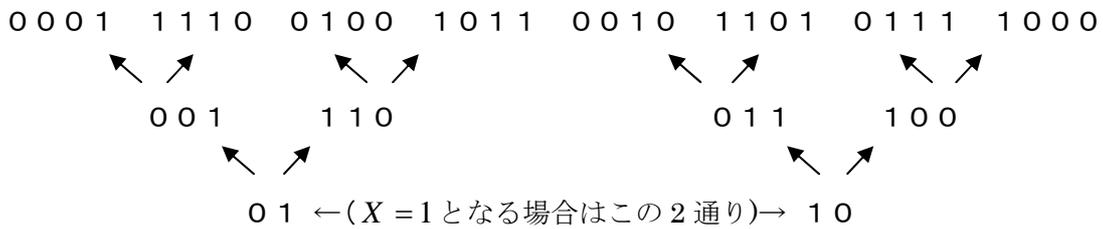


着眼点

- (1) すべての場合は 16 通りしかないので、必要な場合を書いて数え上げる。
- (2) (1)から問題の構造がわかれば、コイン投げ n 回の表裏の出方 2^n 通りのうち、 $X = k$ となる場合が $4_{n-2}C_k$ 通りであることがわかる。
- (3) これは(4)を計算させるためのヒント。
- (4) (2),(3)から二項定理を用いて計算する。

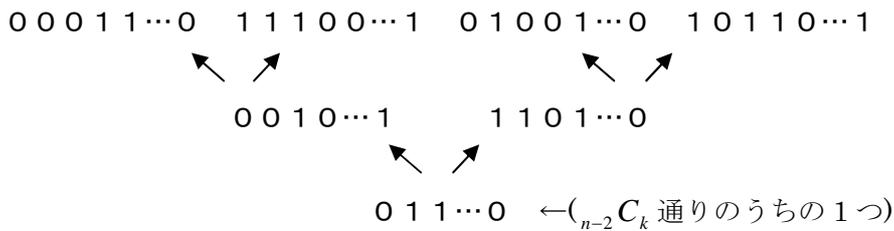
解答例

- (1) $n = 4$ のとき、硬貨の表裏の出方は全部で 2^4 通りあり、このうち $X = 1$ となるのは下の図の 8 通り。



よって、求める確率は $\frac{8}{2^4} = \frac{1}{2}$ …(答)

- (2) 隣り合う数の差をとる操作を 1 回または 2 回行った後の数はどれも 1 か 0 である。差をとる操作を 2 回行った後の $(n-2)$ 個の数の列のうち 1 が k 個あるものは、 $_{n-2}C_k$ 通りある。この各々について、差をとる 1 つ前の $(n-1)$ 個の数の列は 1 で始まる列と 0 で始まる列の 2 通りずつあり、さらにこの 2 通りの各々について差をとる前の n 個の数の列も同様に 2 通りずつある。



したがって、硬貨の表裏の出方 2^n 通りのうち、 $X = k$ となる場合は $_{n-2}C_k \times 2 \times 2 = 4_{n-2}C_k$ (通り)。

よって、 $X = k$ となる確率は $\frac{4_{n-2}C_k}{2^n} = \frac{_{n-2}C_k}{2^{n-2}}$ …(答)

(3) $k {}_m C_k = k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} = m \cdot \frac{(m-1)!}{(k-1)! \{(m-1)-(k-1)\}!} = m {}_{m-1} C_{k-1}$

よって、 $k {}_m C_k = m {}_{m-1} C_{k-1}$ (証明おわり)

- (4) (2),(3)および二項定理を用いて

$$\begin{aligned}
E &= 0 \cdot \frac{n-2}{2^{n-2}} C_0 + 1 \cdot \frac{n-2}{2^{n-2}} C_1 + 2 \cdot \frac{n-2}{2^{n-2}} C_2 + \cdots + (n-2) \cdot \frac{n-2}{2^{n-2}} C_{n-2} \\
&= \frac{1}{2^{n-2}} \{1 \cdot {}_{n-2}C_1 + 2 \cdot {}_{n-2}C_2 + \cdots + (n-2) \cdot {}_{n-2}C_{n-2}\} \\
&= \frac{1}{2^{n-2}} \{(n-2) \cdot {}_{n-3}C_0 + (n-2) \cdot {}_{n-3}C_1 + \cdots + (n-2) \cdot {}_{n-3}C_{n-3}\} \\
&= \frac{n-2}{2^{n-2}} ({}_{n-3}C_0 + {}_{n-3}C_1 + \cdots + {}_{n-3}C_{n-3}) \\
&= \frac{n-2}{2^{n-2}} \cdot (1+1)^{n-3} \\
&= \frac{n-2}{2} \\
\text{ゆえに, } E &= \frac{n-2}{2} \cdots (\text{答})
\end{aligned}$$

配点 (1) 8 点 (2) 12 点 (3) 8 点 (4) 12 点

講評

全体的に1年生はあまりできていなく、2,3年生が点をとっていました。設問別にみると、(1)はよくできていましたが、(2)以降はあまりできていませんでした。(2)では、解答例のような解き方以外に、次のようなものがありました。

はじめの n 個の数の列を a_1, a_2, \dots, a_n 、
 差をとった $(n-1)$ 個の数の列を b_1, b_2, \dots, b_{n-1} 、
 さらに差をとった $(n-2)$ 個の数の列を c_1, c_2, \dots, c_{n-2} 、
 すなわち、

$$b_i = |a_{i+1} - a_i| \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$c_j = |b_{j+1} - b_j| \quad (j = 1, 2, \dots, n-2)$$

とすると、

$$c_j = ||a_{j+2} - a_{j+1}| - |a_{j+1} - a_j||$$

なので、

$$a_{j+2} = a_j \text{ のとき、 } c_j = 0、$$

$$a_{j+2} \neq a_j \text{ のとき、 } c_j = 1$$

ということを使って解く方法です。(2)が解けた生徒のおよそ半数がこの方法（または本質的にこれと同じ方法）で解いていました。また、答案の中に

$a_{j+2} = a_j$ をみたす列 a_j, a_{j+1}, a_{j+2} を “3つの数について左右対称”

と呼んでわかりやすく記述してあるものもありました。

(3)は(2)よりできており、(3)まで解いた生徒の多くは(4)にも手をつけていました。(4)では、(2)の答えの形から(3)を利用することに気づくことを期待していました。しかし、(4)が答えだけの答案用紙がたくさんありました。答えを予想で終わらせてはいけません。

問題を解いたらそれで終わりではなく、

「0と1の列」を“0と1と2の列”にしたらどうなるか」

など自分でいろいろ試してみると面白いと思います。興味があればやってみてください。

(北海道札幌国際情報高等学校 和田文興)