にほぼ近い穴（四隅はどうやっても正確に削り出せないが）をあけることのできるドリルの制作に成功しました。また、ロータリーエンジンの心臓部の回転子（ローター）がこの図形です。

等幅曲線は、一般に、（図の三角形PQRに当たる部分が）正 n 角形（ただし、 n は奇数）のときに可能であることが知られていました。しかし、ロレックスによる研究で、等幅曲線は実は無数にあることがわかっています。しかも、それらは決して点対称や線対称である必要はないのです。

等幅曲線は、本来、ある長さの線分をその途中または端点を中心として、角度 180° 以下の適当な角度で回転させ、そこから回転の中心点をその線分上で別の位置に移動させ、同様に回転させていくという作業を複数回行い、回転角度の合計を 180° にすることによって作成できるものです。

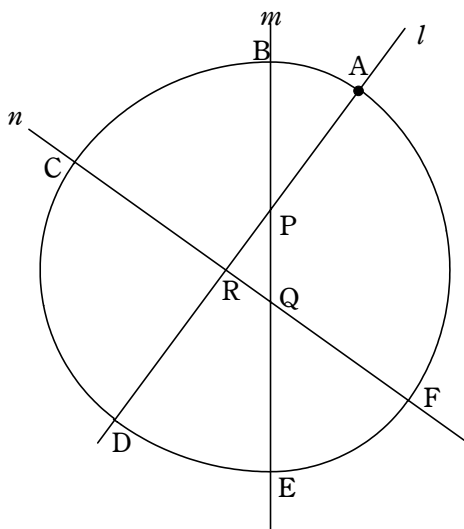
正 n 角形（ n は奇数）を使っての等幅曲線作成は、回転の中心が端点にしかなく、回転角度は全て同じである場合です。

着眼点として、気づいて欲しいことは、ある曲線（弧）とその反対側の曲線（弧）が、同一の弧の一部であることです。そうでなければ、ある角度で回転させた時、上下で一定の幅で回転できないからです。

この問題で問われていることは、等幅曲線の一般的な性質と、それに伴う作図方法です。そして、それらを通して、上記の等幅曲線の性質を理解してもらえることを目的としています。

解答例

(1)



〈描き方〉Pを中心として、半径PAの弧ABを描く。次に、Qを中心として、半径QBの弧BCを描く。以下、同様に、中心Rで半径RCの弧CDを、中心Pで半径PDの弧DEを、中心Qで半径QEの弧EFを、中心Rで半径RFの弧FAを描く。

(2) $QR=p$, $PR=q$, $PQ=r$ とする

すると、 $PA=a-q=PB$, $QB=a-q+r=QC$, $RC=a-q+r-p=RD$,

$PD=a-q+r-p+q=a+r-p=PE$, $QE=a+r-p-r=a-p=QF$,

よって、 $RF=a-p+p=a$

(3) 図形の描き方は上記の通り。

$PA=PB$, $PD=PE$ であるから、Pを中心としてADを回転するとBEとなり、そのときの図形の直径（幅）は、 $PA+PD=(a-q)+(a+r-p)=2a-p-q+r$

$QB=QC$, $QE=QF$ であるから、Qを中心としてBEを回転するとCFとなり、そのときの図形の直径（幅）は、 $QB+QE=(a-q+r)+(a-p)=2a-p-q+r$

$RC=RD$, $RF=RA$ であるから、Rを中心としてCFを回転するとDAとなり、そのときの図形の直径（幅）は、 $RC+RF=(a-q+r-p)+a=2a-p-q+r$

よって、平行線的一方が弧ABに接するならばもう一方は弧DEに接し、平行線的一方が弧BCに接するならばもう一方は弧EFに接し、平行線的一方が弧CDに接するならばもう一方は弧FAに接するので、つねに図形の幅（直径）は $2a-p-q+r$ で等幅になる

(4) $\angle APB=\angle DPE=\alpha^\circ$, $\angle BQC=\angle EQF=\beta^\circ$, $\angle CRD=\angle FRA=\gamma^\circ$ とする

このとき、 $\widehat{AB}=2\pi \cdot PA \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$, $\widehat{DE}=2\pi \cdot PD \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$ であるから、

$$\widehat{AB}+\widehat{DE}=2\pi \cdot (PA+PD) \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}=2\pi d \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

以下同様にすると、曲線の長さ（弧の長さの和） l は

$$l = 2\pi d \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} + 2\pi d \cdot \frac{\beta^\circ}{360^\circ} + 2\pi d \cdot \frac{\gamma^\circ}{360^\circ} = 2\pi d \cdot \frac{\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ}{360^\circ}$$

$\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ = 180^\circ$ であるから,

$$l = 2\pi d \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ} = \pi d$$

参考

ここでは、3本の直線を引いて三角形で考えましたが、もちろん、4本、5本、……と互いに平行でない直線を何本引いても、等幅曲線は作図できます。

配点 各問10点

講評

ここでは、3本の直線を引いて三角形で考えましたが、もちろん、4本、5本、……と幾本でも、他のどの直線とも互いに平行でない直線を引いても、等幅曲線は作図できます。

さて、作問の途中での考慮として、(1)で、点Aから点Bへの作図方法を示し、この次に、点Bから点Cへの作図方法を示してしまうと、それから後の処理（作業）がすぐに判明してしまうおそれが大きかったのです、敢えてここで止めました。

そのため、点Pを中心にして、APを半径とする円弧を描いても、あながち誤りとはいえなくなりました。この点については、作問中気づいてはいたのですが、どうしても、この点をうまく説明する（出題する）方法が見つからず、このまま出題しました。ですから、逆に、ここで、ポイントに気づいた人は後が楽に処理できたようです。そして、このため、円弧の繋がりでも正解図形を描いた人と、単に円を描いた人に、同じ点を与えられないと判断し、前者は10点、後者は8点にしました。

そのため、室蘭栄高校の須田さんのように、(1)で円を描き、その流れで(2)以降を解答したため、点数が出た人もいました。また、札幌南高校の藤岡君は、弧ABの途中と弧DEの途中で幅をとった時と、弧BCの途中と弧EFの途中で幅をとった時とで、幅が変化しないことに言及してほしかったと思います。この点について、札幌北高校の曾根本君、坂田君、釧路湖陵高校の葎本君、札幌啓成高校の榎君、旭川東高校の若杉君などは記載されていました。

(1)の関門を越えた人が少なかったため、平均点が予想よりかなり低くなりました。

(北海道札幌南陵高等学校 教諭 山崎昌典)

第4問

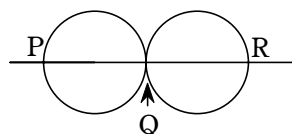
着眼点

一筆書きの場合の数（何通りあるか）を出題しました。手当たり次第に試してみたり、しらみつぶしに数えてみたりすることも可能ですが、図形が複雑になればなるほど急速に場合の数は増えていきます。そこで、教科書に出てくる「積の法則」を上手に用いて効率よく求めることができることを体感してもらいたいと思います。

(1) 円の上半分の弧，直径，下半分の弧を3本の道と考えます。すると，左から右へは3通り，右から左へ引き返すのに2通り，再度左から右へ行くには1通り，と考えれば，「積の法則」が使えます。（もっとも，この程度であれば，数え上げることも可能ですが…）

(2) (1)での直径を通るときに，同様に円を通ると考えれば，やはり積の法則です。（このあたりになると，数え上げるには少々苦勞します）

(3) (1)の考え方をもとにして右のような図形で考えます。 $P \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow R$ の順で一筆書きを完成させる方法と， $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R$ の順で一筆書きを完成させる方法とがあります。



このことを踏まえて，与えられた図で考えるとよいでしょう。

解答例

(1) $3 \times 2 = 6$ （通り）

A から B の方向（右）へは3通り，帰り（左）は2通りを選べるので上記となる。

(2) $3 \times 2 \times 6 = 36$ （通り）

一筆書きであるから内側の円も必ず描かなければならないので，内側の円を線と考えて，初めに外側の円のみを考えて，A から B の方向へは3通り，帰りは2通りを選び，その途中に1つ円（内側の円）があるので上記となる。

(3) 2592（通り）

(i) (2)と同様に内側の円を線と考えると，左の円を描き終えて，右の円を描き終えるのは $6 \times 6 = 6^2$ 通り。

(ii) 左の円を描き終わらないで右の円に至り，右の円を描き終わらないで，左の円に戻り，左の円を描き終えて右の円を描き終わるのは， $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 6^2$ 通り。

(i)(ii)のそれぞれに，内側の円の $6 \times 6 = 6^2$ 通りをかけて，

$6^2 \times 2 \times 6^2 = 2 \times 6^4 = 2592$ 通り。

(4) 186624（通り）

(i) (2)と同様に内側の円を線と考えて，左の円を描き終えて，中，右の順に円を描き終えるのは， $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ 通り。

(ii) (2)と同様に内側の円を線と考えて，左の円を描き終えて，中，右の円を(3)の(ii)と同じように円を描き終えるのは， $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ 通り。

(iii) (2)と同様に内側の円を線と考えて、左の円を描き終わらないで中の円に至り、中の円を描き終わらないで、右の円に至り、次に左の円に戻り、左から、中、右の円の順に円を描き終えるのは、 $3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 6^3$ 通り。

(iv) (2)と同様に内側の円を線と考えて、左の円を描き終わらないで中の円に至り、中の円を描き終わらないで左の円に戻り、左から、中の円を描き終わり、最後に右の円を描き終えるのは、 $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 6 = 6^3$ 通り。

(i)(ii)(iii)(iv)のそれぞれに内側の円の $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ 通りをかけて、
 $6^3 \times 4 \times 6^3 = 4 \times 6^6 = 186624$ 通り。

(5) $2^{n-1} \cdot 6^{2n}$ (通り)

左から k 個目の同心円を O_k ($1 \leq k \leq n$) , 2つの同心円 O_i, O_{i+1} ($1 \leq i \leq n-1$) の接点を P_i とする。外側の円の3つの道を R_1, R_2, R_3 , 内側の円の3つの道を r_1, r_2, r_3 とし、初めに P_i を通過した後、 O_{i+1} に進むときは+とし、初めに P_i を通過した後、 O_i に進むときは-で表すとする。このとき、一筆書きは $\{R_1, R_2, R_3\}, \{r_1, r_2, r_3\}, \{+, -\}$ が1対1に対応したものである。 $\{R_1, R_2, R_3\}, \{r_1, r_2, r_3\}$ は $O_1, O_2, \dots, O_n$ について考えられるので、ともに $(3!)^n$ 通りあり、 $\{+, -\}$ は $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ について考えられるので、 2^{n-1} 通りある。よって、総数は $(3!)^n \times (3!)^n \times 2^{n-1} = 2^{n-1} \cdot 6^{2n}$ 通りとなる。

配点 (1)4点 (2)6点 (3)8点 (4)10点 (5)12点

講評

全受験者207名中、正答者は(1)が147名、(2)が101名、(3)が33名、(4)が12名、(5)が10名でした。誤答で多かったのは、(3)については $6^4 = 1296$ 通り、(4)については $6^6 = 46656$ 通り、(5)については $6^{2n} = 36^n$ 通りでした。(1)(2)についてはなんとか半数の正答者がありますが、(3)以降は急に難度が増し、場合分けをかなり正確に出さないと解答を出せず、何をしたいのやら途方に暮れた受験生も多かったのではないのでしょうか。本問は「場合の数」の分野です。場合の数では様々な場合を速く、正確に、もれなく表現することが求められます。いくつかの答えは解き方を書いていないので、頭の中で考えたのか、別の紙に書いて考えたのかわかりませんが、具体的な場合を図に描き表してみることが解法の早道ではないかと思います。「その図が描けないんだ」という受験生も多いことかと思いますが、解法の糸口を模索し、何かを始めることが大切なのではないかと思います。一度に答を出そうと欲張らないで、一つずつ具体的に例を出していくと、その先に何か見えてくるものがあると思います。

はじめに考えていた問題は(1)のような団子をいくつも串に刺して、一筆書きの問題としたものでした。それはいくつかの問題集にでている有名なものでしたので、少し変えて出題してみました。すると問題のようなバウムクーヘンを串刺しにしたような問題となりま

した。これもなかなかよく考えなくてはならない問題で、問題は作ったはよいが、解答を考えるのに一苦労というところでした。さらに中の円が3重で n 個連結や4重で n 個連結、……、 n 重で n 個連結についてはどうでしょう。考えてみて下さい。

また、一筆書きの歴史は古く、有名なものに「ケーニヒスベルクの橋」の問題があります。ケーニヒスベルクは現在はロシア領カリーニングラードといます。ここは哲学者カントの生地としても有名で、彼は終生その地を離れることはありませんでした。以下に「ケーニヒスベルクの橋」の問題を紹介しておきます。

[問題] 下図の橋を1回ずつ渡って散歩せよ。ただし、同じ橋を2回渡ってはいけない。
図は簡単に書き換えると右のようなものになります。

これは一筆書きできないという結論に達しましたが、オイラーが1736年にそれを証明しました。

《オイラーの定理》

1. 奇点を持たない図形は、任意の頂点を始点として、かつ、同じ頂点を終点とするように一筆書きできる。
 2. 奇点をちょうど2つ持つ図形は、奇点の一方を始点、他方を終点とするように一筆書きできる。
 3. 奇点を4つ以上持つ図形は一筆書きできない。
- ※奇点…集まっている線の本数が奇数、偶点…集まっている線の本数が偶数

本文の場合は両端のA、Bが奇点であることから、上記の2. の場合にあたります。

現代の政治や社会に象徴されるように、一般に私たちは、目の前のことは時間をかけて議論するけれども、見えない部分は知らん顔という状況に陥りがちです。数学はそのような隠された部分を解き明かすという面白味があるように思います。また解き明かす努力をすることによって、次第に洞察力が培われていくのだと思います。今回うまく解けなかった諸君も決して落胆することなく、学習を続け、力をつけていくことを願っています。何かに挑戦する姿勢そのものが、今求められていて、しかも生涯にわたって必要な大切なものだと思います。

問題作成や解答作成には、灘中高等学校教諭塩崎勝彦先生，札幌北高等学校教頭安田富久一先生，札幌東陵高等学校教諭佐藤芳文先生にご助言をいただきました。この場をかりてお礼申し上げます。

(北海道札幌東陵高等学校 教諭 前田勝利)

第5問

着眼点

- (2) $4Z+6Z=2(2Z+3Z)\subset 2Z$ はすぐいえるが, $2\in 4Z+6Z$ を示してから, $4Z+6Z\supset 2Z$ がいえる。
- (3) $aZ+bZ\subset dZ$ は自明であるが, 次に, $aZ+bZ$ に属する最小な正の整数が d に一致することを証明することが主眼である。
- (5), (6) は, 約数や倍数という考え方は, 単独の数についての話ではなく, 数の集合についての性質であることを示唆したかったのです。

解答例

- (1) $4\cdot 1+6\cdot 0=4$ $4\cdot (-1)+6\cdot 0=-4$
 $4\cdot 0+6\cdot 1=6$ $4\cdot 0+6\cdot (-1)=-6$
 $4\cdot (-1)+6\cdot 1=2$ $4\cdot 1+6\cdot (-1)=-2$
 $4\cdot 3+6\cdot (-2)=0$

このことから,

$$4Z+6Z=\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

- (2) $4Z+6Z=2(2Z+3Z)\subset 2Z$
 $4\cdot (-1)+6\cdot 1=2$ から, $4\cdot (-n)+6n=2n$

すなわち, $2Z\subset 4Z+6Z$

よって, $4Z+6Z=2Z$ (証明終)

- (3) a も b も最大公約数 d で割り切れるから, $a=da'$, $b=db'$ と表せる。

よって, $aZ+bZ=d(a'Z+b'Z)\subset dZ$

$aZ+bZ$ に属する整数の中で, 正で最小な整数を e とおくと,

$$e=am_0+bn_0 \quad (m_0\in\mathbb{Z}, n_0\in\mathbb{Z})$$

と表せる。 $aZ+bZ$ に属する整数 $am+bn$ を e で割ったときの商を q , 余りを r とすると,

$$am+bn=eq+r \quad (0\leq r<e)$$

$$r=am+bn-(am_0+bn_0)q$$

$$=a(m-m_0q)+b(n-n_0q)$$

e の最小性から $r=0$ に限る。よって, $aZ+bZ=eZ$ となる。

よって, $a\in eZ$, $b\in eZ$ だから, e は a , b の公約数となる。

すなわち, e は d の約数となるから, $dZ\subset eZ$

ゆえに, $e=d$

すなわち, $aZ+bZ=dZ$ (証明終)

- (4) $7A+(4+\sqrt{2})A$ の要素の例として,

$$7\cdot 0+(4+\sqrt{2})\cdot 0=0 \qquad 7\cdot (\pm 1)+(4+\sqrt{2})\cdot 0=\pm 7$$

$$7\cdot 1+(4+\sqrt{2})\cdot (-1)=3-\sqrt{2} \qquad 7\cdot (-1)+(4+\sqrt{2})\cdot 1=-3+\sqrt{2}$$

$$7\cdot (-1)+(4+\sqrt{2})\cdot 2=1+2\sqrt{2}$$

などがあげられる。

- (5) 上の例から, $7\alpha + (4 + \sqrt{2}) \cdot (-\alpha) = (3 - \sqrt{2})\alpha$ だから,

$$(3 - \sqrt{2})A \subset 7A + (4 + \sqrt{2})A$$

一方, $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 7$, $(3 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$ だから,

$$7A + (4 + \sqrt{2})A = (3 - \sqrt{2})\{(3 + \sqrt{2})A + (2 + \sqrt{2})A\} \subset (3 - \sqrt{2})A$$

がいえるので, $7A + (4 + \sqrt{2})A = (3 - \sqrt{2})A$ (証明終)

- (6) $2(p + q\sqrt{10}) + \sqrt{10}(r + s\sqrt{10}) = (2p + 10s) + (2q + r)\sqrt{10}$ から,

$\pm 1 \in 2B + \sqrt{10}B$ だから, $2B + \sqrt{10}B \subset B$ (ただし, $2B + \sqrt{10}B \neq B$)

もし, $2B + \sqrt{10}B = \alpha B$ となる $\alpha = m + n\sqrt{10}$ が存在したとする。

特に, $2 = (m + n\sqrt{10})(a + b\sqrt{10})$

$$\sqrt{10} = (m + n\sqrt{10})(c + d\sqrt{10})$$

と表されるはずである。ここで, m, n, a, b, c, d は整数である。

上の関係を書き直すと,

$$ma + 10nb = 2, \quad mb + na = 0$$

$$mc + 10nd = 0, \quad md + nc = 1$$

これを解くと, $a = \frac{2m}{m^2 - 10n^2}$, $b = -\frac{2n}{m^2 - 10n^2}$,

$$c = -\frac{10n}{m^2 - 10n^2}, \quad d = \frac{m}{m^2 - 10n^2}$$

すなわち, $a = 2d$, $c = 5b$ であるから, b, d だけを注意すればよい。

- () $m^2 - 10n^2 = \pm 1$ となる場合は,

$$(m + n\sqrt{10})(m - n\sqrt{10}) = \pm 1$$

であるから, $\alpha B = B$ となり, 不適。

- () $m^2 - 10n^2 = k$ ($|k| > 1$) のとき, $m = kd$, $2n = -kb$ で,

$$2k = 2(kd)^2 - 5(-kb)^2$$

すなわち, $2 = k(d^2 - 5b^2)$

よって, $k = \pm 2$ に限られる。

しかし, $m^2 - 10n^2 = \pm 2$ となる m, n は存在しない。(m^2 を 5 で割った余りは, 0, 1, 4 に限られる)

よって, $2B + \sqrt{10}B = \alpha B$ となるような $\alpha \in B$ は存在しない。

配点 (1) 5 点 (2) 7 点 (3) 7 点 (4) 7 点 (5) 7 点 (6) 7 点

講評

(2)では, $4Z + 6Z \subset 2Z$ は説明しているのですが, $4Z + 6Z \supset 2Z$ がいえてない答案が多くあった。そんな中, きれいに解いたのが, 札幌南高校楊君, 旭川東高校吉田君, 考え方は理解できた北見北斗高校柳田さん, 室蘭栄高校中濱君。

(3)は難しい問題ですが、しっかりした答案を書いていた生徒がいるのには驚きました。
札幌南高校藤岡君、札幌開成高校三上君。

(5)(6)は、まともに計算しようと考え、文字がたくさん出てきて、何が何だかわからなくなり、頭が混乱してきます。(5)をうまく処理したのが、網走南ヶ丘高校稲辺君、旭川東高校大島君、遠藤君、釧路湖陵高校望木君。(6)でも旭川東高校遠藤君は、かなり正解に近い解答でした。

この問題は、整数論の中の「イデアル (Ideal)」に関する話を題材としたものです。フェルマー (Fermat) の大定理を証明しようとクンマー (Kummer) が考え出した理想数の概念を、後のネーター (Noether)、デデキント (Dedekind) が創出した道具立てです。この理論により、代数体の整数論が推進されたのです。

(北海道札幌開成高等学校 教諭 古川政春)