

問題 4

関数 $f(x)$ は次の条件(I)~(IV)を満たしている。

(I) 定義域は $-1 < x < 1$, 値域は実数全体である。

$$(II) \quad f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

($-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$ のとき, $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ である。)

$$(III) \quad f\left(\frac{9}{11}\right) = 1$$

(IV) 任意の実数 k に対して, 方程式 $f(x) = k$ を満たす x は, ただ 1 つ存在する。

次の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ の値を求めよ。
- (2) $f(-x) = -f(x)$ を示せ。
- (3) $f(x) = -1$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$ となる x の値をそれぞれ求めよ。
- (4) $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = s$, $f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right) = t$ のとき, $f(x)$, $f(y)$ を s , t で表せ。さらに,
 $f(x) \cdot f(y) = 2009$ を満たす s , t の値を求めよ。ただし, s , t は正の整数とする。
- (5) (4)で求めた s , t のうち, s の最大値を s_0 , そのときの t の値を t_0 とするとき,
 $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = s_0$, $f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right) = t_0$ となる x の値を推定せよ。ただし, s , t の値が 1 組しかないときは, それを s_0 , t_0 とする。

配 点

- (1) 5 点 (2) 5 点 (3) 12 点 (4) 12 点 (5) 6 点

講 評

多くの生徒が関数方程式の扱い方になれてないようであり, 非常に出来が悪かった。設問(1)(2)が出来る生徒は関数方程式の問題を練習したことのある生徒であり, 設問(3)(4)(5)にも十分対応していたように感じた。

代表的な関数方程式の問題, 例えば, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ 等について学習することが必要である。

$f(x)$ を 1 次関数, 2 次関数, あるいは三角関数と勝手に決めている答案が非常に多かった。具体的な関数を決めた答案に対しては, 答えが合っても点数は与えないことにした。残念ながら, $f(x)$ が対数関数であることに気がついた生徒はいなかったようである。

(1)について, 答えだけを書いている答案が非常に多く, 点数を与えようか (5 点でなくても 2 点とか) 悩んだ。しかし, マークシートではなく記述の問題なので, 少し厳しい採

点ではあったが 0 点とした。

(2)について、奇関数／偶関数ということから証明しようとした答案があったが、与えられた条件からはグラフが原点に関して対称、あるいは y 軸に関して対称であることは分からないはずである。

(3)について、 $f(x) = -1$ となる x の値が $x = -\frac{9}{11}$ と答えた解答の中に、間違って理解しているような答案があった。

(4)について、 s, t の値を 3 組答えている生徒は少なく、1 組で終わっている答案が多かった。整数問題としては基本的であるが、 $2009 = 7^2 \times 41$ の素因数分解に気がつきにくかったようである。

(5)について、(4)の設問まで出来る生徒の多くは(5)も出来ていた。しかし、ちょっとした勘違いや、解答例のようなシンプルな答えになっていない答案が若干みられた。

(北海道岩見沢東高等学校 大和達也)