第１問

つま楊枝を使って，次のようなことを検討した．

例．４本のつま楊枝をＡくん，Ｂくんが交互に取る．取り方はＡくんが先に取ることとし，１度に１本または２本を取ることとする．最後に取ることができるのは１本のみとする．これを次のようにＡくんを先攻，Ｂくんを後攻として，つま楊枝を取る本数を野球の得点のように考え，以下のように表すこととする．

①Ｂくんが最後の１本のつま楊枝を取る場合．

回	1	2
A	1	1
B	1	1

②Ａくんが最後の１本のつま楊枝を取る場合．

回	1	2
A	1	1
B	2	×

回	1	2
A	2	1
B	1	×

(1) ５本のつま楊枝をＡくん，Ｂくんが交互に取る．取り方はＡくんが先に取ることとし，１度に１本または２本を取ることとする．最後に取ることができるのは１本のみとする．

①Ｂくんが最後の１本のつま楊枝を取るのはどのような場合か．すべての場合を例のように表にして示せ．

②Ａくんが最後の１本のつま楊枝を取るのはどのような場合か．すべての場合を例のように表にして示せ．

(2) 10本のつま楊枝をＡくん，Ｂくんが交互に取る．取り方はＡくんが先に取ることとし，１度に１本～3本を取ることとする．Ｂくんが最後の１本のつま楊枝を取る場合は何通りあるか答えよ．

(3) 16本のつま楊枝をＡくん, Ｂくん, Ｃくんの順にくり返し取る．１度に１本または２本を取ることとする．Ｃくんが最後の１本のつま楊枝を取る場合は何通りあるか答えよ．

(4) m, n, r を自然数とする．$4n+2$ 本のつま楊枝を用意し，Ａくんから先に取ることとし，１度に１本または２本を取ることとする．Ｂくんが最後の１本のつま楊枝を取る場合は何通りあるか ${}_mC_r$ の和の形で表せ．

着眼点

数学の先生との会話の中で，碁石などを取り合うようなゲームをしたらどうなるかなあという話が本問のきっかけになりました．まだまだ研究の余地はあり，ルールを変えると可能性は無限に広がります．様々にルールを変え，楽しんでほしいなあと思います．本問の背景として，ディリクレの鳩ノ巣原理（部屋割り論法）や組み合わせなどがあります．

解答例

(1) ①は以下の通り

回	1	2
A	1	1
B	2	1

回	1	2
A	2	1
B	1	1

回	1	2
A	1	2
B	1	1

②は①と同様にして

回	1	2	3
A	1	1	1
B	1	1	×

回	1	2
A	2	1
B	2	×

(2) 同様にして，

① 最後に A くんと B くんが 1 本ずつ，つま楊枝を取るとすると，

回	1	2	3	4	5
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1

上の場合の 1 通り

回	1	2	3	4
A	1	1	2	1
B	1	1	2	1

上の場合については $(1, 1, 1, 1, 2, 2)$ の並べ替えを考えて，$\dfrac{6!}{2!4!} = 15$ 通り

回	1	2	3
A	2	2	1
B	2	2	1

上の場合の 1 通り

回	1	2	3	4
A	1	1	1	1
B	1	1	3	1

上の場合については $(1, 1, 1, 1, 1, 3)$ の並べ替えを考えて，6 通り

回	1	2	3
A	1	3	1
B	1	3	1

上の場合については $(1, 1, 3, 3)$ の並べ替えを考えて，$\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通り

回	1	2	3
A	1	2	1
B	2	3	1

上の場合については $(1, 2, 2, 3)$ の並べ替えを考えて，$\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通り

以上より①は 41 通り

② 最後に A くんが 2 本，B くんが 1 本，つま楊枝を取るとすると，

回	1	2	3	4
A	1	1	1	2
B	1	1	2	1

上の場合については $(1, 1, 1, 1, 1, 2)$ の並べ替えを考えて，6 通り

回	1	2	3
A	1	2	2
B	2	2	1

上の場合については $(1, 2, 2, 2)$ の並べ替えを考えて，4 通り

回	1	2	3
A	1	2	2
B	1	3	1

上の場合については $(1, 1, 2, 3)$ の並べ替えを考えて，$\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通り

以上より②は 22 通り

③ 最後に A くんが 3 本，B くんが 1 本，つま楊枝を取るとすると，

回	1	2	3	4
A	1	1	1	3
B	1	1	1	1

上の場合の 1 通り

回	1	2	3
A	1	2	3
B	1	2	1

上の場合については (1, 1, 2, 2) の並べ替えを考えて，$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り

回	1	2	3
A	1	1	3
B	1	3	1

上の場合については (1, 1, 1, 3) の並べ替えを考えて，4 通り

回	1	2
A	3	3
B	3	1

上の場合の 1 通り

以上より③は 12 通り

<u>①〜③より 75 通り</u>

(3) 同様にして，

回	1	2	3	4	5
A	2	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
C	1	1	1	1	1

上の場合については C くんが最後に 1 本取ることを考えて，14 通り

回	1	2	3	4
A	1	1	2	2
B	1	1	2	1
C	1	1	2	1

上の場合は (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) の並べ替えを考えて, $\dfrac{11!}{7!4!} = 330$ 通り

回	1	2	3
A	2	2	2
B	2	2	1
C	2	2	1

上の場合は (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) の並べ替えなので, 8 通り

<u>以上より 352 通り</u>

(4) 同様にして,

① 最後に A くん, B くんがつま楊枝を 1 つずつ取るとすると,

回	1	2	$\cdots$	$2n-1$	$2n$	$2n+1$
A	1	1	$\cdots$	1	1	1
B	1	1	$\cdots$	1	1	1

上の場合については 1 通り

回	1	2	$\cdots$	$2n-2$	$2n-1$	$2n$
A	1	1	$\cdots$	1	2	1
B	1	1	$\cdots$	1	2	1

上の場合については (1, 1, $\cdots$,2, 2) の並べ替えを考えて,
$\dfrac{(4n-2)!}{(4n-4)!2!} = {}_{4n-2}C_2$ 通り

回	1	2	$\cdots$	$2n-3$	$2n-2$	$2n-1$
A	1	1	$\cdots$	2	2	1
B	1	1	$\cdots$	2	2	1

上の場合については (1, 1, $\cdots$,2, 2, 2, 2) の並べ替えを考えて,
$\dfrac{(4n-4)!}{(4n-8)!4!} = {}_{4n-4}C_4$ 通り

A くん，B くんがつま楊枝をともに k 回 2 本ずつ取ると考えると，
$\dfrac{\{2(2n-k)\}!}{\{2(2n-2k)\}!(2k)!} = {}_{4n-2k}C_{2k}$ 通り

回	1	2	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$
A	2	2	$\cdots$	2	2	1
B	2	2	$\cdots$	2	2	1

上の場合については 1 通り

以上より①は ${}_{4n}C_0 + {}_{4n-2}C_2 + {}_{4n-4}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}$ 通り

② 最後に A くんが 2 本，B くんが 1 本，つま楊枝を取るとすると，

回	1	2	$\cdots$	$2n-2$	$2n-1$	$2n$
A	1	1	$\cdots$	1	1	2
B	1	1	$\cdots$	1	2	1

上の場合については $\dfrac{\{2(2n-1)\}!}{\{2(2n-1)-1\}!} = {}_{4n-2}C_1$ 通り

回	1	2	$\cdots$	$2n-4$	$2n-3$	$2n-2$	$2n-1$
A	1	1	$\cdots$	1	2	1	2
B	1	1	$\cdots$	1	2	2	1

上の場合については
$\dfrac{\{2(2n-2)\}!}{\{2(2n-2)-3\}!3!} = {}_{4n-4}C_3$ 通り

A くん，B くんがつま楊枝をともに k 回 2 本ずつ取ると考えると，
$\dfrac{\{2(2n-k)\}!}{\{2(2n-k)-(2k-1)\}!(2k-1)!} = {}_{4n-2k}C_{2k-1}$ 通り

回	1	2	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$
A	2	2	$\cdots$	2	1	2
B	2	2	$\cdots$	2	2	1

上の場合については $2n$ 通り

以上より②は ${}_{4n-2}C_1 + {}_{4n-4}C_3 + {}_{4n-6}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1}$ 通り

①②より

$({}_{4n}C_0 + {}_{4n-2}C_2 + {}_{4n-4}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n})$
$+({}_{4n-2}C_1 + {}_{4n-4}C_3 + {}_{4n-6}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1})$
$= \underline{1 + {}_{4n-1}C_2 + {}_{4n-3}C_4 + {}_{4n-5}C_6 + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n}}$ 通り

$\boxed{\text{講　評}}$

数学コンテスト終了後に配布した「解答と解説」の第１問の（２）の解答例に作成時の編集ミスがありました．謹んでお詫び申し上げます．本編の解答例を参考にしてください．

配点は (1) ① 6 点 ② 6 点 (2)8 点 (3)10 点 (4)10 点 としました．

全受験者 252 名中，正答者の人数と割合は (1) ①が 236 名，93.7%，②が 234 名，92.9%，(2) が 61 名，24.2%，(3) が 91 名，36.1% (4) が 12 名，5.0%，全問正解は 8 名，3.2%でした．

第１問の全問正答者は成田竣くん（北嶺中３年），佐藤良亮くん（北嶺高２年），大山京尋くん（札幌南高２年），佐藤悠斗くん（札幌北高１年），脇坂勇武くん（札幌北高１年），吉村啓汰くん（札幌南高２年），酒井啓太くん（札幌開成高１年），小西挙之くん（札幌北高２年）の８名でした．栄誉を称えたいと思います．また，田元慧くん（釧路湖陵高２年），清水康弘くん（旭川東高２年），磯田龍くん（旭川東高３年）の３名はほとんど満点なのですが，惜しいところで満点を逃しました．

(1) ほとんどの受験生が正答していましたが，問題文のルールをよく理解していない受験生が若干いました．見落としていたルールは以下で，１度に３本取っている場合や最後に１本より多く取っている場合がありました．

「<u>1 度に 1 本または 2 本を取ることとする．最後に取ることができるのは 1 本のみとする．</u>」

(2) 解答例は① 最後に A くんと B くんが 1 本ずつ，つま楊枝を取るとすると，41 通り，② 最後に A くんが 2 本，B くんが 1 本，つま楊枝を取るとすると，22 通り，③ 最後に A くんが 3 本，B くんが 1 本，つま楊枝を取るとすると，12 通りで合わせて 75 通りというように求めましたが，何回で終わるかという視点から 1 回はなし，2 回は 1 通り，3 回は 45 通り，4 回は 28 通り，5 回は 1 通りというように整理した受験生も多く見受けました．また，1 度に 3 本取ることを何度行うかという視点から 3 本を 3 度は 1 通り，3 本を 2 度は 10 通り，3 本を 1 度は 37 通り，さらに 3 本を 0 度の場合はすべて 1 本ずつが 1 通り，2 本を 2 度は 21 通り，2 本を 4 度は 5 通りというように整理した受験生も多く見受けました．

(3) 最後に C くんが 1 本を取るので，場合分けは 2 本が 1 度で 14 通り，2 本が 4 度が 330 通り，2 本が 7 度で 8 通りの合わせて 352 通りということになりますが，(2) より単純だったことから (3) の方が正答者は多くなりました．また，ここでも「1 度に 1 本または 2 本を取ることとする．C くんが最後の 1 本のつま楊枝を取る場合は何通りあるか答えよ．」というルールを見落としている受験生を多く見受けました．

(4) A くん，B くんの動きを表した表をうまく折りたたんでいけるよう，つま楊枝を $4n+2$ 本としました．

① 最後にAくん，Bくんがつま楊枝を1つずつ取るとすると，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_{4n-2k}C_{2k}$ 通り

② 最後にAくんが2本，Bくんが1本，つま楊枝を取るとすると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_{4n-2k}C_{2k-1}$ 通り

①②より

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{4n-2k}C_{2k}+\sum_{k=1}^{n} {}_{4n-2k}C_{2k-1}= {}_{4n}C_0+\sum_{k=1}^{n} {}_{4n-2k}C_{2k}+\sum_{k=1}^{n} {}_{4n-2k}C_{2k-1}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n} {}_{4n-2k+1}C_{2k}=\sum_{k=0}^{n} {}_{4n-2k+1}C_{2k}$$

$$=\underline{1+{}_{4n-1}C_2+{}_{4n-3}C_4+{}_{4n-5}C_6+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}}\text{ 通り}$$

〈参考〉式の途中に出てくる以下の変形は二項係数の性質やパスカルの三角形に出てくる $\underline{{}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r}$ という性質を利用しています．

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{4n-2k}C_{2k}+\sum_{k=1}^{n} {}_{4n-2k}C_{2k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} {}_{4n-2k+1}C_{2k}$$

余談ですが，2011年1月15日，16日に実施された「大学入試センター試験」の数学ⅠAの第4問(1)で ${}_8C_3p^3q^5$ という解答が登場し，(2)では ${}_8C_3$ と等しい式を選ぶという問題が出題され，${}_7C_2+{}_7C_3$ と ${}_7C_4+{}_7C_5$ を選ぶことになるのですが，このような出題は始めてではないかと思われます．上記のような変形は教科書では発展で扱われていることが多く，選択肢の中の式を順に計算していけばよい話ですが，時間のない中ではこの式変形を知っているか否かで時間的なロスは相当防げたのではないかと思います．

現代の政治や社会に象徴されるように，一般に私たちは，目の前のことは時間をかけて議論するけれども，見えない部分は知らん顔という状況に陥りがちです．数学はそのような隠された部分を解き明かすという面白味があるように思います．また解き明かす努力をすることによって，次第に思考力や洞察力が培われていくのだと思います．

今回納得のいく結果を得られなかった諸君も決して落胆することなく，学習を続け，力をつけていくことを願っています．何かに挑戦する姿勢そのものが，今求められていて，しかも生涯にわたって必要で大切なものだと思います．受験生諸君みんなに未来があり，それぞれにすべきことがあり，次代は君たちにかかっています．受験生諸君の未来に幸あれ！

問題作成や解答，解説，講評作成には多くの先生にご助言を頂きました．この場をかりて，お礼申し上げます．

北海道札幌東陵高等学校　前田勝利