

### 着眼点

- (1)  $f(x)=\sqrt{2}(x-1)(x-2)+2$  の変形に気が付くこと。
- (2)  $g(x)=\sqrt{3}(x+1)(x-3)+1$  の変形に気が付くこと。
- (3) 背理法を用いる。すなわち、 $h(t)$  が有理数であることを仮定し、矛盾することを示す。

### 解答例

(1)①  $f(1)=2, f(2)=2, f(3)=2\sqrt{2}+2$

②  $f(s)=\sqrt{2}(s-1)(s-2)+2$  と表すことができる。

すなわち、無理数 $\times$ 有理数(0でない有理数)=無理数となるので、 $f(s)$ は無理数となる。

(2)  $g(x)=\sqrt{3}(x+1)(x-3)+1$  と表すことができるので、 $x=-1, 3$  のとき、 $g(x)$ は有理数となる。

(3)  $h(x)=ax^2+bx+c$  において、 $h(p)=\alpha, h(q)=\beta$  ( $\alpha, \beta$ は有理数) とすると、

$$ap^2+bp+c=\alpha \quad \dots\dots①$$

$$aq^2+bq+c=\beta \quad \dots\dots②$$

次に、 $t$ が $p, q, r$ 以外の有理数とし、 $h(t)$ が無理数でない、すなわち有理数であると仮定する。このとき、 $h(t)=u$  ( $u$ は有理数) とすると、

$$at^2+bt+c=u \quad \dots\dots③$$

②-① から、 $a(q^2-p^2)+b(q-p)=\beta-\alpha$

$p \neq q$  より、 $a(q+p)+b=\frac{\beta-\alpha}{q-p}$

$\frac{\beta-\alpha}{q-p}=\gamma$  とおくと、 $p, q, \alpha, \beta$ は有理数なので、 $\gamma$ も有理数である。

$$a(q+p)+b=\gamma \quad \dots\dots④$$

同様に、②、③より、

$$a(t+q)+b=\delta \quad \dots\dots⑤$$

と表すことができる。(ただし、 $\delta=\frac{u-\beta}{t-q}$  で、 $\delta$ は有理数)

④、⑤より、 $a=\frac{\gamma-\delta}{p-t}$  となり、 $a$ は有理数である。

④より、 $b=\gamma-a(q+p)$  であるから、 $b$ も有理数である。

①より、 $c=\alpha-ap^2-bp$  であるから、 $c$ も有理数である。

このとき、 $a, b, c, r$ が有理数であることから、 $h(r)=ar^2+br+c$ は有理数となり、 $h(r)$ が無理数であるという仮定に矛盾する。

よって、 $h(t)$ は無理数である。

### お詫び

問題作成、編集、印刷の過程において、(2)の設問で「 $x$ が有理数」という条件が抜けてしまいました。多大な迷惑をかけたことを深くお詫び申し上げます。今後、このようなミスがないようにいたします。

採点につきましては、色々な不満があるかと思いますが、「 $x$ が有理数」として解答した生徒も、「 $x$ が実数」とし

て解答した生徒も同様に扱いました。

**配点** (1)①6点 (各2点) ②6点 (2)8点 (3)20点

**講評**

- (1) 良くできていました。しかし、②について「 $\sqrt{2}(s-1)(s-2)=\text{無理数}\times\text{有理数}(0\text{でない})=\text{無理数}$ 」とした方がわかりやすい解答かと思います。
- (2) 良くできていました。解答例のような簡単な説明で十分かと思いますが、要領よくまとまっていない解答が多数ありました。逆に、説明なしで答えだけという答案もありましたが、そういう答案は0点としました。
- (3) 正解はいませんでした。しかし、いろいろ考えてくれた生徒が多く、出題者としては嬉しい限りです。

採点をして次のようなことを感じました。

- ・条件を自分の都合の良いように解釈している。

例えば、「 $h(p)$ 、 $h(q)$ が有理数なので、 $h(x)=a(x-p)(x-q)+k$  (ただし、 $k$ は有理数)とおくことができる」という解答が多かったが、この場合、 $h(p)=h(q)=k$ となる。与えられた条件では必ずしも $h(p)=h(q)$ とは限らない。

- ・すべての場合を考えていない。(見落としがある)
- ・基本的なミスがある。例えば、「無理数+無理数=無理数」, 「無理数= $\sqrt{\quad}$ の数」と決めている, 等。
- ・数式をつかわないで、言葉だけで説明している答案が多く、そのため、どうしても曖昧な内容の解答となっていた。

(北海道岩見沢東高等学校 大和達也)