

着眼点 表をうまく使えば視覚的にもよくわかることがあります。

(1)～(4)はぜひとも解けてほしい問題です。

(5)は女の子と最も多くダンスをした男の子に着目するという発想が浮かべばうまくいきます。

いずれの問題も計算力だけではどうにもできません。これらの問題は表を見て考えながら、言葉をつかって論証していくことができるかどうかを問うものです。

解答例 (1) 次の通り。

	g_1	g_2	g_3
b_1	○		○
b_2		○	○

(2) 次の通り。

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
b_1	○	○			○	○
b_2	○			○		
b_3			○		○	○
b_4				○		
b_5	○					
b_6				○	○	

(3) (2)の表を用いる。

例えば右の表の◎をペアに選べば

(b_1, g_2)

(b_3, g_3)

(b_4, g_4)

(b_5, g_1)

(b_6, g_5)

の5ペアができる。

(他の組み合わせもある)

(4) (2)の表を用いる。

b_4 と b_5 には○が1つずつしかついていないのでこれらの○を選んでペア(b_4, g_4)と(b_5, g_1)を作る。すると b_2 は g_1, g_4 にしか○がついていない、すなわちこの2人としかダンスをしていない。したがって b_2 にはペアの女の子を選ぶことができない。

(5) 表を用いて考える。①および②の条件は表でいえば

①どの男の子にも少なくとも1箇所○がつかないところがある

②どの女の子にも少なくとも1箇所○がついている

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
b_1	○	◎			○	○
b_2	○			○		
b_3			◎		○	○
b_4				◎		
b_5	◎					
b_6				○	◎	

ことを意味している。

示したいことは表の中に2人の男の子bとb' および2人の女の子gとg' がいて、表が右のようなパターンになっていることである。

		g		g'	
		:		:	
b	...	○
		:		:	
b'	○	...
		:		:	

全ての男の子の中で最も多く○がついた子(すなわち女の子と最も多くダンスをした男の子)をbとする(そのような男の子が複数いる場合はそのうち誰か1人をbとする)。

条件①よりbには○がついていない女の子がいる。その女の子(すなわちbとダンスをしなかった女の子)を1人選びg'とする。

条件②よりg'には○がついている男の子がいる。その男の子(すなわちg'とダンスをした男の子)を1人選びb'とする。

このとき、ある女の子gで、bには○がついているがb'には○がついていない子がいることがいえる。実際、もしこのような女の子gがいないと仮定すると、bに○がついている女の子には全てb'にも○がついていることになる。そうするとb'の○の数がbの○の数を超過してしまい、bに最も多く○がついているということに矛盾する。

この2組のペア(b, g)と(b', g')がもとめるペアである。

【配点】(1)4点 (2)5点 (3)6点 (4)10点 (5)15点

【講評】今回の問題は複雑な計算や公式などは必要としませんが、表を書いて言葉で論証する問題にしました。とっつきやすかったためか、得点はかなり高くなりました。

(1)と(2)についてはほとんどの人ができていました。

(3)については解答例以外にも複数の正解があります。この問題もよくできていました。答えだけでなく、どのように考えたのかまで詳しく説明の文を書してくれた人もいます。

(4)について、6組のペアができない理由はわかっていると思われるのだけど、実際に言葉を使って説明するとなるとうまく説明ができていない解答もいくつかありました。解答例のように一人としかダンスをしなかった男の子に着目したもののほか、一人としかダンスをしなかった女子に着目しても同じように考えられます。これらが一番シンプルな解答でしょうが、そのほか多少回りくどくても一生懸命説明してくれた解答もありました。

(5)については完全に説明できている解答はほとんどありませんでした。最も多かった誤答例は「そのようなペアがありうる」というあいまいなものです。問題文の「ある2組のペアで次のようなものがあることを示しなさい」というのは、「そのようなペアが本当に存在するからそれをみつけてください」ということを意味しています。そのようなペアがあっても矛盾しないということを述べただけで

は存在の証明にはなりません。次に多かった誤答例は男の子2人、女の子2人の場合だけを証明して、一般の場合も同様であるとしたものです。数学的な考え方として「特殊化」の考え方はとても大切です。問題の構造を理解したり解の発見をやさしくすることができたりするからです。しかしこれでは問題の一般性がかなり失われているので2人ずつの場合の証明を一般の場合にも同様とするのは無理がありすぎます。そのほかにも背理法や対偶を使って証明しようとした解答もありましたが、論理的に破綻しているものが散見されました。

解答例と同じように全ての男の子の中で女の子と最も多くダンスをした男の子に着目した正解者が1名(旭川東・山川大志くん)いました。また、そのようなペアが存在しないと仮定するとどんどん多くの女の子とダンスをした男の子を構成することができて矛盾であると証明した正解者が1名(札幌東・山崎健一くん)いました。そのほかにも特殊な場合について多くの場合わけをして説明できていた解答もいくつかありました。

皆さんの発想を面白く読ませていただきました。数学的な発想や考え方のよさに気がつけば、感性に訴えて、興味を持って取り組むことができますよね。

(札幌静修高等学校 杉本幸司)