

第1問

(1) 鳩と鳩の巣がある。鳩が鳩の巣に入るとする。次の [] に入ることのできる自然数のうち最大のものを入れよ。

(ア) 鳩が4羽、鳩の巣が3個のとき、少なくとも1つの鳩の巣には [] 羽以上いる。

(イ) 鳩が8羽、鳩の巣が3個のとき、少なくとも1つの鳩の巣には [] 羽以上いる。

(ウ) 鳩が15羽、鳩の巣が4個のとき、少なくとも1つの鳩の巣には [] 羽以上いる。

このように、 n 、 k を自然数とすると、 $nk+r$ ($1 \leq r \leq n-1$) 羽の鳩が n 個の鳩の巣に入るとすれば、少なくとも1つの鳩の巣には $k+1$ 羽の鳩が入っている。この事実を「鳩の巣原理」という。この鳩の巣原理の考え方をを使って以下の事実がいえる理由を説明したい。何を鳩、何を鳩の巣と考えたのかを明示して説明せよ。

【例題】4人でじゃんけんをするとき同じ手を出す人がいる。

【解答】鳩～じゃんけんをした4人

鳩の巣～「グー」「チョキ」「パー」の3つの手

理由～鳩の4人はその出した手にあたる鳩の巣に入る。このとき、少なくとも

1つの鳩の巣には2人以上入っている。この人たちは同じ手を出している。

(2) ある町の住民1000人を調査したところ、この町の住民の中には同じ誕生日の人が3人以上いる日がある。

(3) 5以下の正の数（整数でなくともよい）を6つ考える。その中のどれか2つは必ず差が1未満になる。

(4) 一辺の長さが70 cmの正方形の形をした射的の的があり、50発の弾丸が異なる50か所に当たった。このとき、ある2つの弾丸で、その2点間の距離が15 cm未満のものがある。

(5) n 個の自然数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ に対して、その中の何項かをとってきて和を作る。このとき、それらの和の中で n で割り切れるものがある。

着眼点

「鳩の巣原理」は当たり前のことを言っているのですが数学の問題では意外と強力な武器になっていると思いませんか？何を鳩、何を鳩の巣とすればよいのかに気がつけばしめたものです。

解答例

(1) (ア) 2 (イ) 3 (ウ) 4

(2) 鳩～ある町の1000人住民

鳩の巣～（うるう年も考えて）1月1日から12月31日までの366日

理由～鳩の住民は自分の誕生日にあたる鳩の巣に入る。このとき、少なくとも1つの

鳩の巣には 3 人以上が入っている。この人たちの誕生日は同じである。

(3) 鳩～考えた 6 つの数

鳩の巣～5 つの集合 $A_n = \{x \mid n-1 < x \leq n\}$ ($n=1, 2, 3, 4, 5$)

理由～考えた 6 つの数がどの集合の要素になるかを考える。このとき、少なくとも 1 つの鳩の巣には考えた数の中のどれか 2 つ以上が属する。これら 2 つの差は必ず 1 未満である。

(4) 鳩～50 発の弾丸

鳩の巣～的を縦 7 マス、横 7 マスの 49 マス（1 辺 10 cm の正方形）に区切ったもの
理由～弾丸があたった場所がどのマスに入っているかを考える（境界の場合はその場所に接する好きなマスに入れる）。このとき、少なくとも 1 つのマスには 2 つ以上の弾丸が当たっている。これらの弾丸の距離は $10\sqrt{2}$ cm 以下であるが、 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$ であるのでこの距離は 15 cm を越えない。

(5) n 個の自然数 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ を

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots, b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

で定義する。この中で n で割り切れるものがある場合はよい。そのようなものがない場合には次のように考える。

鳩～ n 個の自然数 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$

鳩の巣～ $n-1$ 個の集合 $A_i = \{x \mid x \text{ を } n \text{ で割った余りが } i\}$ ($i=1, 2, 3, \cdots, n-1$)

理由～自然数 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ がどの A_i の要素になるかを考える。このとき少なくとも一つの鳩の巣には $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ のいずれか 2 つ以上が属する。そのうちの 2 つを b_i, b_j とする。ただし、 $i < j$ とする。このとき、 $b_j - b_i = a_{i+1} + \cdots + a_j$ は n で割り切れる。

配点

(1) 各 3 点 $\times 3 = 9$ 点 (2) 7 点 (3) 7 点 (4) 7 点 (5) 10 点

講評

第 1 問は『離散数学』と呼ばれる数学の一分野の中で、特に『鳩の巣原理』の内容を出題してみました。離散数学の内容は高校数学ではあまり取り上げられてはいないのでなじみが薄いかもしれませんが、多くの予備知識を仮定しなくても解決できる問題が多いですし、いろいろな方法で解決できる問題が多いです。また、問題の解決を通して、数学の有用性をはじめ、数学的な見方や考え方のよさを感じ取ることができます。

『鳩の巣原理』の考え方については理解してくれた人が多いと思います。そのため、(1) と (2) についてはよくできていました。ただし、たとえば (1) の (ア)

鳩が 4 羽、鳩の巣が 3 個のとき、少なくとも 1 つの鳩の巣には [2] 羽以上いる。
は、とにかくどれかの巣には 2 羽以上いるということをいっているだけであって、各鳩の巣に「3 羽、0 羽、0 羽」のように鳩がいない巣があってもいいということを誤解してい

る解答がいくらか見られました。

(3)については、鳩の巣を「0, 1, 2, 3, 4」とし、「6つの各数の整数部分にあたる鳩の巣に入れる」と考えた解答が多く見られました。これでは5という数の扱いについてもれてしまうので、厳密には解答に傷があります。

また、(3)(4)については鳩の巣原理を用いずに背理法で証明している解答がいくつかありました。しかし、「鳩の巣原理の考え方を使って」という問題の趣旨に反するのでこれでは得点になりません。

(5)についてはかなりむずかしかったようです。正解には至らない解答が多かったですが、いろいろ考えて苦戦した跡があり、採点してみなさんの発想の豊かさを感じました。完全な正解者は1名でした。

第1問を解いてみて皆さんどう感じましたか？『離散数学』って面白そうでしょう？私の専門は離散数学ではないのですが、離散数学は数学の中では比較的新しい分野なので、皆さんが興味を持って学習すればその中には研究の最先端と重なることもあるんですよ。この問題をきっかけにして、皆さんの中から大数学者が誕生することを期待しています。

【参考文献】

- [1] 長尾篤志・景山三平・長崎栄三『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』，国立教育政策研究所（2006）
- [2] C. L. リウ（成嶋 弘，秋山 仁 訳）『コンピュータサイエンスのための離散数学入門』，オーム社，1995
- [3] S. リブシュツ（成嶋 弘 監訳）『マグローヒル大学演習 離散数学～コンピュータサイエンスの基礎数学』，オーム社，1995

（札幌静修高等学校 杉本幸司）

第2問

円に内接する四角形 $ABCD$ において、

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

が成り立つことを、次の手順で証明せよ。

- (1) 線分 BD 上に、 $\angle BAE = \angle CAD$ となるように点 E をとる。

$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ が相似であることを証明せよ。

- (2) (1)から、

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE$$

であることを示せ。

- (3) $\triangle AED$ と $\triangle ABC$ を考えて、

$$BC \cdot DA = AC \cdot ED$$

を示せ。

- (4) 最初の等式

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

を示せ。

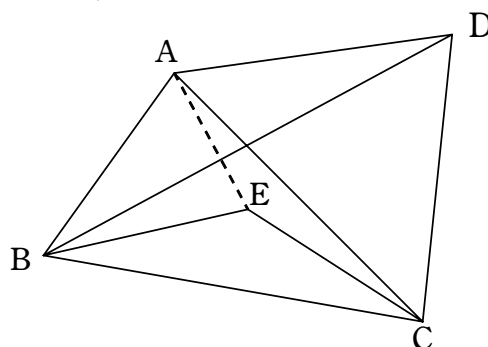
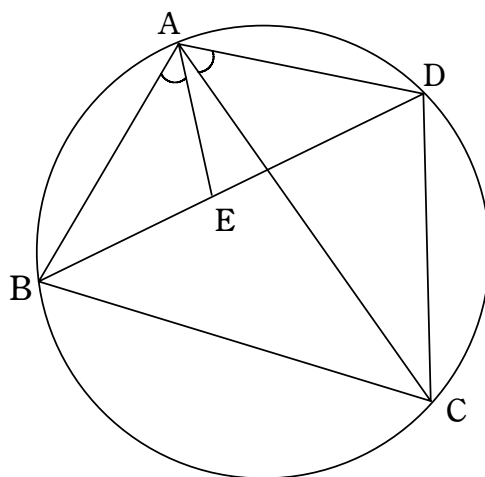
- (5) 逆に、四角形 $ABCD$ において、等式

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

が成り立つならば、四角形 $ABCD$ は円に内接することを、

$$\triangle ABD \sim \triangle EBC$$

となるように点 E をとることによって証明せよ。



着眼点

(1)から(4)は、トレミー (Ptolemy) の定理の証明です。誘導問題としましたので、手がつけやすかったものと考えます。

(5)は、トレミーの定理の逆の証明ですが、ヒントを入れましたが難問です。解けた人は自信を持っていいでしょう。

解答例

- (1) $\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ において

$$\text{仮定より} \quad \angle BAE = \angle CAD$$

$$\widehat{AD} \text{ に対する円周角より} \quad \angle ABD = \angle ACD$$

$$\text{すなわち} \quad \angle ABE = \angle ACD$$

$$\text{対応する2つの角が等しいので} \quad \triangle ABE \sim \triangle ACD$$

(2) (1)より, $AB : AC = BE : CD$ ($\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ の相似比) である

ゆえに, $AB \cdot CD = AC \cdot BE$

(3) 対角線 AC と BD の交点を P とする。

$\triangle AED$ と $\triangle ABC$ において、

$$\angle EAD = \angle EAP + \angle PAD = \angle EAP + \angle BAE = \angle BAC$$

また, $\widehat{AB}$ に対する円周角より $\angle ADB = \angle ACB$

すなわち $\angle ADE = \angle ACB$

対応する 2 つの角が等しいので $\triangle AED \sim \triangle ABC$

よって, $AD : AC = ED : BC$ ($\triangle AED$ と $\triangle ABC$ の相似比) である

ゆえに, $AD \cdot BC = AC \cdot ED$

(4) (2), (3)より

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED$$

$$= AC \cdot (BE + ED)$$

$$= AC \cdot BD$$

(5) $\triangle ABD \sim \triangle EBC$ より $BD : BC = AD : EC$

すなわち $BC \cdot DA = BD \cdot EC \cdots \cdots \textcircled{1}$

また, $\triangle ABE$ と $\triangle DBC$ において、

$$\angle ABE = \angle ABD + \angle DBE = \angle EBC + \angle DBE = \angle DBC$$

$\triangle ABD \sim \triangle EBC$ より $AB : EB = BD : BC$ であるから、

$$AB \cdot BC = EB \cdot BD$$

ゆえに, $AB : DB = BE : BC$

よって, 対応する 2 辺の比が等しく, その 2 辺に挟まれる角が等しいので、

$$\triangle ABE \sim \triangle DBC$$

ゆえに, $AB : DB = AE : DC$

すなわち, $AB \cdot CD = BD \cdot AE \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ から, $AB \cdot CD + BC \cdot DA = BD \cdot AE + BD \cdot EC$

$$= BD \cdot (AE + EC)$$

一方, 仮定から, $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ であるから、

$$AE + EC = AC$$

が成立する。ゆえに, 点 E は対角線 AC 上にある。

よって, $\angle ADB = \angle ECB = \angle ACB$ が成り立ち、

4 点 A, B, C, D は同一円周上にある。すなわち, 四角形 $ABCD$ は円に内接する。

配点

(1) 6 点 (2) 6 点 (3) 12 点 (4) 6 点 (5) 10 点

講評

2 つの三角形が相似となる条件は、

1. 対応する 2 角の大きさがそれぞれ同じである。（2 角相等）
2. 対応する 2 辺の比が同じで、その 2 辺に挟まれる角が同じである。（2 辺比と夾角相等）
3. 対応する 3 辺の比が同じである。（3 辺比相等）

円周角について、「弧 **AB** に対する（に立つ）円周角 $\angle APB$ 」などの言い方をする。

また、証明において、「最初に結論ありき」の答案が多くいました。

例えば、(4) の証明で、

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

$$AC \cdot BE + AC \cdot ED = AC \cdot BD$$

$$AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot BD \quad \text{が成り立つ。}$$

正しくは、(2), (3) から

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED$$

$$= AC \cdot (BE + ED)$$

$$= AC \cdot BD \quad (\text{証明終})$$

難問の (5) を完答した生徒を紹介します。札幌の藤岡君，福田君，札幌開成の熊谷君，札幌北の吉原君，函ラサールの片桐君，旭東の西村君，札幌西の山後君の 7 名でした。立派です。

(北海道札幌開成高等学校 古川政春)

第3問

実数全体の集合を R とし、関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2-2x$ とする。 R の部分集合 A に対し、集合 $f(A)$ を

$$f(A)=\{f(x) \mid x \in A\}$$

と定める。例えば、 $A=\{0, 1, 2\}$ のとき $f(A)=\{-1, 0\}$ であり、 $A=\{x \mid 1 \leq x < 2\}$ のとき $f(A)=\{y \mid -1 \leq y < 0\}$ である。次の問いに答えよ。

- (1) $A=\{x \mid 2 < x < 4\}$ のとき、 $f(A)=\{y \mid m < y < M\}$ となった。定数 m, M の値を求めよ。
- (2) $A=\{x \mid a \leq x \leq 3\}$ のとき、 $f(A)=\{y \mid -1 \leq y \leq 3\}$ となるような定数 a の値の範囲を求めよ。
- (3) $A=\{a\}$ とするとき、 $A=f(A)$ が成り立つような a の値をすべて求めよ。
- (4) $A=\{x \mid x \geq a\}$ とするとき、 $A=f(A)$ が成り立つような a の値をすべて求めよ。
- (5) $A=\{x \mid a \leq x \leq b\}$ とするとき、 $A=f(A)$ が成り立つような a, b の組をすべて求めよ。ただし、 $a < b$ とする。
- (6) $A=f(A), B=f(B)$ ならば $A \cup B = f(A \cup B)$ は成り立つか。成り立つのなら証明し、成り立たないのなら反例を挙げよ。

着眼点

集合 $f(A)$ の意味がわかるかどうかポイントです。問題の最初の部分は、“関数 $f(x)=x^2-2x$ の定義域を A とするとき、値域を $f(A)$ という記号で表すことにする” という意味です。(1), (2)をやりながら集合 $f(A)$ の意味を理解すれば、(5)まではすんなり解けるでしょう。(4), (5)は2次関数の最大・最小の問題で、問題文の表現の仕方が学校の教科書とは異なるだけです。(6)は難しいですが、(3)から(5)の結果などから成り立ちそうだと予想できれば、あとは $A \cup B \subset f(A \cup B)$ と $f(A \cup B) \subset A \cup B$ をやってみればいいでしょう。

解答例

$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$ であるから、放物線 $y=f(x)$ の頂点は点 $(1, -1)$ 。また、 $f(x)=x(x-2)$ より、この放物線は2点 $(0, 0), (2, 0)$ を通る。

- (1) $A=\{x \mid 2 < x < 4\}$ のとき

$$f(A)=\{f(x) \mid 2 < x < 4\}=\{y \mid y=f(x), 2 < x < 4\}$$

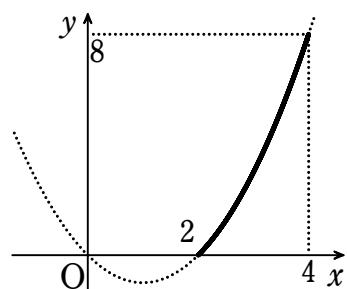
したがって、 $2 < x < 4$ における $y=f(x)$ の値域が

$$m < y < M$$

である。グラフから、

$$m=f(2)=0, M=f(4)=8$$

ゆえに、 $m=0, M=8$



(2) $A = \{x \mid a \leq x \leq 3\}$ のとき

$$f(A) = \{f(x) \mid a \leq x \leq 3\} = \{y \mid y = f(x), a \leq x \leq 3\}$$

したがって、 $a \leq x \leq 3$ における $y = f(x)$ の値域が

$$-1 \leq y \leq 3$$

となる。グラフから

$$-1 \leq a \leq 1$$

(3) $A = \{a\}$ のとき

$$f(A) = \{f(x) \mid x = a\} = \{f(a)\}$$

であるから、

$$a = f(a) \quad \text{すなわち、} \quad a = a^2 - 2a$$

これを解いて、 $a = 0, 3$

(4) $A = \{x \mid x \geq a\}$ のとき

$$f(A) = \{f(x) \mid x \geq a\} = \{y \mid y = f(x), x \geq a\}$$

一方、 $A = f(A)$ より、 $f(A) = \{y \mid y \geq a\}$

したがって、 $x \geq a$ における $y = f(x)$ の値域が $y \geq a$ 、すなわち、 $x \geq a$ における $f(x)$ の最小値が a となればよい。

(i) $a \leq 1$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(1) = -1$ であるから、

$$a = -1$$

これは $a \leq 1$ を満たす

(ii) $a > 1$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(a) = a^2 - 2a$ であるから、

$$a = a^2 - 2a$$

$$a^2 - 3a = 0$$

$$a(a - 3) = 0$$

$a > 1$ であるから、 $a = 3$

ゆえに、(i)(ii)より、 $a = -1, 3$

(5) $A = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ のとき

$$f(A) = \{f(x) \mid a \leq x \leq b\} = \{y \mid y = f(x), a \leq x \leq b\}$$

一方、 $A = f(A)$ より、 $f(A) = \{y \mid a \leq x \leq b\}$

したがって、 $a \leq x \leq b$ における $f(x)$ の値域が $a \leq x \leq b$ 、すなわち、 $a \leq x \leq b$ における $f(x)$ の最小値が a 、最大値が b となればよい。

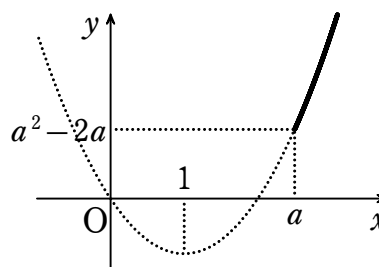
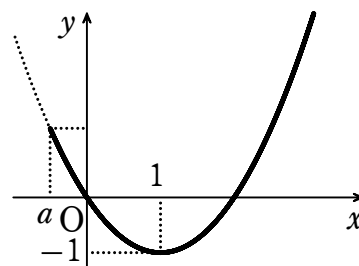
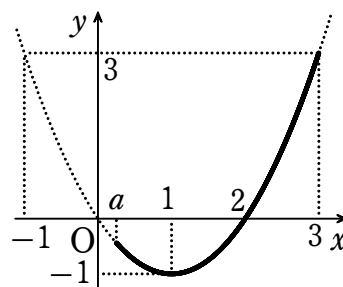
(i) $a < b < 1$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(b) = b^2 - 2b$

最大値は $f(a) = a^2 - 2a$

であるから、

$$\begin{cases} b^2 - 2b = a & \cdots \textcircled{1} \\ a^2 - 2a = b & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$



①－②より

$$b^2 - a^2 - 2b + 2a = a - b$$

$$b^2 - a^2 - b + a = 0$$

$$(b+a)(b-a) - (b-a) = 0$$

$$(b-a)(b+a-1) = 0$$

$b \neq a$ であるから

$$b+a-1=0$$

$$a=1-b \quad \cdots \textcircled{3}$$

③を①に代入して

$$b^2 - 2b = 1 - b$$

$$b^2 - b - 1 = 0$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$b < 1 \text{ より } b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\textcircled{3} \text{ より } a = 1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

これは $a < b$ を満たさないので不適

(ii) $a \leq 1 \leq b$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(1) = -1$ であるから $a = -1$ したがって、 $-1 \leq x \leq b$ における $f(x)$ の最大値が b となればよい。

$f(-1) = 3 = f(3)$ であるから、

$b < 3$ とすると $f(-1) > f(b)$ となり、

最大値が $f(-1) = 3$ となるので不適。

よって、 $b \geq 3$ であり、そのとき最大値は

$$f(b) = b^2 - 2b$$

となるので、

$$b^2 - 2b = b$$

これを解いて、 $b = 0, 3$

$b \geq 3$ より、 $b = 3$ ゆえに、 $a = -1, b = 3$

(iii) $1 < a < b$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(a) = a^2 - 2a$

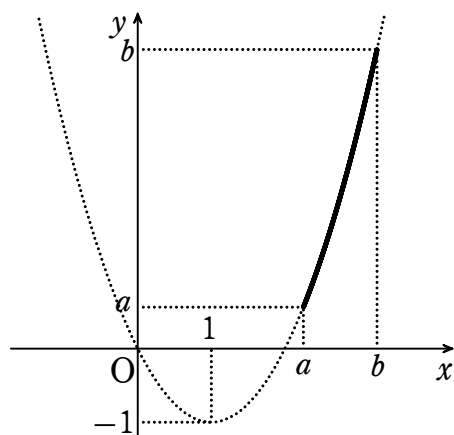
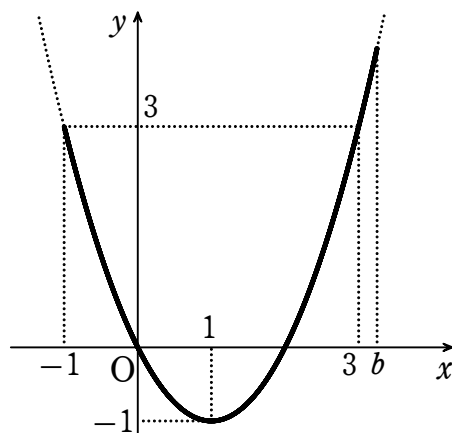
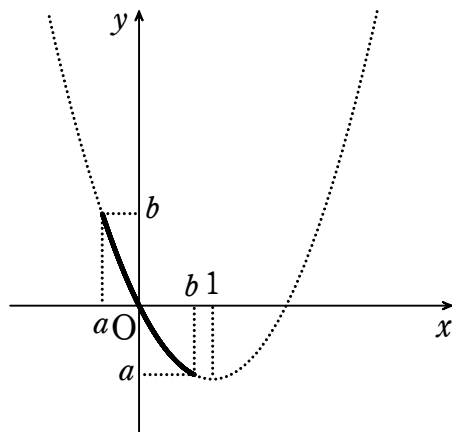
最大値は $f(b) = b^2 - 2b$

であるから、

$$\begin{cases} a^2 - 2a = a \\ b^2 - 2b = b \end{cases}$$

これを解いて、 $a = 0, 3, b = 0, 3$

$1 < a < b$ を満たす解は存在しないので不適



(i)(ii)(iii)より、条件を満たす a, b の組は

$$(a, b) = (-1, 3)$$

(6) $A = f(A), B = f(B)$ とする

(i) $x \in A \cup B$ とすると

$$x \in f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \cup f(A \cup B) = f(A \cup B)$$

$$\text{よって, } x \in f(A \cup B) \quad \text{ゆえに, } A \cup B \subset f(A \cup B)$$

(ii) $y \in f(A \cup B)$ とすると

$$y = f(x) \text{ を満たす } x \in A \cup B \text{ が存在する}$$

$$x \in A \text{ のときは } y \in f(A), x \in B \text{ のときは } y \in f(B)$$

$$\text{よって, } y \in f(A) \cup f(B) \text{ となるから}$$

$$y \in A \cup B \quad \text{ゆえに, } f(A \cup B) \subset A \cup B$$

(i)(ii)より、 $A \cup B = f(A \cup B)$

配点

(1) 4点 (2) 5点 (3) 5点 (4) 7点 (5) 9点 (6) 10点

講評

最高点は30点でした。全体的に後半の問題ができていなかったもので、(1)と(2)は答えしか書いていないものにも点をあげました。(1)は大部分の生徒が得点していましたが、(2)はできがわるく、(3)の方が(2)よりもできていました。(4)と(5)は、多くの生徒が場合分けができていませんでした。(6)の正解者はいませんでしたので、ここで(6)について少し説明しておきます。

一般に、2つの集合 P, Q に対して、

$$P = Q \Leftrightarrow P \subset Q \text{ かつ } Q \subset P$$

ですから、(6)の $A \cup B = f(A \cup B)$ を証明するには

$$A \cup B \subset f(A \cup B) \text{ かつ } f(A \cup B) \subset A \cup B$$

を示せばよいわけです。

また、集合 P が集合 Q の部分集合であるとは、 P のどの要素も Q の要素になっていること、すなわち、「 $x \in P \Rightarrow x \in Q$ 」ということです。ですから、

「 $A \cup B \subset f(A \cup B)$ 」を示すには、「 $x \in A \cup B \Rightarrow x \in f(A \cup B)$ 」を示せばよいのです。

実は、

$$\text{命題「} A = f(A) \text{ かつ } B = f(B) \Rightarrow A \cup B = f(A \cup B) \text{」} \cdots \cdots (*)$$

は、 $f(x)$ がどんな関数でも成り立ちます。このことは、(6)の解答例からわかると思います。

数人の生徒が(6)にも手をつけていました。その中に、 $A = f(A)$ を満たす集合 A は(3), (4), (5)で求めたものに限るとして解答しているものがありましたが、それは正しくありません。例えば、数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = 0, x_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + x_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定め、数列 $\{y_n\}$ を $y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 1 - \sqrt{3}, y_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + y_n}$ ($n = 3, 4, 5, \dots$)

によって定めます。そして、集合 X, Y を

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$$

とすると、

$$f(x_1) = x_1, f(x_{n+1}) = x_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$f(y_1) = y_1, f(y_{n+1}) = y_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となることから、

$$X = f(X), Y = f(Y)$$

がわかります。

このように、 $A = f(A)$ を満たす集合 A は(3), (4), (5)で求めたもの以外に X や Y など、いろいろあるのです。

また、命題(*)において、 $\cup$ と $\cap$ を入れかえた命題

$$「A = f(A) \text{ かつ } B = f(B) \implies A \cap B = f(A \cap B)」 \dots\dots(*)$$

は、一般の関数では成り立ちません。(一般に成り立つのは、 $A \cap B \supset f(A \cap B)$ だけです)

本問においても上にあげた X, Y を考えると、 $X = f(X), Y = f(Y)$ ですが、

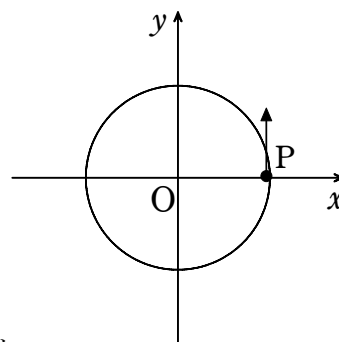
$X \cap Y = \{0, 2\}, f(X \cap Y) = \{0\}$ となって、(*)が成り立たないことがわかります。

命題(*)が成り立つための一つの条件は、 $f(x)$ が 1 対 1 の関数であることです。興味があれば、この条件のもとで(*)を証明してみてください。なお、関数 $f(x)$ が 1 対 1 でなくても(*)が成り立つようなものはいくらでもつくれます。

(北海道札幌国際情報高等学校 和田文興)

第4問

次のようなゲームをする。1個のさいころを投げ、1の目が出れば 10° 、2の目が出れば 20° 、3の目が出れば 30° 、4の目が出れば 40° 、5の目が出れば 50° 、6の目が出れば 60° 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。今、点Pは図の位置から出発する。次の問いに答えよ。



- (1) ちょうど1周するのに、さいころを投げる回数が最も少ないのはどのような場合か。
- (2) (1)の回数でさいころを投げたとき、点Pが到達できる位置をすべて答えよ。

- (3) A、B、C、Dの4人がゲームの仕方を次のようにアレンジした。

A～1個のさいころを最大7回投げ、偶数の目が出た場合のみ、2の目が出れば 20° 、4の目が出れば 40° 、6の目が出れば 60° 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。奇数の目が出た場合は回数は数えるが、点Pはその場にとどまる。ただし、点Pがちょうど1周したら、さいころを投げるのをやめるものとする。

B～大小のさいころを2個投げ、目の和が偶数の場合のみ、(目の和) $\times 10^\circ$ 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。これを最大4回繰り返す。

目の和が奇数の場合は回数には数えるが、点Pはその場にとどまる。ただし、点Pがちょうど1周したら、さいころを投げるのをやめるものとする。

C～1個のさいころを8回投げ、素数の目の場合のみ、(目の数) $\times 10^\circ$ 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。素数以外の目が出た場合は、回数は数えるが、点Pはその場にとどまる。

D～さいころではなく、硬貨を8回投げて、表が出たら 30° 、裏が出たら 60° 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。

それぞれがちょうど1周するのは何通りあるか。また、その確率を求めよ。

- (4) Cの提案した方法でゲームをすることとする。

(i) さいころを1回投げたときの回転する角度の期待値を求めよ。

(ii) 1個のさいころを8回投げ、素数の目の場合のみ、(目の数) $\times 10^\circ$ 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。素数以外の目が出た場合は、回数は数えるが、点Pはその場にとどまる。ちょうど1周した者のうち、初めに5の目が出た者には500円、3が出た者には300円、2が出た者には200円の賞金が与えられるものとする。賞金の期待値はどのようになるか。

着眼点

- (1) 6の目が出れば 60° 回転させるので、6回連続で6の目が出れば、最も早く1周する。

- (2) 6回で最小の角度は 60° ，最大の角度は 360° である。
- (3) A～さいころを6回投げて1周する場合と，7回投げて1周する場合がある。
 B～2個のさいころを3回投げて1周する場合と，4回投げて1周する場合がある。
 C～1から6までの数字で素数は2，3，5である。最大で5であるから，さいころを7回投げて1周は回れない。8回投げた場合のみ考える。
 D～ちょうど1周するのは，表が4回，裏が4回出る場合のみである。
- (4) (i) 2の目が出れば 20° ，3の目がでれば 30° ，5の目が出れば 50° 回せばよい。その他の目では動かさない。さいころの目の確率はどれも $\frac{1}{6}$ である。
- (ii) 初めに5の目が出るのは21通り，初めに3の目が出るのは7通り，初めに2の目が出るのは0通りであるから，その確率とそれぞれの賞金をかけあわせて，その和を求める。

解答例

- (1) 最も早く1周するのは，6の目が連続で6回出る場合である。
- (2) 6回で最小の角度はさいころの目がすべて1の場合で 60° ，最大の角度はすべて6の目が出た場合で 360° である。それらの間は 10° きざみで考えられる。したがって，求める位置は31通りあって，点Pが出発した位置から反時計周りに $50^\circ + n \times 10^\circ$ ($n=1, 2, 3, \dots, 31$) 回転させた位置である。
- (3) A(i) さいころを6回投げる場合
 すべて6の目が出る場合なので1通り
- (ii) さいころを7回投げる場合
 奇数の目が1回と6の目が5回，かつ，7回目は6の目が出る場合は $3 \times 6 = 18$ 通り
- 2と4の目が1回ずつと6の目が5回出る場合は $\frac{7!}{5!} = 42$ 通り
- 4の目が3回と6の目が4回出る場合は $\frac{7!}{3!4!} = 35$ 通り
- (i)(ii)より，ちょうど1周するような目の出方は， $1 + 18 + 42 + 35 = 96$ 通りあって，その確率は $\frac{1}{6^6} + \frac{95}{6^7} = \frac{101}{6^7} = \frac{101}{279936}$
- B(i) 2個のさいころを3回投げる場合
 すべて6の目が出る場合なので1通り
- (ii) 2個のさいころを4回投げる場合
 目の和が奇数になるのが1回と2個とも6の目が出るのが3回，かつ，4回目は2個とも6の目が出る場合は $3 \times 18 \times 1 = 54$ 通り
- 4回とも目の和が偶数で，ちょうど1周する場合を考える。
 2から12までの偶数を4つ足して36になればよいので，4つの偶数の組合せで考えると，

$$(2, 10, 12, 12) \rightarrow \frac{4!}{2!} \times 1 \times 3 \times 1 \times 1 = 36 \text{ 通り}$$

$$(4, 8, 12, 12) \rightarrow \frac{4!}{2!} \times 3 \times 5 \times 1 \times 1 = 180 \text{ 通り}$$

$$(4, 10, 10, 12) \rightarrow \frac{4!}{2!} \times 3 \times 3 \times 3 \times 1 = 324 \text{ 通り}$$

$$(6, 6, 12, 12) \rightarrow \frac{4!}{2!2!} \times 5 \times 5 \times 1 \times 1 = 150 \text{ 通り}$$

$$(6, 8, 10, 12) \rightarrow 4! \times 5 \times 5 \times 3 \times 1 = 1800 \text{ 通り}$$

$$(6, 10, 10, 10) \rightarrow \frac{4!}{3!} \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 540 \text{ 通り}$$

$$(8, 8, 8, 12) \rightarrow \frac{4!}{3!} \times 5 \times 5 \times 5 \times 1 = 500 \text{ 通り}$$

$$(8, 8, 10, 10) \rightarrow \frac{4!}{2!2!} \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 = 1350 \text{ 通り}$$

(i)(ii)より, ちょうど1周するような目の出方は

$$1 + 54 + 36 + 180 + 324 + 150 + 1800 + 540 + 500 + 1350 = 4935 \text{ 通り}$$

$$\text{あって, その確率は, } \frac{1}{6^6} + \frac{4934}{6^8} = \frac{4970}{6^8} = \frac{2485}{3 \times 6^7} = \frac{2485}{839808}$$

C 素数は2, 3, 5であり, 8回投げてちょうど1周するには, 3が2回, 5が6回

出る場合しかないので, そのような目の出方は $\frac{8!}{2!6!} = 28$ 通りあって, その確率は

$$\frac{28}{6^8} = \frac{7}{3^2 \times 6^6} = \frac{7}{419904}$$

D 表が x 回出るとすると, 裏は $8 - x$ 回出るので, 8回の試行で回転する角度は $x \times 30^\circ + (8 - x) \times 60^\circ$ であり, これが 360° に等しくなるのは $x = 4$ のときである。

したがって, ちょうど1周するのは, 表と裏が4回ずつ出るときなので, 表と裏の出

方は $\frac{8!}{4!4!} = 70$ 通りあって, その確率は $\frac{70}{2^8} = \frac{35}{128}$

$$(4) (i) \quad 20^\circ \times \frac{1}{6} + 30^\circ \times \frac{1}{6} + 50^\circ \times \frac{1}{6} = \left(\frac{100}{6}\right)^\circ = \left(\frac{50}{3}\right)^\circ$$

(ii) (3)の結果から, 初めに2が出ることはない。初めに3が出るのは7通り, 初めに5が出るのは21通りあるから, 賞金の期待値は

$$200 \times \frac{0}{6^8} + 300 \times \frac{7}{6^8} + 500 \times \frac{21}{6^8} = \frac{12600}{6^8} = \frac{350}{6^6} = \frac{175}{3 \times 6^5} = \frac{175}{23328} \text{ (円)}$$

配点

(1) 4点 (2) 4点 (3) 各6点 (4) 各4点

講評

数学コンテスト終了後に配布した「解答と解説」の第4問の(3)Aの解答例に誤りがあり

ました。謹んでお詫び申し上げます。本編の解答例を参考にしてください。

全受験者332名中、正答者は(1)が326名、(2)が219名、(3)Aが13名、B 0名、Cが41名、Dが78名、(4)(i)が97名、(ii)が11名でした。

確率論の歴史はフランスの数学者パスカルとフェルマーの往復書簡に始まります。またそのきっかけは、シュヴァリエ・ド・メレという賭け事の好きな人が、友人のパスカルに質問をしたことでした。「さいころを4回投げたとき、少なくとも1回6の目が出る確率」という問題や「実力が同等で、勝ち負けの可能性が半々の2人A、Bが3番勝負をした。

(どちらか先に2回勝ったほうが勝ち。) 1回戦でAが勝ったときに、ある事情で賭けを中断するならば、掛け金をどう配分したらよいだろうか。」という問題をフェルマーとパスカルが往復書簡を通し、確率論が築かれていったと言われています。受験生の中には今回の数学コンテストの後、1月21日に実施された大学入試センター試験の数学の問題を解いてみた人も多いと思います。今回のセンター試験の数学I・Aの第4問の題材は数学コンテストの第4問の題材と同じでした。数学コンテストの第4問が解けた受験生はセンター試験の数学I・Aの第4問は解けたと思いますが……。

さて本問の話に戻ります。

(1)～これはできなければならないと思います。「6回」とのみ答えている解答を多く見かけました。何を「6回」なのだろう。問題は「ちょうど1周するのに、さいころを投げる回数が最も少ないのはどのような場合か。」となっていますから、回数だけを聞いているではありません。また「すべて6の目」とのみ答えている解答も多く見かけました。「すべて6の目」で何回さいころを投げるのだろう。ただし、(2)で(1)の回数がわかる場合は○とし、断定できない場合は×としました。

(2)～これもできている受験生が多かったのですが、「60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°」と答えている受験生が多くいました。さいころの目が同じである必要はないですね。

また、60°回転させることをその座標で $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と答えている受験生もいました。

これはよく考えていて、感心しましたが、単位円ではないし、円の半径も特に記述されていないので、座標で答えることはできません。「図でOPの長さを r として、

点Pを60°回転させたとき、点Pの座標を $\left(\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$ と表す」と答えているので

あれば、○となるでしょう。半径を a として $\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ としていた受験生もいま

したが、解答例のように到達できる位置が満足に説明できていないものでした。ただし、60°から360°まで10°ずつの回転をさせるということが記述してあれば○としています。360°のところを0°と答えている受験生もいて、360°と答えてほしかったのですが、「位置」という言葉から同じ「位置」なので、○としました。

(3)～これは難しかったと思います。

Aは、さいころを6回投げる場合と7回投げる場合とに分けて考えなければならず、確率にするときは分母を通分しなければならないので、かなり難問であったと思います。

Bは、さいころを3回投げる場合と4回投げる場合とに分けて考えなければならず、確率にするときは分母を通分しなければならないので注意を要します。さらに4回の試行とも2個のさいころの目の和が偶数である場合はかなり場合分けが煩雑になり、相当な難問であったと思います。完答はいませんでした。

Cは、素数に「1」を含んでいる受験生が非常に多いことに驚きました。また、さいころの目を「1～6」まですべて計算に入れている受験生も多くいました。さいころを8回投げて、ちょうど1周するのは3の目が2回、5の目が6回のときのみです。

Dはできはよかったのですが、誤答が多かったのは、「(i)裏6回、(ii)裏5回表2回、(iii)裏4回表4回」としていたことです。「8回投げる」とあるので「裏4回表4回」のみとなります。また、確率を求める際は分母は $2^8=256$ となります。

- (4)～これは比較的やさしいと思うのですが、(i)の誤答が多かったのは(3)でも述べましたが、素数を1, 2, 3, 5としていたことです。「素数とは約数が1とその数自身の2つある数」です。1の約数は1のみの1つしかないので、1は素数ではありません。(ii)は(3)で「28通り」とでてきた受験生は内訳を考えればいいだけですが、初めに2がでる場合はありません。

多くの受験生は途中の過程を書いてくれていたので、部分点をあげることができましたが、中には答えしか書いてなくて、しかも間違っているという答案がありました。本問のような複雑な問題については部分点が得点に大きく影響します。

毎年、大学の先生に入試について何う機会がありますが、大学の先生は「答案を作成していて、途中の計算や考え方などをできるだけ書いてほしい。できるだけ評価したい。」とおっしゃっています。

現代の政治や社会に象徴されるように、一般に私たちは、目の前のことは時間をかけて議論するけれども、見えない部分は知らん顔という状況に陥りがちです。数学はそのような隠された部分を解き明かすという面白味があるように思います。また解き明かす努力をすることによって、次第に思考力や洞察力が培われていくのだと思います。

今回納得のいく結果を得られなかった諸君も決して落胆することなく、学習を続け、力をつけていくことを願っています。何かに挑戦する姿勢そのものが、今求められていて、しかも生涯にわたって必要で大切なものだと思います。受験生諸君みんなに未来があり、それぞれにすべきことがあり、次代は君たちにかかっています。受験生諸君の未来に幸あれ！

(北海道札幌東陵高等学校 前田勝利)

第5問

[採点基準]

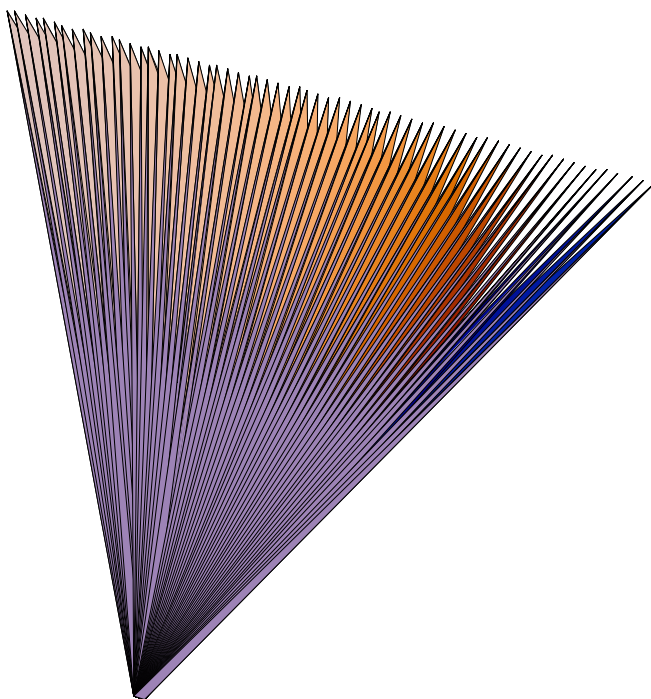
- (1) 7点
- (2) 7点
- (3) 7点
- (4) 6点
- (5) 6点
- (6) 7点

合計40点満点です。

正解を得ることができなくても、作図が解法の手助けになっていると思われる答案には、途中点2点を随時加えました。少なくとも思考の過程である作図は必要です。

(1)(2)は計算問題のため、多くの生徒が正解を得ていました。(3)(4)は作図の不備から基本的なミスをしているか、あきらめて白紙にしている生徒が多く見られました。

問題に添付した展開図を切り抜いて立体模型を作成しましたか？私は札幌会場で試験監督をしながら観察していましたが、あまり模型を作成している生徒は少数でした。自分の手で模型を作成することによって、思わぬ発見が解法のヒントになり感動につながります。是非、模型を作成して考えてください。「数学のみならず自然科学とは模型を作成しながら考察する学問である。」と言っても過言ではありません。DNAの発見者のワトソン、クリックもボール紙でモデルを作成し遺伝子の2重らせんモデルを発見したと言われています。



答案を採点していて気がついたことは、

- ①全く作図していない人。
- ②超能力持っていて、途中の思考過程を書かず答えのみを書いている人。
- ③何がわかっていて、何がわからないか明確に区別できない人。

これらの人々が増加していることが心配です。

逆に

- 【1】少なくとも、作図する。
- 【2】少なくとも、思い込みを避ける。
- 【3】少なくとも、使える条件とこれから求めるものを明白にしておく。

以上3点を心掛けていないと、将来色々な問題に直面したときに問題解決へは至らず、迷宮世界へ迷い込むことになります。

この世界はまだまだ明確な答えがわからない方が多いので、人間の英知で真理を探究する必要性があります。若い高校生の時代に、作図し模型を作成して自分の手で自然の真理を探究しようとする源は面白いと「感動」することです。この問題を通して「感動」を味わって欲しいと願っています。

さて、この問題はベシコビッチ集合を3次元化した問題から引用しました。コンテストに出題した分割方法を x y 軸両方に更に分割していくと右下図のようなパイナップルの葉のような集合になります。

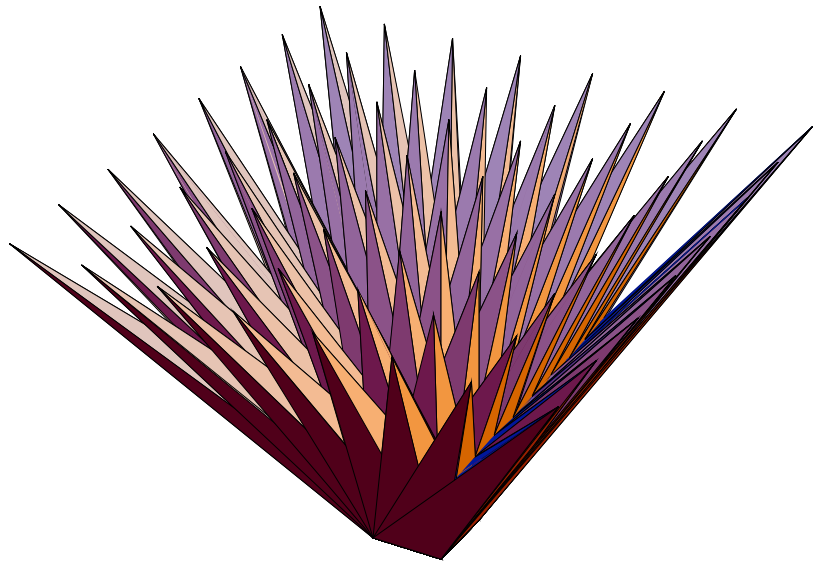
この葉の形を見て数学者でなくても何か奇妙な面白さを感じると思います。その奇妙な面白さこそが、大切なのです。

数学は数学者になるための数学の世界だけのものではありません。特に、この分野は応用性が高く現代社会にとっても役に立っています。

その理論の応用は医学「放射線による癌治療」分野に応用されています。

がん細胞に放射線を照射すると、がん細胞のDNAが破壊され死滅するが、単純に広範囲に照射するとがん細胞だけではなく正常細胞も死滅してしまう。がんを治療するには、正常部位へ照射する線量を少なくし、病巣部分に集中して照射する必要がある。そのために低レベルの放射線を多方向から照射することが重要である。パイナップルの葉っぱの先端から放射線が発射されるのを実用化した「リニアック」(右図)

はCTやMRI等の画像診断機器によるデータに基づいて、詳しい線分布図(下図)を作成して



治療計画を立案し病巣部分へ集中照射する放射線治療機器である。手術することなく患者に負担のかからない医療機器です。さらに頻繁に利用されるCTやMRIは「フーリエ変換」「ラドン変換」を応用したものであるし、最近の遺伝子治療や創薬の分野では「グラフ理論」が活用されています。多くの数学の理論が医学分野へと応用されています。例え、数学を専門に研究する気

持ちがなくても数学は、こんなに世の中に有益なのだから、しっかりと高校と大学で数学を勉強する必要があります。

「北海道札幌北高等学校 松本睦郎」