

第3問

いくつかのランプが一行に並んでいる。「操作」を1回行うごとに、それらのランプのどれか1つが無作為に選ばれ、そのランプが消えていけばつき、ついていけば消える仕掛けになっている。

はじめに、3つのランプが一行に並んでいるときに、「操作」を行うとする。

- (1) 3つのランプがすべて消えている状態から、3回の「操作」を行ったとき、すべてがついている状態になる確率を求めよ。
- (2) 3つのランプがすべて消えている状態から、4回の「操作」を行ったとき、すべてが消えている状態になる確率を求めよ。

5つのランプが一行に並んでいるときに、同じ「操作」を行うとする。

- (3) 5つのランプがすべて消えている状態から、5回の「操作」を行ったとき、すべてが消えている状態になる確率を求めよ。
- (4) 5つのランプがすべて消えている状態から、5回の「操作」を行ったとき、すべてがついている状態になる確率を求めよ。
- (5) 5つのランプがすべて消えている状態から、5回の「操作」を行ったとき、ついているランプと消えているランプが交互に並んでいる確率を求めよ。
- (6) 5つのランプがすべて消えている状態から、5回の「操作」を行ったとき、ついているランプの個数の期待値を求めよ。

着眼点

この問題では、一度ついたランプでも再度選ばれれば消えるので、単に選ばれるかどうかだけでなく、消えているランプがつくのか、ついているランプが消えるのかも考えないといけません。問題文には記されていませんが、ランプに番号をつけると考えやすいと思います。

また、(2)や(5)では、解答例にあるような場合分けが的確にできるかが重要です。

解答例

- (1) 3回の「操作」で毎回異なるランプが選ばれる確率を求めればよい。ランプの選ばれ方は 3^3 通りあって、そのうち、毎回異なるランプが選ばれる場合の数は ${}_3P_3=3!$ 通り。

$$\text{ゆえに、求める確率は } \frac{3!}{3^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$$

- (2) 4回の「操作」を行ったとき、すべてが消えている状態になるのは、(ア)4回とも同じランプが選ばれる場合、(イ)3つのうち2つのランプが2回ずつ選ばれる場合、の2つの場合である。

(ア)~3つのうちどのランプが選ばれるかで3通り

(イ)~3つのうちどのランプが選ばれるかで ${}_3C_2=3$ 通り、2つのランプがどんな順序で

2回ずつ選ばれるかは●●▲▲を並べる場合の数に等しいので $\frac{4!}{2!2!}$ 通りであるから、3つのうち2つのランプが2回ずつ選ばれる場合の数は $3 \cdot \frac{4!}{2!2!}$ 通り。

(ア)(イ)から、求める確率は $\frac{3}{3^4} + \frac{3 \cdot \frac{4!}{2!2!}}{3^4} = \frac{21}{3^4} = \frac{7}{27}$

(3) 1回の「操作」を行うごとに、ついているランプの個数は奇数から偶数へ、偶数から奇数へと変わる。はじめはついているランプが0個、すなわち偶数であるから、5回の「操作」を行うと、0(偶数)→奇数→偶数→奇数→偶数→奇数となる。よって、すべて消えている状態にはならないので、求める確率は0

(4) 5回の「操作」で毎回異なるランプが選ばれる確率を求めればよい。ランプの選ばれ方は 5^5 通りあって、そのうち、毎回異なるランプが選ばれる場合の数は ${}_5P_5 = 5!$ 通り。

ゆえに、求める確率は $\frac{5!}{5^5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{24}{625}$

(5) 5つのランプを順に①, ②, ③, ④, ⑤とする。

(3)より、①③⑤が消え、②④がついている(偶数個がついている)ことはない。

よって、ついているランプは①③⑤であり、①③⑤がついている状態になるのは、(ア)①,

③, ⑤が1回ずつ選ばれ、②または④の一方が2回選ばれる場合、(イ)①, ③, ⑤のうち1つが3回、他の2つが1回ずつ選ばれる場合、の2つの場合が考えられる。

(ア)~①③⑤■ ■ (■は②または④)の順列の総数に等しいので

$$\frac{5!}{2!} \cdot 2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \cdot 2 = 120 \text{ 通り}$$

(イ)~①③⑤のうちどのランプが3回選ばれるのかで3通りあり、そのランプを▲, 残りの2つのランプを◆, ★とすると、▲▲▲◆★の順列の総数に等しいので

$$\frac{5!}{3!} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3 = 60 \text{ 通り}$$

(ア)(イ)より、求める確率は $\frac{120 + 60}{5^5} = \frac{180}{5^5} = \frac{36}{625}$

(6) (3)から、ついているランプの個数は5個, 3個, 1個のいずれかである。

(ア)~5個のランプがついている確率は、(4)より $\frac{24}{625}$

(イ)~3個のランプがついている場合

5個のランプのうちどのランプがついているかで ${}_5C_3 = 10$ 通りあり、10通りのそ

れぞれに対して(5)と同様に考えられるので、確率は $10 \cdot \frac{36}{625} = \frac{360}{625}$

(ウ)~1個のランプがついている確率は $1 - \left(\frac{24}{625} + \frac{360}{625} \right) = \frac{241}{625}$

(ア)(イ)(ウ)より、求める期待値は $5 \cdot \frac{24}{625} + 3 \cdot \frac{360}{625} + 1 \cdot \frac{241}{625} = \frac{1441}{625}$ (個)