問題３

m，n は自然数，p，q は整数であるとする。

(1)　等式 $9m+7n=200$ を満たす m，n の値をすべて求めよ。

(2)　$\dfrac{3m}{7}+\dfrac{n}{3}$ の値が $\sqrt{5}$ に最も近くなるような m，n の値を求めよ。（可能なかぎり，$\sqrt{5}$ の近似値 2.236… を用いないで求めよ）

(3)　等式 $12p-6q=3$ を満たす整数 p，q は存在しないことを示せ。

(4)　等式 $13p-5q=2$ を満たす p，q を整数 k を用いて表せ。（例えば，等式 $7p-4q=1$ を満たす整数 p，q は，整数 k を用いて，$p=4k+3$，$q=7k+5$ と表すことができる）

(5)　p，q が等式 $2p-3q=17$ を満たすとき，p^2+q^2 の最小値とそのときの p，q の値を求めよ。

着眼点

　整数に関する問題の中から「不定方程式」に関する問題を出題しました。

(1)　「あてずっぽう」でも見つかるかもしれませんが，それですべてかどうかはきちんと議論しないといけません。

(2)　(1)の応用ですが，$\sqrt{5}$ は整数でないので，どのように「最も近くなる」ようにするかがポイントです。

(3)　整数についての簡単な性質を利用します。

(4)　(1)では「m，n は自然数」という条件があるために解は有限個しかありませんが，ここでは「p，q は整数」であるため，解は無数にあります。それらの解をきちんと表現できるかが重要です。

(5)　見慣れた「２次関数の最大，最小」の問題のようですが，「p，q は整数」であるために，単に代入すればよいというわけにはいきません。(4)が手がかりになります。

解答例

(1)　$9m+7n=200$ より　$n=\dfrac{200-9m}{7}$　…①

n は自然数であるので　$n \geqq 1$　であるから

$$\frac{200-9m}{7} \geqq 1 \qquad \text{ゆえに} \quad m \leqq \frac{193}{9}=21.4\cdots$$

①において，左辺は自然数なので，右辺も自然数。したがって，$200-9m$ が 7 の倍数になるような自然数 m の値（ただし，$m=1$，2，3，…，21）を求めると

$m=2$，9，16

これと①から，$(m,\ n)=(2,\ 26)$，$(9,\ 17)$，$(16,\ 8)$

(2)　$\dfrac{3m}{7}+\dfrac{n}{3}=\dfrac{9m+7n}{21}$ が $\sqrt{5}$ に最も近くなるためには，$9m+7n$ が $21\sqrt{5}$ に最も近くなればよい

m，n は整数であるから，$9m+7n$ は整数である

$21\sqrt{5}=\sqrt{2205}$ であり，$46.5^2=2162.5<2205<2209=47^2$ であるから，

$21\sqrt{5}=\sqrt{2205}$ に最も近い整数は 47 で，2 番目以降は 46，48，45，49，…となる

ⅰ）$9m+7n=47$ を満たす自然数 m，n は存在しない

（$\because 7n=47-9m$ に $m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ を代入すると

$7n=38,\ 29,\ 20,\ 11,\ 2,\ \cdots$ となり，これを満たす自然数 n は存在しない）

ⅱ）$9m+7n=46$ とすると，これを満たす自然数 m，n は

$$(m,\ n)=(2,\ 4)$$

よって，$\dfrac{3m}{7}+\dfrac{n}{3}$ が最も $\sqrt{5}$ に近くなるのは　$(m,\ n)=(2,\ 4)$　のとき

(3)　$12p-6q=3$　より　　$4p-2q=1$

$$2(2p-q)=1$$

p，q は整数なので，$2p-q$ も整数。よって，左辺は 2 の倍数となり，右辺が奇数であることに反するので，$12p-6q=3$ を満たす整数 p，q は存在しない

(4)　　$13p-5q=2$　…①

$p=-1$，$q=-3$ は①を満たすので

$$13\times(-1)-5\times(-3)=2 \quad \cdots②$$

が成り立つ

①－②より

$$13(p+1)-5(q+3)=0$$

$$13(p+1)=5(q+3)$$

$p+1$ は整数であるから，左辺は 13 の倍数。よって，右辺も 13 の倍数でないといけないので，整数 k を用いて，

$$q+3=13k \quad \cdots③$$

と表せる。このとき，

$13(p+1)=5\times 13k$　より　$p+1=5k$　…④

ゆえに，③と④から　　$p=5k-1$，$q=13k-3$

注）解の表し方は他にもある（$p=5k+4$，$q=13k+10$ など）

(5)　(4)と同様にして $2p-3q=17$ の一般解を求めると

$$p=3k+1,\ q=2k-5$$

が得られる

よって

$$\begin{aligned} p^2+q^2 &= (3k+1)^2+(2k-5)^2 \\ &= 13k^2-14k+26 \\ &= 13\left(k-\frac{7}{13}\right)^2+\frac{289}{13} \end{aligned}$$

k は整数であることと，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{7}{13}<1$ であることから

p^2+q^2 は，$k=1$，すなわち，$p=4$，$q=-3$ のとき最小値 25 をとる