

問題 3

m, n は自然数, p, q は整数であるとする。

- (1) 等式 $9m + 7n = 200$ を満たす m, n の値をすべて求めよ。
- (2) $\frac{3m}{7} + \frac{n}{3}$ の値が $\sqrt{5}$ に最も近くなるような m, n の値を求めよ。(可能なかぎり, $\sqrt{5}$ の近似値 2.236... を用いないで求めよ)
- (3) 等式 $12p - 6q = 3$ を満たす整数 p, q は存在しないことを示せ。
- (4) 等式 $13p - 5q = 2$ を満たす p, q を整数 k を用いて表せ。(例えば, 等式 $7p - 4q = 1$ を満たす整数 p, q は, 整数 k を用いて, $p = 4k + 3, q = 7k + 5$ と表すことができる)
- (5) p, q が等式 $2p - 3q = 17$ を満たすとき, $p^2 + q^2$ の最小値とそのときの p, q の値を求めよ。

配 点

(1)~(5) 各 8 点

講 評

この問題の作成後に発表された, 次の学習指導要領(各教科各科目でどのような内容を教えるかという指針となるもの)の案によると, 数年後から数学Aで「整数」を扱うことになるとのこと。今回出題した「不定方程式」の問題などは思いつきでも答えにたどり着くことができるが, 論証力が試される分野でもある。将来, 学校の教員や家庭教師として高校生に数学を教えるときには, 今回のような整数問題を扱うことになるかもしれない。コンテストを契機に, きちんと論証できる力を身につけよう。

生徒諸君の答案に目を通して気づいたことを記すので, 返却された答案を見て, 自分の答案が該当していないか確認してほしい。(すべて減点の対象とした)

ア) 理由を示さずに答えのみを記していないか

「…と思われるので」「…と予想されるので」といった論述が多かったが, それらは類推でしかないので, そのまま結論づけてはいけない。

イ) 曖昧な理由で論述を省略していないか

理由を示して省略するのは(程度にもよるが)許容範囲としても, あやふやな根拠や解答者の都合で論証を省略してはいけない。

ウ) 自分に都合のいい場合だけ示していないか

特定の値や場合についてだけ示して, それを拡大解釈して結論づけるのもいけない。

一つ一つの設問で気がついたことも列挙しておく。

- (1) $m = 1, 2, 3, \dots$ とすべての場合を調べて解を求める答案が多く見られたが, 単純な計算ミスで不正解となった答案も多かった。正解を導ければよい, と考えてのことであ

ろうが、数字が大きくなった場合もすべての場合を調べるのだろうか。正解者も含めて、より一般的な解法を身につけてほしい。

また、解答の中に、「 $m=2, 9, 16, n=26, 17, 8$ 」といった書き方も目立った。これでは、 m と n の対応を示したことはない。「 $m=2$ のとき $n=26$ 」という対応を明確に示さないといけないので、「 $(m, n)=(2, 26), (9, 17), (16, 8)$ 」、あるいは、 $\left\{ \begin{matrix} m=2 \\ n=26 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} m=9 \\ n=17 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} m=16 \\ n=8 \end{matrix} \right\}$ と書くべきである。

【一般的な解法の例】

$$9m + 7n = 200 \dots \textcircled{1} \text{より, } 7(m + n) = 2(100 - m)$$

m, n は自然数であるから、 $m + n, 100 - m$ は整数である

よって、左辺は7の倍数であるが、7と2は互いに素なので、 $100 - m$ は7の倍数でなければならない

$$100 - m = 7k \text{ (} k \text{ は整数) とおくと, } m = 100 - 7k \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{を}\textcircled{1} \text{に代入すると, } 9(100 - 7k) + 7n = 200$$

$$\text{したがって, } n = 9k - 100 \dots \textcircled{3}$$

m, n は自然数であるから、 $m \geq 1, n \geq 1$

$$\text{よって, } \textcircled{2} \text{と}\textcircled{3} \text{から, } 100 - 7k \geq 1 \text{ かつ } 9k - 100 \geq 1$$

$$\text{ゆえに, } \frac{101}{9} \leq k \leq \frac{99}{7} \quad k \text{ は整数であるから, } k = 12, 13, 14$$

$$\text{これらを}\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{に代入すると, } (m, n) = (16, 8), (9, 17), (2, 26)$$

(2) $m=2, n=4$ のときだけ結果を示して「最も近い」と主張するのはあまりにもご都合主義である。きちんと根拠を示してほしい。

問題文で「 $\sqrt{5} = 2.236\dots$ を用いないで」としたのは、より一般的な解法を探してほしいからである。 $\sqrt{5} = 2.236\dots$ を使ったからといって減点はしていないが、 $\sqrt{41}$ のような値が与えられたときには、どうするのだろうか。

また、 $9m + 7n$ が $21\sqrt{5} = 46.95\dots$ に近くなるような (m, n) を求める際、「 $9m + 7n = 47$ を満たす m, n は存在しない (ので、 $9m + 7n = 46$) 」とだけ記した答案も多かった。いろいろと手を尽くしての結論だと思うが、その理由が記されていないのは残念である。どのようにしてその結論にたどり着いたかを記してほしい。

(3) 条件式を $p = \frac{2q+1}{4}$ と変形して、「 $2q+1$ は奇数だから…」と書かれた答案が多かったが、やはり、「 q は整数なので」と一言添えることが大事である。

また、条件式を $4p - 2q = 1$ と変形して、「左辺は偶数だから」とした答案も多く見られた。頭の中では「 $4p$ は偶数だし、 $2q$ も偶数だから、偶数同士の差は偶数」と考えてのことだろうが、そうならばそう明記すべきである。ただし、偶数とは「 $2 \times (\text{整数})$ 」の形

をした整数であるから、左辺が偶数であることを示すならば、 $2(2p-q)$ の形にするほうが確実である。

(4) 問題文で、 $7p-4q=1$ の場合を示したが、それを拡大解釈した答案が多かった。

まずは、「 p, q が整数 k についての 1 次式になる」とはどこにも書いていないので、 $p=ak+b, q=ck+d$ とおける根拠はない。

また、仮に 1 次式だとしても、 $p=ak+b, q=ck+d$ を $13p-5q=2$ に代入して、

$$13(ak+b)-5(ck+d)=2 \quad \text{より、}$$

$$(13a-5c)k+(13b-5d)=2$$

であるから、「これが k についての恒等式だから」（なぜ、恒等式？）として、

$$13a-5c=0$$

を導いている答案が多かった。しかし、 $13a-5c=0$ から得られるのは $a:c=5:13$ であって、 $a=5, c=13$ は得られない。（ $a=10, c=26$ でも $13a-5c=0$ を満たす！）

さらには、「 $p=5k+4, q=13k+10$ とおくと、 $13p-5q=2$ を満たす」という答案も多かった。必要条件と十分条件を取り違えた答案で、ご都合主義も甚だしい。 $p=10k-1, q=26k-3$ でも $13p-5q=2$ を満たすが、これでは、 $p=14, q=36$ という解を表せていないのだから、この解き方はまったく正しくない。

(5) (4)と同じことがいえる。

また、「解答と解説」には(4)と同様に p, q を整数 k を用いて表し、 p^2+q^2 を k の 2 次関数と考える方法を掲載したが、 k を用いずに、 $q=\frac{2p-17}{3}$ （または $p=\frac{3q+17}{2}$ ）と

して、 p^2+q^2 に代入して平方完成する方法でもよい。しかし、 $q=\frac{2p-17}{3}$ を代入して

$$p^2+q^2=\frac{13}{9}\left(p-\frac{34}{13}\right)^2+\frac{289}{13}$$

と平方完成した後、何の説明もなく、 $p=4, q=-3$ のとき

最小値 25 をとる、と記してある答案もかなりあったし、何か書いてあるにしても説明とは認められない落書き程度のもも多かった。（ $p=\frac{3q+17}{2}$ を代入した場合も同じ）

おそらく、このような 2 次関数の問題を解いたことがあるので、軸からできるだけ近く、 p, q が整数になるような値を見つければよいと考えてのことであろうが、論述をおろそかにしてはいけない。普段から、答えが合えばよい、と考えて問題を解くのではなく、説明を丁寧を書くよう心がけることが必要である。

40点満点を獲得した62南元君、60小森君も立派であるが、1年生ながら合同式を上手に用いて解いた355松浦君もすばらしい。今後も精進を重ねてほしい。

(北海道札幌白石高等学校 平間順宏)