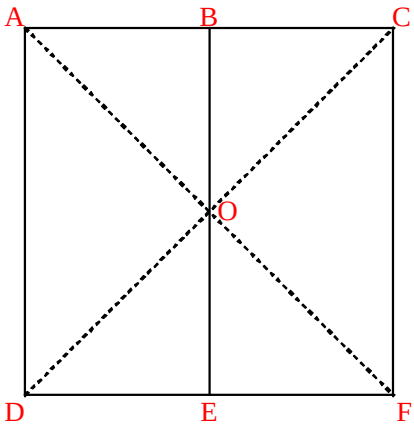
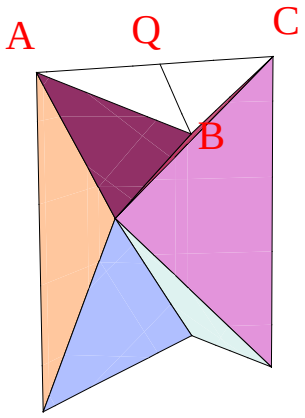
第５問

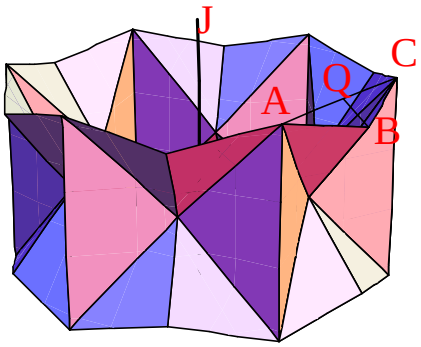


（ ―― 山折, ┈┈ 谷折）

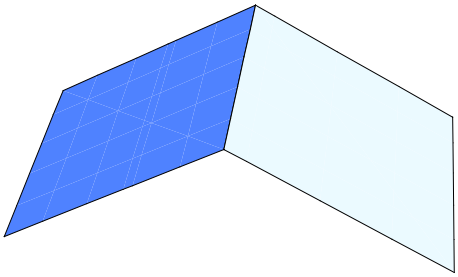
【Fig1↑】



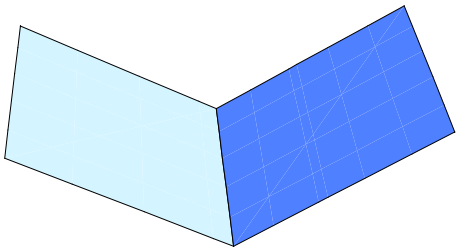
【Fig2↑】



【Fig3↑】

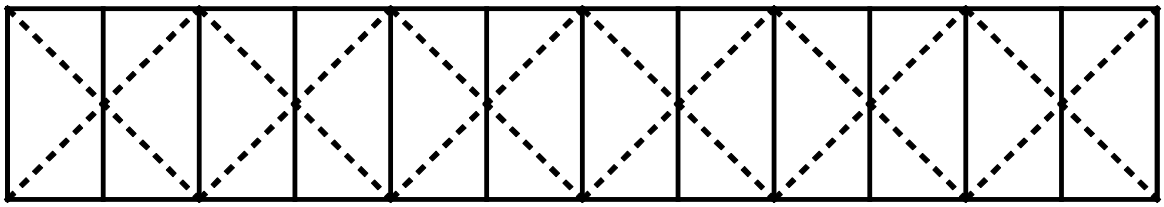


【山折↑】



【谷折↑】

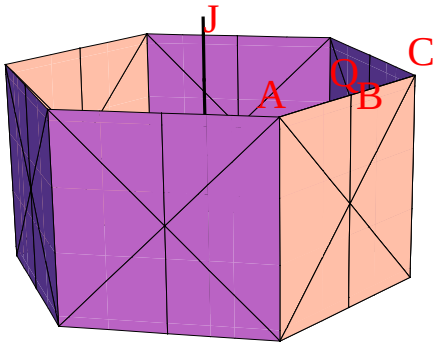
１辺の長さ２の正方形 ADFC について，辺 AC の中点 B，辺 DF の中点 E とする。
線分 BE（実線部）を山折り，線分 AF，CD を谷折りにした立体（Fig2）を作成し１単位図形とする。１単位図形（Fig2）において線分 AC の中点を Q，∠ABQ= θ とする。$0° < \theta \leqq 90°$
この１単位図形 Fig2 を横に６個接続し，更に左端と右端の辺も接続した立体（Fig3）を作成した。Fig3 の展開図は Fig4 となり，１単位図形の角 θ は６個とも同じものであるとする。



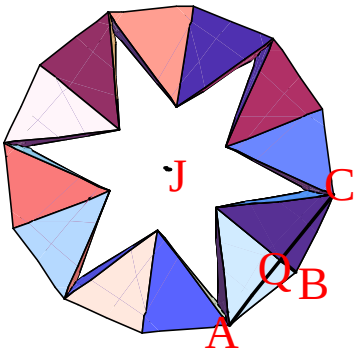
【Fig4↑展開図】

（１）１単位図形において，点 B と点 Q が一致する時 Fig5 のように正六角柱を作る。
正六角柱の中心軸 J と点 A との距離 AJ を求めよ。
又，中心軸 J と点 B との距離 BJ を求めよ。

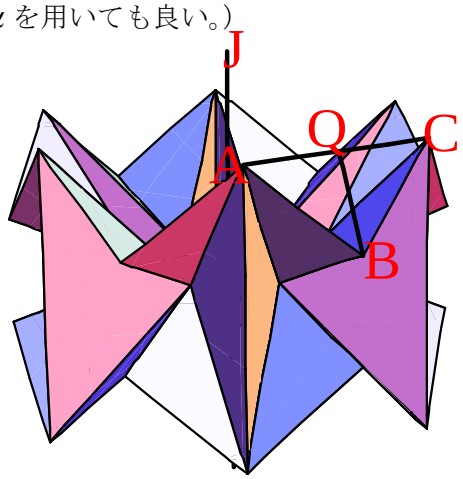
【Fig5→】



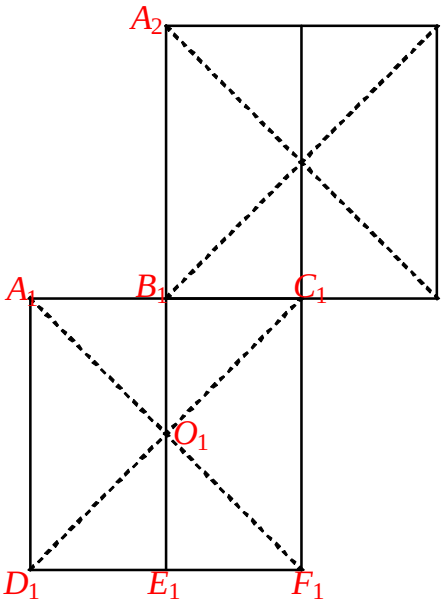
（２）$\theta = 60°$ の時，中心軸 J と点 A との距離 AJ，中心軸 J と点 B との距離 BJ とする。
誤差 BJ－AJ を求めよ。（倍角公式 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ を用いても良い。）



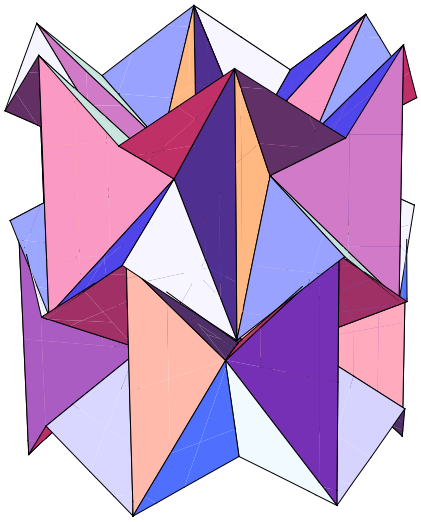
【真上からみた図↑】



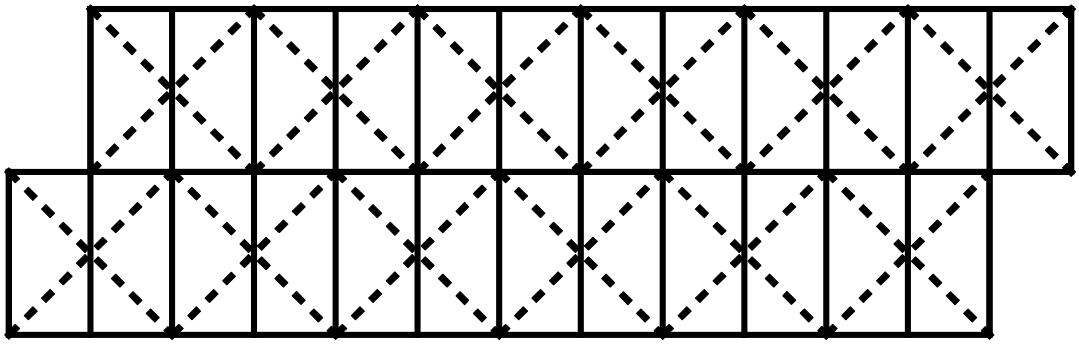
（３）Fig1 を上へ半分ずつずらしてつないだ図形（Fig6）を 1 単位図形とし，これを横に 6 個接続し，更に左端と右端の辺も接続した上下 2 段の立体（Fig7）を作成した。$\theta = 60°$ の時の Fig7 の高さ L を求めよ。



【Fig6↑】



【Fig7↑】



【Fig8↑展開図】

着眼点

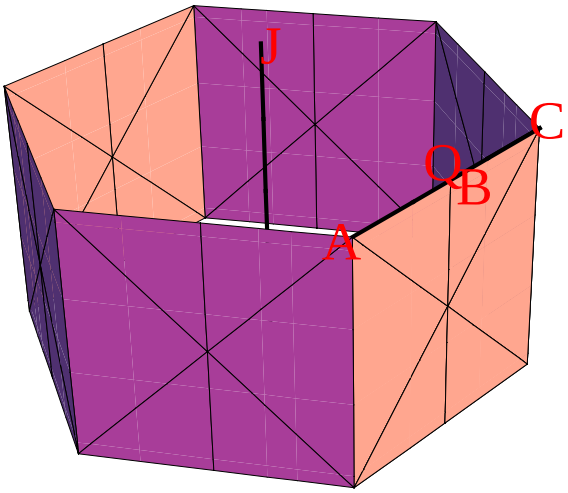
空間図形分野の問題です。実際に、紙を折ったり、切ったりして、模型を製作して考える問題です。
医療分野において、外科用の血管ステントとしての研究が進み、実用化されています。
その他、宇宙工学分野においても、活用されています。

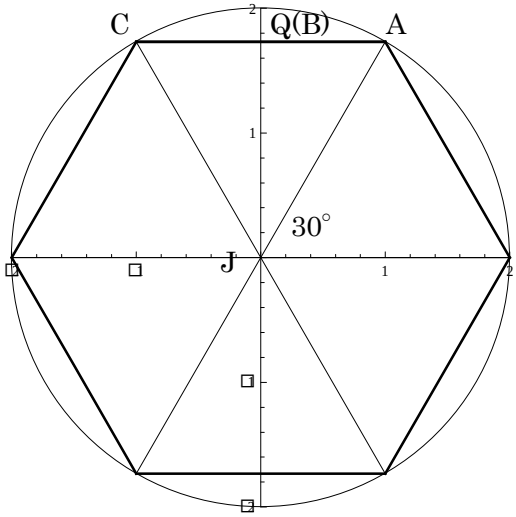
解答例

（1）点 Q と点 B は一致する時は正六角柱である。

軸 J を中心として、1 辺の長さ AC（=2）の正六角柱を形成する。

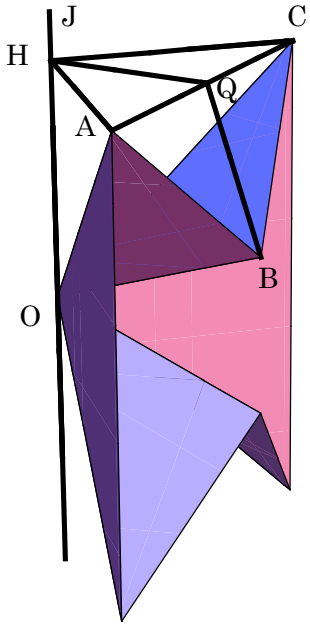
△AJC は 1 辺の長さ 2 の正三角形となる。　AJ の距離＝2…（答），BJ の距離＝$\sqrt{3}$ …（答）

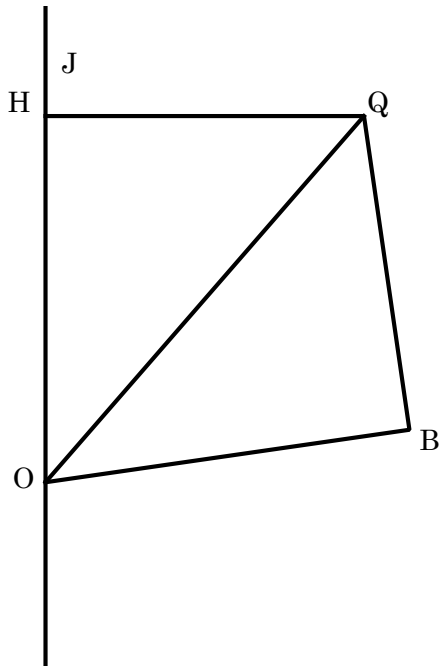




【真上から見た図↑↓】

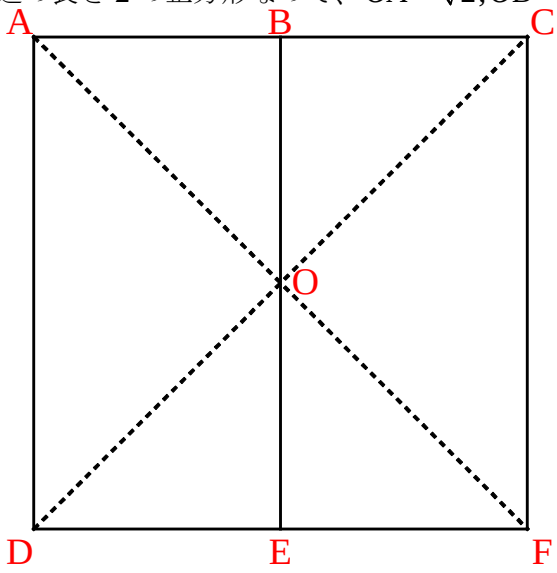
（2）

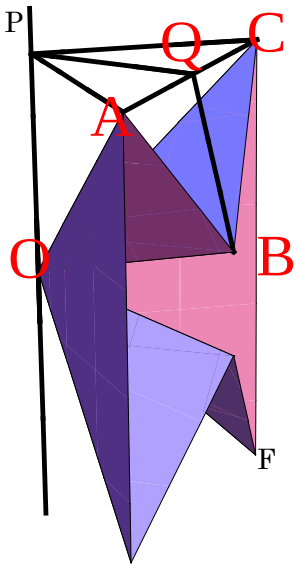




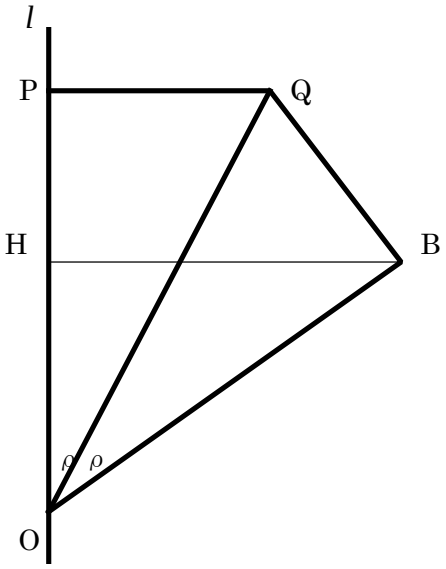
【真横から見た図↑】

（３） １辺の長さ２の正方形なので、$OA=\sqrt{2}, OB=1, AB=1$



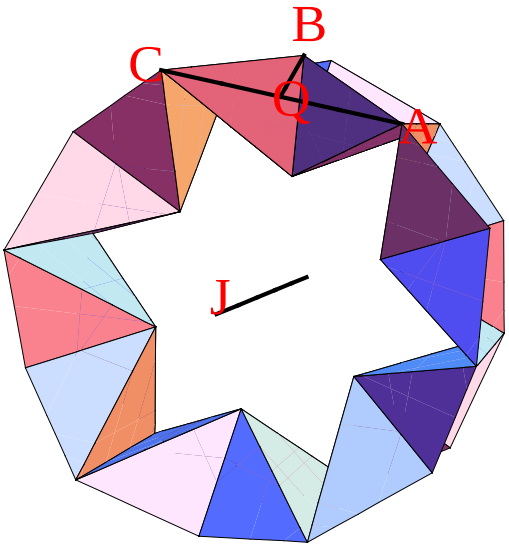


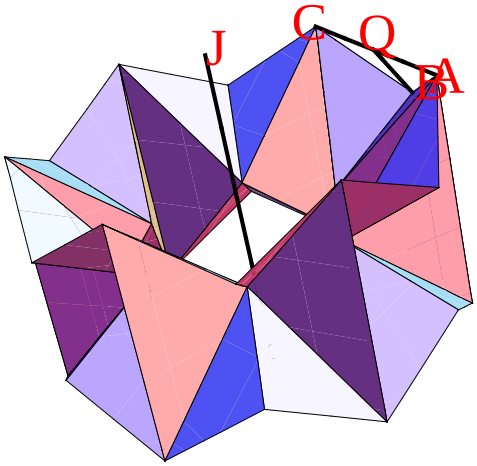
点 O を通り、直線 AD,CF と平行な直線を l とする。
点 Q から l へ垂線をひき、交点を P とする。
∠ABQ＝ θ より



$PQ = QB = AB\cos\theta = \cos\theta$
$AQ = \sin\theta$
∠POQ＝∠BOQ＝ ρ とおく
△OPQ において
$\tan\rho = \dfrac{PQ}{OP} = \cos\theta$
$\therefore \tan\rho = \cos\theta$ …①
点 B から直線 l へ垂線をひき交点を H とおく。
$HB = OB\sin 2\rho = \sin 2\rho = 2\sin\rho\cos\rho$
$= 2\tan\rho\cos^2\rho$

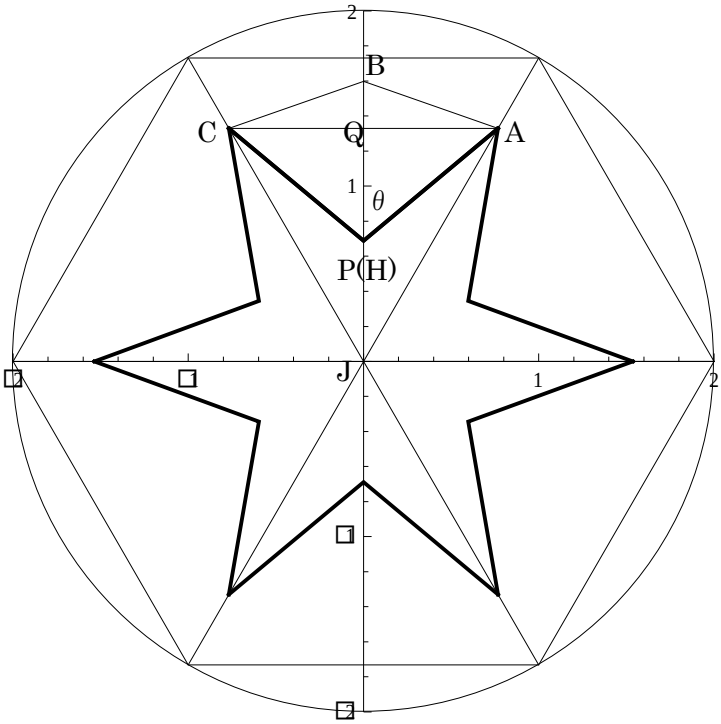
$HB = \dfrac{2\tan\rho}{1+\tan^2\rho}$　①より　$\therefore HB = \dfrac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$





$AQ = \sin\theta$
$AJ = 2AQ = 2\sin\theta$

$$JB = JP + HB = JQ - PQ + HB = \sqrt{3}AQ - \cos\theta + HB = \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta + \frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$$



$$BJ - AJ = \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta + \frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta} - 2\sin\theta = \left(\sqrt{3}-2\right)\sin\theta - \cos\theta + \frac{2\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$$

$\theta = 60°$ を代入すると

$$BJ - AJ = \left(\sqrt{3}-2\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{4}+1} = \frac{9-5\sqrt{3}}{5} \cdots \text{（答）}$$

（4）

高さ $= A_2B + AD_1 - AM = 2 + 2 - \left(1 - \cos 2\rho\right)$

$= 3 + \cos 2\rho$

$= 2\cos^2\rho + 2$

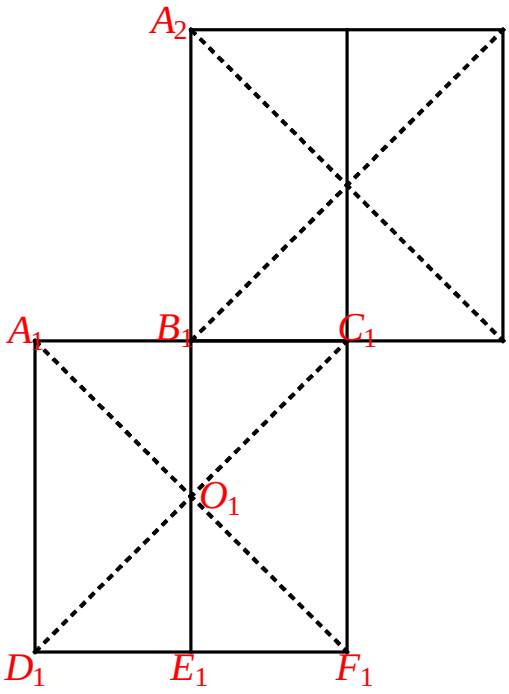
$= \dfrac{4 + 2\tan^2\rho}{1 + \tan^2\rho}$

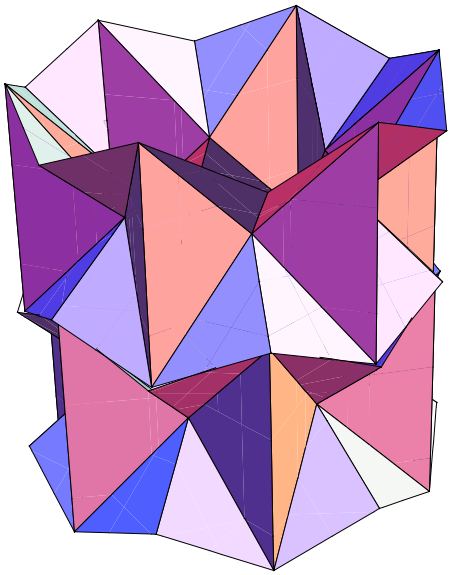
①より

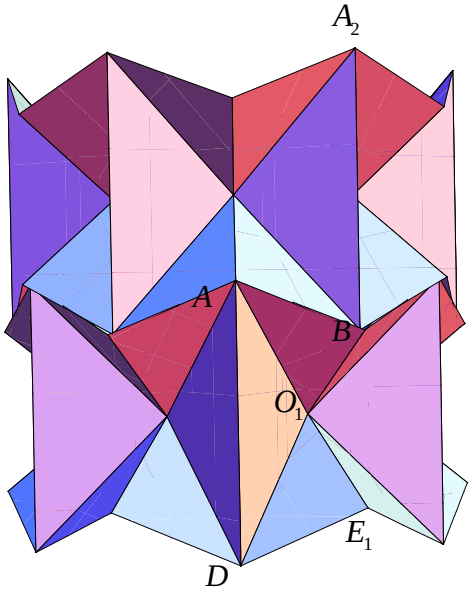
高さ $= \dfrac{4 + 2\cos^2\theta}{1 + \cos^2\theta}$

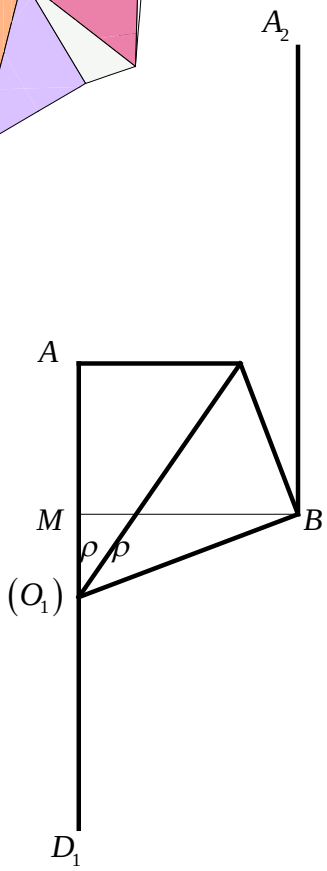
$\theta = 60°$ を代入すると

高さ $= \dfrac{4 + 2\times\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \dfrac{18}{5}$ …（答）






A_2
A
B
O_1
E_1
D


A_2
A
M
B
ρ
ρ
(O_1)
D_1