

第 3 回
北海道高等学校数学コンテスト

問 題

昭和60年1月15日(火)

第一部 90分

第二部 180分

北海道高等学校数学教育会高等学校部会

第 3 回

北海道高等学校数学コンテスト

第 1 部 問 題

昭和60年 1 月15日(火)

9 時30分～11時00分(90分)

北海道算数数学教育会高等学校部会

1 $P = 1^n + 2^n + 3^n$ を 5 で割った余りを R とする。

このとき次の問いに答えよ。

- (1) $n = 1, 2, 3, 4$ のとき R の値を求めよ。
- (2) n が自然数のとき R の値を求めよ。

2 集合 M 上の関係 $\sim$ というのは、 M の 2 つの要素の間に $x \sim y$ (x は y に $\sim$ の関係にある) か、そうでない ($x \not\sim y$ と書く) か、いずれかが成り立つときにいう。とくに関係 $\sim$ が

- ① M のすべての要素 x に対して $x \sim x$ (反射律)
- ② $x \sim y$ ならば $y \sim x$ (対称律)
- ③ $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$ (推移律)

の3つを満たすとき、この関係 $\sim$ を同値関係という。この3つの条件①反射律②対称律③推移律をまとめて同値律という。

- (1) 集合 $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ において、関係 $x \sim y$ を $xy > 0$ とすると、3つの条件①②③の各々について成立するかどうかを調べよ。
- (2) 集合 $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ において、関係 $x \sim y$ を $xy \geq 0$ とすると、3つの条件①②③の各々について、成立するかどうかを調べよ。
- (3) 複素数の集合 $C = \{a + bi \mid a, b \text{ は実数, } i \text{ は虚数単位, } i^2 = -1\}$ において、 $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ (a_1, b_1, a_2, b_2 は実数) とし、関係 $z_1 \sim z_2$ を $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$ とすると、3つの条件①②③の各々について成立するかどうかを調べよ。

3 「台形 ABCD ($AD \parallel BC$) と直線 ℓ がある。辺 AD, BC の長さをそれぞれ a , b とする。 ($a < b$)

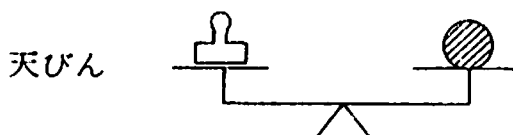
$\ell \parallel AD$ で辺 AB, DC との交点をそれぞれ P, Q とする」

このとき次の各問に答えよ。

(解答には free hand でよいから必要な図を必ずかくこと)

- 問1 P が辺 AB の中点であるとき、線分 PQ の長さを a , b で表わせ。
- 問2 対角線 AC, BD の交点を R とし、PQ が R を通るとき、線分 PQ の長さを a , b で表わせ。
- 問3 線分 PQ の長さが $\sqrt{ab}$ となるときの点 P は辺 AB をどんな比に内分しているか。

- 4** (1) $1g, 2g, 3g, \dots$ の分銅 (おもり) が 1 個ずつある。この中から適当な個数の分銅を選び天びんで $1g, 2g, 3g, \dots, 31g$ までの物の重さを計りたい。少なくとも何個の何 g の分銅 (おもり) が必要か示し、その分銅で十分であることを証明せよ。ただし分銅は片方の皿にしかのせないものとする。
- (2) 分銅はどちらにのせてもよいし、物体と分銅を同じ皿にのせてもよいものとする。このとき 5 個の分銅を用いて $1g, 2g, 3g, \dots, ng$ までの物の重さを計る。 n の最大値はいくらか。



第 3 回

北海道高等学校数学コンテスト

第 2 部 問 題

昭和60年 1 月15日(火)

11時15分～14時15分(180分)

北海道算数数学教育会高等学校部会

1

$$6l - 7m + 5n = 24 \dots\dots\dots ①$$

$$m = pl = qn \dots\dots\dots ②$$

p, q, l, m, n は正の整数とする。このとき

- (1) $p = 2$ のとき q の値を求めよ。
- (2) p, q, l, m, n の組を全部求めよ。

2

x, a, b, c をそれぞれ正の実数とするとき

(1) $\frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}$ の最大値を求めよ。またそのときの x の値を求めよ。

(2) $\frac{2 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}{a + b}$ の最大値を求めよ。またそのときの a, b の値を求めよ。

(3) $\frac{3 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})}{a + b + c}$ の最大値を求めよ。またそのときの a, b, c の値を求めよ。

3

「1 点 A と A を通らない 1 直線 l があり l 上には 3 点 B, C, D がある。

線分 AC , 線分 AD の中点をそれぞれ M, N , 直線 BM と直線 AD の交点を E , 直線 BN と直線 AC の交点を F とすれば EF は AB に平行である。」

上の命題について次の各問に答えよ。

(解答には free hand でよいから必要な図をかけ)

問 1 3 点 B, C, D の順序で l 上に並んでいるとき $EF \parallel AB$ を証明せよ。

問 2 自分が問 1 で試みた証明は 3 点が C, B, D の順序で並んでいるときにあてはまるかどうか確かめてみよ。

そのまま当てはまるか、当てはまらないならどう変えればよいか明らかにせよ。

4

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n \quad (n \geq 1)$

なる多項式と任意の数 λ について

$g(x) = (x - \lambda) f(x) = c_0x^{n+1} + c_1x^n + \cdots + c_{n+1}$ とおき

$\text{Max}(|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_n|) = a$

$\text{Max}(|c_0|, |c_1|, \cdots, |c_{n+1}|) = c (> 0)$

であるとき

$$\frac{a}{c} \leq n + 1$$

を次の場合に分けて示せ。ただし $\text{Max}(x, y, \cdots, z)$ は $x, y, \cdots, z$ の中の最大なものを示す。

(1) $|\lambda| \leq 1$

(2) $|\lambda| \geq 1$

昭和59年度(昭和60年 1 月15日実施)

第 3 回

北海道高等学校数学コンテスト

解 答 と 解 説

北海道算数数学教育会高等学校部会

第 1 部

1

$P=1^n+2^n+3^n$ を 5 で割った余りを R とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $n=1, 2, 3, 4$ のとき R の値を求めよ。
 (2) n が自然数のとき R の値を求めよ。

着眼点

5 で割るとき整数を一般には $5k, 5k \pm 1, 5k \pm 2$ と 5 つに分けて考えるのであるがここで n は指数であるので考え方を変えなければならない。

(1) で $n=1, 2, 3, 4$ のときの R を求めているので(2)では(1)を利用して

$n=4k+1, 4k+2, 4k+3$ に分ける。

このとき

$$a^4=5p+1 \quad (a=1, 2, 3)$$

となるから

$$a^{4k}=(a^4)^k=(5p+1)^k=5P+1$$

となる

解答例

- (1) $n=1$ のとき

$$P=1+2+3=6=5+1 \quad \therefore R=1$$

$n=2$ のとき

$$P=1^2+2^2+3^2=14=2 \times 5+4 \quad \therefore R=4$$

$n=3$ のとき

$$P=1^3+2^3+3^3=36=7 \times 5+1 \quad \therefore R=1$$

$n=4$ のとき

$$P=1^4+2^4+3^4=98=19 \times 5+3 \quad \therefore R=3$$

- (2) n は正整数より

$n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ のいずれかである。

$n=4k$ のとき

$$P=1^{4k}+2^{4k}+3^{4k}$$

$$= (1^4)^k + (2^4)^k + (3^4)^k$$

$$= 1 + (3 \cdot 5 + 1)^k + (16 \cdot 5 + 1)^k$$

$$(2^4)^k=5a+1, (3^4)^k=5b+1 \text{ とおくと}$$

$$P=5(a+b)+3 \quad \therefore R=3$$

$n=4k+1$ のとき

$$P=1^{4k+1}+2^{4k+1}+3^{4k+1}$$

$$= 1 + 2(5a+1) + 3(5b+1)$$

$$= 5(2a+3b+1) + 1 \quad \therefore R=1$$

$n=4k+2$ のとき

$$P=1^{4k+2}+2^{4k+2}+3^{4k+2}$$

$$= 1 + 4(5a+1) + 9(5b+1)$$

$$= 5(4a+9b+2) + 4$$

$$\therefore R=4$$

$$n=4k+3$$

$$P=1^{4k+3}+2^{4k+3}+3^{4k+3}$$

$$= 1 + 8(5a+1) + 27(5b+1)$$

$$= 5(8a+27b+7) + 1 \quad \therefore R=1$$

$$\text{以上より } n=4k \text{ のとき} \quad R=3$$

$$\left. \begin{array}{l} n=4k+1 \\ n=4k+3 \end{array} \right\} \text{ のとき} \quad R=1$$

$$n=4k+2 \text{ のとき} \quad R=4$$

2

集合 M 上の関係 $\sim$ というのは、 M の 2 つの要素の間に、 $x \sim y$ (x は y に $\sim$ の関係にある) か、そうでない ($x \not\sim y$ と書く) か、いずれかが成り立つときにいう。とくに関係 $\sim$ が

① M のすべての要素 x に対して、 $x \sim x$ (反射律)

② $x \sim y$ ならば $y \sim x$ (対称律)

③ $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$ (推移律)

の 3 つを満たすとき、この関係 $\sim$ を同値関係という。この 3 つの条件①反射律②対称律③推移律をまとめて同値律という。

(1) 集合 $M=\{-1, 0, 1, 2\}$ において、関係 $x \sim y$ を、 $xy > 0$ とするとき、3 つの条件①、②、③の各々について、成立するかどうかを調べよ。

(2) 集合 $M=\{-1, 0, 1, 2\}$ において、関係 $x \sim y$ を、 $xy \geq 0$ とするとき、3 つの条件①、②、③の各々について、成立するかどうかを調べよ。

(3) 複素数の集合 $C=\{a+bi \mid a, b \text{ は実数, } i \text{ は虚数単位, } i^2=-1\}$ において、 $z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i$ (a_1, b_1, a_2, b_2 は実数) とし、関係 $z_1 \sim z_2$ を $a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2$ とするとき、3 つの条件①、②、③の各々について成立するかどうかを調べよ。

着眼点

(1) M については、個数が 4 個なので、すべての要素について、条件にあてはめて考えればよい。ただし、 $x \neq 0$ のとき、 $x^2 > 0$ だが、 $x=0$ のとき、 $x^2=0$ に注意する。

(2) 成立する場合には、一般的に証明しなければならないが、不成立の場合には、反例を示せばよい。

(3) この関係 $\sim$ の定義の意味がわかれば比較的易しい問題であると思う。高得点を期待する。

解答例

(1) ①について、 $x=0$ のとき、 $0^2=0$ となるから
 $0 \neq 0$

よって、①は不成立

②について、 $x \sim y$ のとき、 $xy > 0$,

$\therefore yx > 0 \quad \therefore y \sim x$

よって②は成立

③について、 $x \sim y$ かつ $y \sim z$ のとき、

$xy > 0$ かつ $yz > 0$, $xy > 0$ より $x > 0$ ならば

$y > 0$, $yz > 0$ より $z > 0$

$\therefore xz > 0 \quad \therefore x \sim z$

$x < 0$ ならば $y < 0$, $yz > 0$ より $z < 0$

$\therefore xz > 0 \quad \therefore x \sim z$

よって③は成立する。

(2) ①について、すべての x について、 $x^2 \geq 0$ より
 $x \sim x$

よって、①は成立する。

②について、 $x \sim y$ ならば、 $xy \geq 0$

$\therefore yx \geq 0 \quad \therefore y \sim x$

よって、②は成立する。

(2)の③について、 $x=-1, y=0, z=2$ とすると、

$-1 \cdot 0 \geq 0$ かつ $0 \cdot 2 \geq 0$ は成立するから、

$-1 \sim 0$ かつ $0 \sim 2$ だが $-1 \cdot 2 \geq 0$ は成立しないから $-1 \not\sim 2$

よって③は成立しない。

(3) ①について、 $z_1 = a_1 + b_1 i$ とすると、すべての
 z_1 について、あきらかに $a_1^2 + b_1^2 = a_1^2 + b_1^2$ は
 成立するから $z_1 \sim z_1$ は成立する。

よって①は成立する。

②について、 $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ とすると

$z_1 \sim z_2$ より $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$

$\therefore a_2^2 + b_2^2 = a_1^2 + b_1^2 \quad \therefore z_2 \sim z_1$

よって②は成立する。

③について、

$z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i, z_3 = a_3 + b_3 i$ とし、

$z_1 \sim z_2$ かつ $z_2 \sim z_3$ ならば、

$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$ かつ $a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2$

$\therefore a_1^2 + b_1^2 = a_3^2 + b_3^2$

$\therefore z_1 \sim z_3$

よって③は成立する。

3

「台形 ABCD ($AD \parallel BC$) と直線 l がある。辺
 AD, BC の長さをそれぞれ a, b とする ($a < b$)
 $l \parallel AD$ で辺 AB, DC との交点をそれぞれ P, Q

とする。」

このとき次の各問に答えよ。(解答には free
 hand でよいから必要な図を必ずかくこと)

問1 P が辺 AB の中点であるとき、線分 PQ の
 長さを a, b で表わせ

問2 対角線 AC, BD の交点を R とし PQ が R
 を通るとき、線分 PQ の長さを a, b で表わせ

問三 線分 PQ の長さが $\sqrt{ab}$ となるときの点 P
 は辺 AB をどんな比に内分しているか)

着眼点

高校生は中学からの入試で、図形に関する計算
 問題を多く練習している。それでこの問題は手
 つけ易いと考えたが、大きく分けて中学校での知
 識で処理するか、高校で習った知識で処理する
 かの2つになる

更にこれを細別して次のようにしてみた

I 三角形の1辺に平行線をひくことによる線分
 比の関係を使う。

1 D から AB に (A から DC に) 平行線をひ
 き比の移動をさせる。

2 直線 AB, CD の交点を求める

II 三角形の面積を求める始めの公式

(底辺の長さの数値) $\times$ (高さの数値) $\div 2$

を使う。もちろん数値の単位は同じにする。

III 点の座標を与えて処理する。(高一でよい)

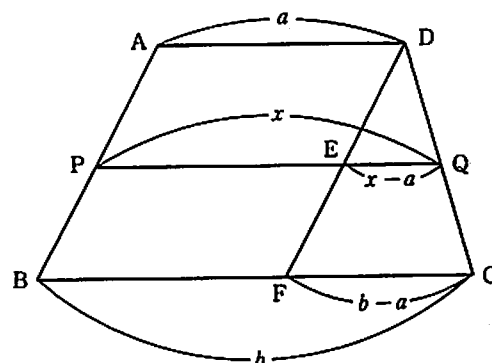
IV ベクトルを利用する。(高二)

I $\rightarrow$ IV の順に複雑な計算になる。

解答例

I-1の方法で示す。

問1



D から AB に平行線をひき PQ, BC との交点をそ
 れぞれ E, F とする

$PQ = x$ とおいて

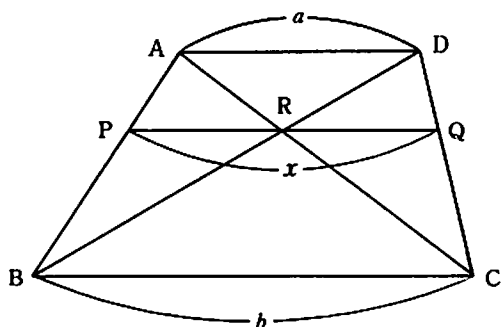
$PQ = PE + EQ$

$$\begin{aligned}
 x &= a + EQ \\
 EQ &= x - a \cdots \textcircled{1} \\
 BC &= BF + FC \\
 b &= a + FC \\
 FC &= b - a \cdots \textcircled{2} \\
 \triangle DFC \text{ で } E, Q &\text{ は辺 } DF, DC \text{ の中点だから} \\
 EQ &= \frac{1}{2} FC \\
 x - a &= \frac{1}{2}(b - a) \quad \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ から} \\
 x &= \frac{1}{2}(a + b)
 \end{aligned}$$

$$\text{Ans. } PQ = \frac{1}{2}(a + b)$$

〔注〕 台形 APQD を Q 中心に 180° 回転して平行四辺形を作れば、もっと易しく解決される。このような図形の移動法は後に“写像”が出たときに理解を容易にする。実は中学での図形に関する知識はそのように使って意義が大きいのである。

問 2



$PQ = x$ として $\triangle ABC$ から

$$\frac{PR}{BC} = \frac{AP}{AB} \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle DBC$ から

$$\frac{RQ}{BC} = \frac{DQ}{DC} \cdots \textcircled{2}$$

もとの台形 ABCD から

$$\frac{AP}{AB} = \frac{DQ}{DC} \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ から

$$PR = RQ = \frac{x}{2} \cdots \textcircled{4}$$

$\triangle ABC$ から

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RC}$$

$\triangle ARD \sim \triangle CRB$ から

$$= \frac{AD}{BC} = \frac{a}{b}$$

これから

$$\frac{AP}{AB} = \frac{a}{a+b}$$

①から

$$\frac{PR}{BC} = \frac{a}{a+b}$$

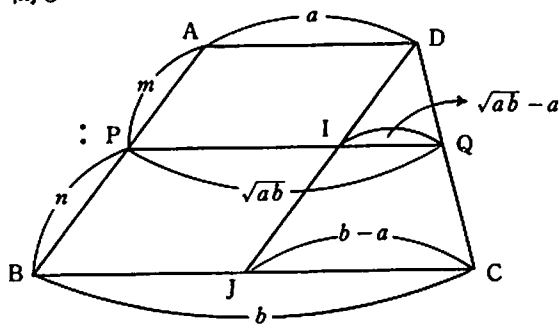
$$\frac{x}{2b} = \frac{a}{a+b}$$

$$x = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\text{Ans. } PQ = \frac{2ab}{a+b}$$

〔注〕 D から AB に平行線をひいてもできるが別解を示した。

問 3



$$\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC} = \frac{m}{n} \cdots \textcircled{1} \text{ とする}$$

D から AB に平行線をひき PQ, BC との交点をそれぞれ I, J とする

$$PQ = PI + IQ$$

$$\sqrt{ab} = a + IQ \quad IQ = \sqrt{ab} - a \cdots \textcircled{2}$$

$$BC = BJ + JC$$

$$b = a + JC$$

$$JC = b - a \cdots \textcircled{3}$$

$$\triangle DJC \quad \frac{IQ}{JC} = \frac{DI}{DJ} \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } \frac{DI}{IJ} = \frac{m}{m+n} \text{ となるから}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ から } \frac{\sqrt{ab} - a}{b - a} = \frac{m}{m+n}$$

$$\text{左辺} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

$$\text{それで } \frac{m}{m+n} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

これから $m : n = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ となる。

答 辺 AB を $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ に内分している。

〔注 1〕 問 1 から問 2 まで始めから

$$\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC} = \frac{m}{n}$$

としておいて処理するのもよい

〔注 2〕 線分 PQ の長さは問 1, 問 2, 問 3 の順に線分 AD, BC の長さの相加平均, 調和平均,

相乗平均という。この3つの長さの間に一定の関係があるが“基礎解析”で極限算法 (lim と略字がつく) を習ってからは、この3つの間にある図形的な関係が面白い。

数学を“大学入試の為の道具である”というような偏見から脱却すれば数学はもっと生徒の身近かになるだろう。

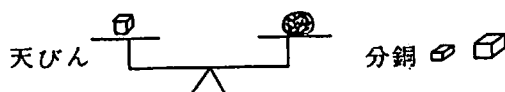
〔注3〕 I-2, II, IIIによる解法はコンテストの解答整理後の講評で示すことにする。

4

1g, 2g, 3g, ……の分銅 (おもり) がある。この中から適当な個数の分銅を選び、

(1) 天びんで1g, 2g, 3g, ……31gまでの物の重さを計りたい。少くとも何個の何gの分銅 (おもり) が必要か示しその分銅で十分であることを証明せよ。ただし分銅は片方の皿にしかのせないものとする。

(2) 分銅はどちらにのせてもよいし、物体と分銅を同じ皿にのせてもよいとする。このとき適当な5個の分銅を用いて、1g, 2g, 3g, ……ngまでの物の重さを計る。nの最大値はいくらか。



着眼点

2進法の問題であることを見破れば、必要な分銅は容易にわかる。一般に任意の自然数 k が $a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + a_1 \times 2 + a_0$ なる2進数に一意的に表示できることがこの問題のポイントである。(2)は(1)と異なり左右の皿を使用できるので2進法では無く、一種の3進法の考え方を思いつくことができるかが要点である。

解答例

(1) 分銅は皿にのせるか、のせないかのいずれか

である。よって n 個の分銅を皿にのせる組合せは、1個ものせないものを含めて 2^n 通りである。一方、0gから31gの目盛りのきざみ方は32とおりあるので

$$2^n \geq 32 \quad \text{これを満たす自然数 } n \text{ は } n \geq 5$$

よって分銅は少なくとも5種類は必要である。

逆に任意の $0 \leq k \leq 31$ なる自然数 k は2進法で

$$k = a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0$$

(a_i は0または1)

と表すことが唯1通りできる。

$$(1 = 00001, 31 = 11111)$$

このとき、 $a_i = 1$ となる i に対応する 2^i g の分銅を用意すると kg が計れるよって、1g, 2g, 4g, 8g, 16g, 32g の6個の分銅を用意すると0gから $(2^6 - 1)g$ までのすべての整数値の重さが計れる。

(2) この場合、分銅を左の皿にのせる、右の皿にのせる、どちらにものせないの3通りの選択がある。よって n 個の分銅では何ものせない場合を含めて 3^n 通りの組み合わせがあり、分銅を効率よく選ぶと最大 3^n 通りの重さが計れる。いま、1g, 3g, 3^2 g, 3^3 g, 3^4 g の5個の分銅を用意して $a_4 \times 3^4 + a_3 \times 3^3 + a_2 \times 3^2 + a_1 \times 3^1 + a_0 \dots (1)$ とおき

$$a_i = \begin{cases} 1 & 3^i \text{g の分銅を右の皿にのせる} \\ 0 & 3^i \text{g の分銅を使用しない} \\ -1 & 3^i \text{g の分銅を左の皿にのせる} \end{cases}$$

と決めると、(1)は一種の3進法表示である。これは空気より軽い水素ガスの風船を片方の皿に固定してもう一方に分銅をのせ、負の重さを考えるという変則的な3進法である。これによって計れる重さの範囲は、 $3^5 - 1$ を2で割った $-\frac{3^5 - 1}{2}g$ から $\frac{3^5 - 1}{2}g$ までの重さが計れる。

いま負の重さを考えないので n の最大値は $\frac{3^5 - 1}{2} = 364g$ である。

第2部

1

$$6l - 7l + 5n = 24 \dots \dots \textcircled{1}$$

$$m = pl = qm \dots \dots \textcircled{2}$$

p, q, l, m, n は正の整数とする。このとき

(1) $p = 2$ のとき q の値を求めよ。

(2) p, q, l, m, n の組を全部を求めよ。

着眼点

(1) ①②より p と q の関係式を作る。このとき $p = 2$ を利用して項数が少なくなるようにする。与えられた文字が正整数であるから、 $n(5 - 4q) = 24$ より $q = 1$ だけである。このとき n が正整数になることを確認しなければならない。

- (2) 整数解を求めるのであるから未知数の数が与えられた式より多くても、未知数に正整数を代入して1つ1つ調べて適する整数の組を求めるが調べる場合が有限となるような条件を求めることである。式 $(12-7p)l + (10-7q)n = 48$ で、 $p > 1, q > 1$ とすると左辺が負によって p, q の少なくとも1つは1であることを注意する。

解答例

- (1) ②より $m = 2l = qn$
 $\therefore m = qn, 2l = qn$
 ①に代入 $3qn - 7qn + 5n = 24$
 $n(5-4q) = 24$
 $n \geq 1$ より $5-4q \geq 1 \therefore q \leq 1$
 よって $q = 1$ このとき $n = 24$
 (2) $6l - 7pl + 5n = 24$ より
 $(6-7p)l + 5n = 24 \cdots \cdots ③$
 $6l - 7qn + 5n = 24$ より
 $6l + (5-7q)n = 24 \cdots \cdots ④$
 ③+④
 $(12-7p)l + (10-7q)n = 48 \cdots \cdots ⑤$
 $p \geq 2, q \geq 2$ とすると⑤の左辺は負となるから
 p, q の少なくとも一方は1である。
 $p = 1$ のとき③より $-l + 5n = 24 \cdots \cdots ⑥$
 ⑥ $\times 6$ + ④ $7(5-q)n = 24 \times 7$
 $n \geq 1$ より $5-q \geq 1 \therefore q \leq 4$
 $q = 1$ のとき ④より $6l - 2n = 24 \cdots \cdots ⑦$
 ⑦ $\times 5$ + ③ $\times 2$
 $14(3-p)l = 24 \times 7$
 $l \geq 1$ より $3-p \geq 1 \therefore p \leq 2$
 よって
 $(p, q, l, m, n) = (1, 1, 6, 6, 6)$
 $(1, 2, 16, 16, 8)$
 $(1, 3, 36, 36, 12)$
 $(1, 4, 96, 96, 24)$
 $(2, 1, 12, 24, 24)$

2

- x, a, b, c をそれぞれ正の実数とするとき、
 (1) $\frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}$ の最大値を求めよ。またそのときの x の値を求めよ。
 (2) $\frac{2 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}{a+b}$ の最大値を求めよ。またそのときの a, b の値を求めよ。
 (3) $\frac{3 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})}{a+b+c}$ の最大値を求めよ。

またそのときの a, b, c の値を求めよ。

着眼点

- (1) $\frac{2}{x} = t$ とおくと、 t についての二次関数である。
 (2) $\frac{2 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}{a+b} = \frac{2}{a+b} - \frac{1}{ab}$ 文字は正だから相加平均 $\geq$ 相乗平均を利用して $a+b=x$ とおくと(1)に結びつく。
 (3) (2)と同様に相加平均 $\geq$ 相乗平均を利用すると(2)に結びつく。

解答例

- (1) $\frac{2}{x} = t$ とおくと $t > 0$ より
 $\frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} = \frac{2}{x} - \left(-\frac{2}{x}\right)^2$
 $= t - t^2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$
 よって $t = \frac{1}{2}$ のときすなわち
 $\frac{2}{x} = \frac{1}{2} \therefore x = 4$ のとき最大値は $\frac{1}{4}$
 (2) $a > 0, b > 0$ よって、相加平均 $\geq$ 相乗平均より
 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (等号は $a=b$ のとき成り立つ)
 逆数をとって
 $\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} \therefore \left(\frac{2}{a+b}\right)^2 \leq \frac{1}{ab}$
 よって $\frac{2}{a+b} - \frac{1}{ab} \leq \frac{2}{a+b} - \left(\frac{2}{a+b}\right)^2$
 ここで $a+b=x$ とおくと ($x > 0$)
 右辺 $= \frac{2}{x} - \left(-\frac{2}{x}\right)^2$ となり
 (1)より最大値 $\frac{1}{4}$ ($a+b=4$ のとき)
 よって左辺 $\leq \frac{1}{4}$
 ここで等号は $a=b$ のとき成立するから
 $\frac{2}{a+b} - \frac{1}{ab}$ の最大値は $\frac{1}{4}$
 このとき $a=b$ より $a=b=2$
 (3) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$
 (等号は $a=b=c$ のとき成立) より
 $\frac{3}{a+b+c} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

$$\text{また } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \quad (\text{等号は}$$

$$\text{等号は } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \text{ 即ち } a = b = c$$

のとき成立)

$$\text{よって } P = \frac{3 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}{a + b + c} = \frac{3}{a + b + c} - \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{a + b + c}$$

$$\leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} = t \text{ とおくと } (t > 0)$$

$$\text{左辺} = t - t^2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \text{ よって}$$

$$\text{最辺 } P \text{ の最大値 } \frac{1}{4}, \text{ このとき } t = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$3\sqrt[3]{abc} = 2, a = b = c$$

$$\therefore a = b = c = 2$$

3

「1点AとAを通らない1直線ℓがありℓ上には3点B, C, Dがある。

線分AC, 線分ADの中点をそれぞれM, N直線BMと直線ADの交点をE, 直線BNと直線ACの交点をFとすればEFはABに平行である。」

上の命題について次の各問に答えよ。

(解答には free hand でよいから必要な図をかけ)

問1 3点がB, C, Dの順序でℓ上に並んでいるときEF//ABを証明せよ。

問2 自分が問1で試みた証明は3点がC, B, Dの順序で並んでいるときにあてはまるかどうか確かめてみよ。

そのまま当てはまるか, 当てはまらないならどう変えればよいか明らかにせよ。

着眼点

これは平行であることの証明だから平行線による比の移動を考えるのが最も初歩的であるが, その他の方法もある。次に3つあげる。

I. 平行線による比の移動

II. 座標を与えて計算 (高一)

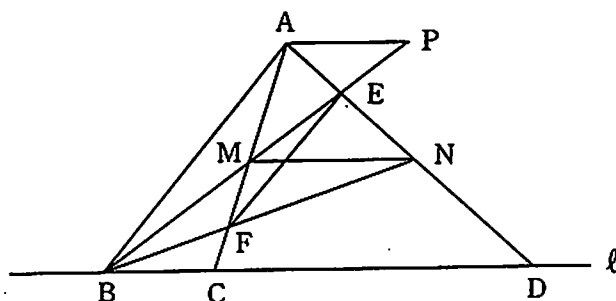
III. ベクトルを使う (高二)

所で問1は上のどれでもよいが, 問2になって点の順序が変わったとき, 問1での解答がどの位の修正で間に合うかが重要である。

解答例

Iの方法で

問1 Aからℓに平行線をひき直線BMとの交点をPとする。



$$\frac{NE}{EA} = \frac{MN}{AP} \quad (\triangle EMN \sim \triangle EPA)$$

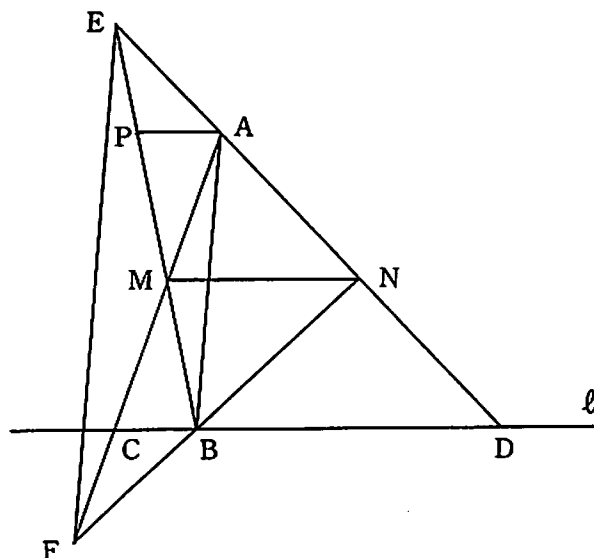
$$= \frac{MN}{BC} \quad (AP = BC)$$

$$= \frac{NF}{FB} \quad (\triangle FNM \sim \triangle FBC)$$

$$\therefore EF \parallel AB \quad \text{Q.E.D.}$$

解答例

問2 問1の解答がそのままあてはまる。



注1: "Aからℓに平行線をひき直線BMとの交点をPとする。"

これは"△MBCをM中心180°回転して△MPAにする。"

としてもよい。むしろ図形移動からいえばこ

の方が本筋である。それは「中点があったら180°回転を試みる」という原理があるからだ。

これはまた「角の2等分線があったら折り返してみる」などのようなきまり切った方法である。

注2: “A から…”の表現は中学校では“A から l に平行線をひき BM の M の方への延長との交点を P とする。”のようにしているようだが“直線 BM、とすればその両延長をも同時に表わしているから表現が簡にして要を得ている。

注3: 座標で計算するには点に座標を与えるのが厄介で、その上計算がこみ入る。

ベクトルも可成高度の知識(位置ベクトル)が必要である上に、これまた計算がこみ入る。

注4: 大学に行って“射影幾何。”を習えばもっと楽に解ける。

注5: ここでは線分の向きに伴う正負の区別はしていない。

講評ではそこまで入れた考え方を示すつもりである。

4

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n (n \geq 1)$ なる多項式と任意の数 λ について、

$$g(x) = (x - \lambda)f(x) = c_0x^{n+1} + c_1x^n + \dots + c_{n+1}$$

とおき、

$$\max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|) = a$$

$$\max(|c_0|, |c_1|, \dots, |c_{n+1}|) = c (> 0)$$

であるとき、

$$\frac{a}{c} \leq n + 1$$

を次の場合に分けて示せ。ただし、 $\max(x, y, \dots, z)$ は $x, y, \dots, z$ の中の最大なものを表す。

$$(1) \quad |\lambda| \leq 1 \quad (2) \quad |\lambda| \geq 1$$

着眼点

絶対値記号 $|*|$ の性質で

$$|a + \beta| \leq |a| + |\beta|$$

$$|a\beta| = |a| |\beta|$$

は最も重要である。また、 $\max$ の性質で重要なのは、 $x \leq a, y \leq a, \dots, z \leq a$ ならば

$$\max(x, y, \dots, z) \leq a$$

となることである。

(1)では、上のことを利用して、 $|a_i| (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ を上から評価することによって得られ、

(2)では(1)の結果から $\frac{1}{\lambda}$ の場合に適用する。よく使われる証明法である。

この問題の結論 $\frac{a}{c} \leq n + 1$ で顕著な事実、 $\frac{a}{c}$ が λ に無関係に、次数 n だけで評価されるところで、このことから、 a_i, c_j が整数である場合などは、 $g(x)$ の因数を、有限回の操作で見つけたす手掛かりとなる。

解答例

$$(1) \quad g(x) = (x - \lambda)f(x) = a_0x^{n+1} + (a_1 - \lambda a_0)x^n + (a_2 - \lambda a_1)x^{n-1} + \dots + (a_n - \lambda a_{n-1})x - \lambda a_n$$

$$\therefore c_0 = a_0, c_1 = a_1 - \lambda a_0, c_2 = a_2 - \lambda a_1, \dots,$$

$$c_n = a_n - \lambda a_{n-1}, c_{n+1} = -\lambda a_n$$

$$\text{よって、} a_0 = c_0, a_1 = c_1 + \lambda a_0, a_2 = c_2 + \lambda a_1, \dots,$$

$$a_n = c_n + \lambda a_{n-1}$$

$$\text{条件より、} |c_0| \leq c, |c_1| \leq c, \dots,$$

$$|c_n| \leq c \text{ だから、}$$

$$|\lambda| \leq 1 \text{ ならば}$$

$$|a_0| = |c_0| \leq c$$

$$|a_1| = |c_1 + \lambda a_0| \leq |c_1| + |\lambda| |a_0|$$

$$\leq |c_1| + |a_0| \leq 2c$$

$$|a_2| = |c_2 + \lambda a_1| \leq |c_2| + |a_1|$$

$$\leq c + 2c = 3c$$

$$|a_n| = |c_n + \lambda a_{n-1}| \leq |c_n| + |a_{n-1}|$$

$$\leq c + nc = (n + 1)c$$

$$\text{よって、} |a_i| \leq (n + 1)c$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{故に、} a \leq (n + 1)c \text{ よって、} \frac{a}{c} \leq n + 1$$

(証明終)

$$(2) \quad |\lambda| \geq 1 \text{ より、} \lambda \neq 0$$

$$-\frac{1}{\lambda x^{n+1}} g(x) = \frac{x - \lambda}{-\lambda x} \cdot \frac{1}{x^n} f(x)$$

$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda} \right) (a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{x} + a_2 \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{x^n})$$

$$+ a_2 \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{x^n})$$

$$\text{よって、} \frac{1}{x} = X \text{ とおくと、}$$

$$-\frac{1}{\lambda} (c_0 + c_1 X + \dots + c_{n+1} X^{n+1})$$

$$= (X - \frac{1}{\lambda}) (a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n)$$

$$|\frac{1}{\lambda}| \leq 1 \text{ より(1)の結果を用いると、}$$

$$a \leq (n + 1) \frac{c}{|\lambda|}$$

$$\therefore \frac{a}{c} \leq \frac{n + 1}{|\lambda|} \leq n + 1$$

(証明終)

第 3 回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

昭和60年 1 月15日(火)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第3回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長 前 田 孝 利

三回目を迎えたこのコンテストは、全道から43校、556名もの多数の高校生諸君の参加申込を得て実施できましたことは、喜びにたえません。このコンテストを主催している北数教高校部会という組織は、全道の高校で数学の授業を担当している先生方が、生徒諸君の学習意欲を高め学力を向上させるために、様々な分野の研究を進めている組織ですが、大学進学希望者の多い高校では、生徒諸君の授業に対する考え方がともすると大学入試対策に重点がおかれる傾向にあり、数学を学ぶ本来的な意義が薄れているということが、先生方の話し合いの中でしばしば出ておりました。そこで、数学を学ぶ本来的な意義、即ち、基本的な概念や原理・法則などの理解を深め、論理的思考力を養い、発展的・創造的な考え方や処理能力を養うことを目的とした数学コンテストが計画されたわけです。

このような経緯から問題は、諸君が普段手がけている大学入試に出るような問題ではなく、数学的な考え方を総合的に駆使した柔軟な思考と手法が要求される問題となるわけです。大学の先生や北数教高校部の先生方が色々と工夫をこらして問題を作成しましたので、このコンテストに参加した諸君の、上に述べたような数学的な論理性や創造性を高めることに大変役立つものと思います。昨年に引き続き参加された人も相当数あったようですが、1・2年生の諸君は、次回も是非参加して、自己の才能を伸張させることに挑戦してほしいと思います。最近の高校では、部活動としての数学研究グループの活動を余り聞かなくなりましたが、教科書や問題集から離れて、このコンテストで取り上げたような問題に取り組む研究グループが多くの高校にできることを期待したいと思います。

初回から大きな御支援をいただいている福武書店や北海道新聞社に深く感謝申し上げますとともに、北海道教育委員会の強力な御後援に対して心からお礼を申し上げます。この試みが定着して、益々盛大なコンテストとなることを願い、将来は全国的な規模で、更に国際的な交流へと発展することに期待を寄せる次第です。

●成績優秀者

遠藤 浩太郎	田中 寛明	白山 真司	佐藤 竜人
斎藤 寿徳	菊永 泰正	中谷 健司	渡部 崇也
杉谷 和知	松久 忠史	伊藤 孝文	加々谷 重英
小沢 広	新井 智昭	松田 恭幸	佐藤 寛哲
小林 賢麿	高橋 光生	小島 弘章	寺島 学
砂金 聡秀	山口 貴行		

第3回 北海道高等学校数学コンテスト

度数分布表(1)

点数	I				II			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
0	20	147	12	237	166	189	38	312
1		2						
2		7	6		27	1	2	
3	8	11	14			1	2	1
4		17	6		10	4		
5	1	17	27	9	9		127	13
6	1	7	12		20	5	50	
7		19	8		29	2	27	
8	1	5	55	54	12	76	31	
9	18	5	21		12		8	
10	180	15	23	11	11	20	30	
11	2	5	22		7	1	1	
12	2	5	17	1	1	6	1	
13	4	8	19	1	1			
14	9	6	6		2	1		
15	5	14	24	4		2	5	
16	10	5	3	1	2	13		
17		2	7		3			
18	4	3	10	4			1	
19	3	1	2		2			
20	44	6	13	2	2	1		
21				1	4			
22	3	2	6			2	1	
23	4	14	7					
24					2			
25	7	3	6	1	4	2	2	
人数	326	326	326	326	326	326	326	326
合計	3806	1873	3425	846	1299	1322	1942	68
平均	11.6	5.7	10.5	2.5	3.9	4.0	5.9	0.2
S. D	5.4	7.0	5.6	4.7	5.5	5.3	3.4	0.9

度数分布表(2)

点数	I	II	点数	総点
100~96			200~191	
95~91	1		190~181	
90~86			180~171	
85~81	1		170~161	
80~76			160~151	2
75~71	3	1	150~141	
70~66	3		140~131	1
65~61	4	2	130~121	
60~56	5		120~111	1
55~51	8	2	110~101	3
50~46	20	4	100~ 91	5
45~41	24	3	90~ 81	8
40~36	34	3	80~ 71	22
35~31	36	8	70~ 61	21
30~26	49	15	60~ 51	43
25~21	59	30	50~ 41	58
20~16	43	47	40~ 31	76
15~11	23	66	30~ 21	51
10~ 6	10	68	20~ 11	26
5~ 0	3	77	10~ 0	9
人 数	326	326		326
合 計	9950	4631		14581
平 均	30.5	14.2		44.7
S . D	14.1	11.3		22.7

第 1 部

1

$P = 1^n + 2^n + 3^n$ を 5 で割った余りを R とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $n = 1, 2, 3, 4$ のとき R の値を求めよ。
 (2) n が自然数のとき R の値を求めよ。

講 評

(1) は n に値を与えて、5 で割った余りを求める問題であるが $n = 1$ のとき $P = 6$ 、余りを 1 とした解答が目についたが、 $6 \div 5 = 1$ であって余りでないことに注意してほしい。

(2) P を 5 で割った余りを求める問題

であるが (1) から n の値により余りが変わる、そこに存在する規則性を調べて推測し、次に推測した結果が正しいことを証明する。この 2 つのことはいずれも大切なことで、数学史を読んでも解るように、数学は推測に秀れた学者と証明することに秀れた学者によって進歩して来ている。これから数学の勉強を続ける上で常に心に留めておいてほしい。

規則性の推測について (1) から予測できなければ更に $n = 5, 6, 7$ と続けると見透しが立つと思う。自分の理解できる形で考えるようにしてほしい。また推測したことが証明したと考えていると思われる答案が相当目についたが、今度は、はっきりしたと思う。

答案をみると解答は、次の 2 通りに大別される。いずれにしても 5 の倍数と 5 より小さい自然数 (余り) に分ける訳だが

- (i) $2 + 3 = 5$ 、 $3^2 - 2^2 = 5$ であることに着目して、5 の倍数を考える仕方では田中寛明君 (解答例 1)
- (ii) $n = 4k$ のとき $1^n, 2^n, 3^n$ はいずれも $5m + 1$ とおけることに着目し、 $n = 4k + l$ のとき $p^l(5m + 1)$ ($p = 1, 2, 3$)
 として余りを求める方法で最上嗣生、斉藤寿徳、寺島 学、山口貴行、伊藤 満、二本柳ひな子の 6 君等が解答している (解答例 2)、以上を解答例として挙げておくので参考にしてほしい。

解答例 1

- (2) (i) $n = 2m - 1$ (m は自然数) のとき
 $f(a, b) = a^n + b^n$ とおくと
 $a = -b$ のとき $f(a, b) = 0$ よって
 $f(a, b) = (a + b)g(a, b)$ とおける。
 より $2^n + 3^n$ は 5 で割り切れるから

$$R = 1$$

(ii) $n = 2m$ のとき (m は自然数)

$$P = 1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m}$$

$$= 1^m + 4^m + 9^m = 9^m - 4^m + 2(4^m + 1^m) - 1^m$$

$$f_1(a, b) = a^m - b^m \text{ とおくと、} a = b \text{ のとき}$$

$$f(a, b) = 0, \therefore f(a, b) = (a - b)g_1(a, b) \text{ とおける。}$$

よって $9^m - 4^m$ は 5 で割り切れる

(I) $m = 2l - 1$ (l は自然数) のとき

(i) より $4^m + 1^m$ は 5 で割り切れる よって

$$R = 4$$

(II) $m = 2l$ (l は自然数) のとき

$$S = 2(4^{2l} + 1^{2l}) - 1^{2l} \text{ とおくと}$$

$$S = 2(16^l - 1^l) + 3$$

(ii) より $16^l - 1^l$ は 15 で割り切れるから 5 で割り切れる。 よって $R = 3$

$$n = 4m - 1, 4m - 3 \text{ のとき } R = 1$$

$$\therefore n = 4m - 2 \text{ のとき } R = 4$$

$$n = 4m \text{ のとき } R = 3$$

(ただし m は自然数)

解答例 2

(2) a, b, m を自然数とする

(i) n が 4 の倍数のとき

$$2^n = 2^{4m} = 16^m = (3 \times 5 + 1)^m$$

$$= 5^m \times 3^m + m \cdot 5^{m-1} \times 3^{m-1} + \cdots + m \cdot 5 \times 3 + 1$$

$$3^n = 3^{4m} = 81^m = (16 \times 5 + 1)^m$$

$$= 5^m \times 16^m + m \cdot 5^{m-1} \times 16^{m-1} + \cdots + m \times 5 \times 16 + 1$$

$$\therefore P = 1 + (5a + 1) + (5b + 1) = 5(a + b) + 3$$

$$\therefore R = 3$$

(ii) n が 4 の倍数 + 1 のとき

$$2^n = 2^{4m+1} = 2 \times 16^m = 2(5a + 1)$$

$$= 5(2a) + 2$$

$$3^n = 3^{4m+1} = 3 \times 81^m = 3(5b + 1)$$

$$= 5(3b) + 3$$

$$\therefore P = 5(2a + 3b + 1) + 1 \therefore R = 1$$

(iii) n が 4 の倍数 + 2 のとき

$$2^n = 2^{4m+2} = 4 \times 16^m = 4(5a + 1)$$

$$= 5(4a) + 4$$

$$3^n = 3^{4m+2} = 9 \times 81^m = 9(5b + 1)$$

$$= 5(9b) + 9$$

$$\therefore P = 5(4a + 9b + 2) + 4 \therefore R = 4$$

(iv) n が 4 の倍数 + 3 のとき

$$2^n = 2^{4m+3} = 8 \times 16^m = 8(5a + 1)$$

$$= 5(8a) + 8$$

$$3^n = 3^{4m+3} = 27 \times 81^m = 27(5b + 1)$$

$$= 5(27b) + 27$$

$$\therefore P = 5(8a + 27b + 7) + 1 \therefore R = 1$$

$$\text{Ans} \begin{cases} n \text{ が } 4 \text{ の倍数のとき} & R = 3 \\ n \text{ が } 4 \text{ の倍数} + 1 \text{ のとき} & R = 1 \\ n \text{ が } 4 \text{ の倍数} + 2 \text{ のとき} & R = 4 \\ n \text{ が } 4 \text{ の倍数} + 3 \text{ のとき} & R = 1 \end{cases}$$

②

集合M上の関係 $\sim$ というのは、Mの2つの要素の間に $x \sim y$ (x は y に $\sim$ の関係がある)か、そうでない($x \not\sim y$ と書く)か、いずれかが成り立つときにいう。

とくに関係 $\sim$ が

① Mのすべての要素 x に対して

$x \sim x$ (反射律)

② $x \sim y$ ならば $y \sim x$ (対称律)

③ $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$ (推移律)

の3つを満たすとき、この関係 $\sim$ を同値関係という。この3つの条件①反射律 ②対称律 ③推移律 をまとめて同値律という。

(1) 集合 $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ において、関係 $\sim$ を $xy > 0$ とすると、3つの条件①、②、③の各々について成立するかどうかを調べよ。

(2) 集合 $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ において、関係 $\sim$ を $xy \geq 0$ とすると、3つの条件①、②、③の各々について成立するかどうかを調べよ。

(3) 複素数の集合 $C = \{a + bi \mid a, b \text{ は実数, } i \text{ は虚数単位, } i^2 = -1\}$ において、 $z = a_1 + b_1 i$, $z = a_2 + b_2 i$ (a_1, a_2, b_1, b_2 は実数) とし、関係 $z_1 \sim z_2$ を $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$ とするとき、3つの条件①、②、③の各々について成立するかどうかを調べよ。

講評

全般的に見て、(1)、(2)は、手をつけていたし、出来ていたようだが、(3)は、ほとんどの人が出来ていなかった。(3)の方がむしろ易しいと思っていましたが、虚数単位の i という文字が入るとなんとなく手がつかない人が多かったようですので、虚数単位 i に慣れておくように要望します。以下各問題毎に出来なかったところの解説をします。

(1)では③が出来なかった。関係 $x \sim y$ と書いただけでは、 x と y は同じか違うかはわかりません。①のように x と y が同じ場合も考えられます。この③では、

$1 \sim 2$ かつ $2 \sim 1$ より $1 \sim 1$

が成り立つことを示しています。

なお、同値律①、②、③はすべて独立で、ある律から他の律が証明されることはありません。たとえば、以下の文には、誤りがありますが、どこだ解かりますか。

※「②、③が成立するならば①が成り立つ」

証明 ②より $x \sim y$ ならば $y \sim x$ が成り立つ。

$x \sim y$ かつ $y \sim x$ から③を用いると $x \sim x$ よって、①が成り立つ。※

上の証明の反例として、この(1)があります。この(1)は②、③は成り立つが①が成り立たない例です。上の証明について、どこに不備があるか各自考えて見て下さい。

(2)でも③が出来なかった。 $y = 0$ のときに気づくかどうかがこの問題のポイントです。

(3)は、一番出来なかったが、手をつけていた人はほとんど満点でした。この関係 $\sim$ は、すべての関係を満たします。この同値関係の例は多くさんあり、(ア)数の相等 = (イ)三角形の合同 = (ウ)三角形の相似の(エ)ベクトルの相等 = (オ)行列の相等 = など、高校数学の中にも相当数ありますし、この考え方は数学の根本をなすものであり、自分と他の物を区別する考え方です。

最後に、1年生 菊地修一郎君の解答例を下に記し、解説を終わります。

解答例

(1) ①、 $x = 0$ のとき、 $0^2 > 0$ ではないので、成立しない。

②、 $xy > 0$ のとき $yx > 0$ なので成立する。

③、 $xy > 0$, $yz > 0$ のとき

(i) x が正の場合、 y は正となり、 z も正となるから、 $zx > 0$ ゆえに成立する。

(ii) x が負の場合、 y は負となり、 z も負となるから、 $zx > 0$ ゆえに成立する。

(2) ①、 x は実数の範囲にあるので $x^2 \geq 0$ ゆえに成立する。

②、 $xy \geq 0$ のとき、 $yx \geq 0$ なので成立する。

③、 $xy \geq 0$, $yz \geq 0$

$y = 0$ であったとき、 x が正であっても、 z が負である場合があるので、成立しない。

(3) ① $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$ だから成立する。

② $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$ のとき、 $a_2^2 + b_2^2 = a_1^2 + b_1^2$ なので成立する。

③ $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$, $a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2$ の時、 $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2$

$\therefore a_1^2 + b_1^2 = a_3^2 + b_3^2$

ゆえに成立する。

(1985. 2. 11 K. N記)

③

台形ABCD($AD \parallel BC$)と直線 l がある。辺AD, BCの長さを、それぞれ a, b とする。 $(a < b)$ $l \parallel AD$ で辺AB, DCとの交点を、それぞれP, Qとする。このとき、次の各問に答えよ。(解答にはフリーハンドでよいから必要な図を必ずかく)

問1 Pが辺ABの中点であるとき線分PQの長さを a, b で表わせ。

問2 対角線AC, BDの交点をRとしPQがRを通るとき、線分PQの長さを a, b で表わせ。

問3 線分PQの長さが $\sqrt{ab}$ となるときの点Pは辺ABをどんな比に内分しているか。

I. 配点について

問1 図：2点 説明：1点から3点まで

問2, 問3 図：3点 説明：1点～7点

特に題意を表わす図を好過した。説明が皆無でも3つの図があれば満点の3分の1に近い8点、説明の論述に誤りあったとき全てをゼロにはせず経過の書き方に注意して、できるだけ点を与えるようにした。ただしこれは入学試験に期待できることでないからくれぐれも注意すること。

II. 講評(一般的)

① 比の記号： 全員が□：○型を使っている。もう1つの分数型を誰も使っていない。前者は印刷に便利で、この講評でも殆んどをそれで示している。後者は計算に便利なので両方をうまく使い分けるよう練習した方がよい。

② 面積比と相似比： この2つを混同している。面積比は相似比の2乗になる。

③ 点の表示： ローマ大文字で点を示しているときに、ローマ小文字で示すと混乱する。(大学教授は平気でやっているのだから困る)

④ 中線と2等分線： これを混同している人が居た。数学用語だから区別すること。

⑤ 比の簡単化： 問3で答を $\sqrt{ab} : b$;
 $\sqrt{ab} - a : b - \sqrt{ab}$ のままにしておく人が多い。誤りではないが、できるだけ約すべきである。

⑥ PQをすぐ a, b, m, n の式で表わす。

$$\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC} = \frac{m}{n} \text{ としてからすぐに}$$

$$PQ = \frac{mb + na}{m + n} \text{ と}$$

かいてしまう人が居た。ベクトルや座標のときは公式としてよいが、長さについては、この式が成立する何等かの説明を要する。これをキチンと説明した人が唯一人居て、全体を満点取った。

⑦ 特別な数値での解答： 勝手に数値を与えて処理した解答は、正しい解答の1万分の1か1億分の1ぐらいしか価値が無い。

⑧ “図をみたら ワカルべ。”
この態度は、最悪である。

III 解答例について講評と指示

始めに断わっておく、コンテスト実施直後に、参加者全員に渡した「解答と解説」に書いた事柄は、ここには再び出さない。必要なときには「解、解の何頁を見よ。」とする。

1 問 1

① 図と答だけ： 本来は答だけは認められないが、ここでは公式的に暗記している人も居るだろうと思って特別に点を与えた。すると苦心して多く書いた人に気の毒になるが、ここは最も楽に片付けられる所である。“中点連結の定理。”によって、と書いた人は最も要領がよい。

② AまたはDから、DCまたはABに平行線をひく： この方法は、問1だけでなく3問全部を通して、最善の処理方法であると、当方は考えている。これで処理した人は6名、“解、解p3, p4を見よ。”

③ AとDから垂線をひき、PQ, BCとの交点をきめて： 11名が、これで処理したが、その中で注目するのは次のやり方である。場所の関係で、図は書かないから自分でかけ、以下同
“Aから PQ, BCへの垂線の足をP', B'
Dから PQ, BC ” Q', C'
とする(文字は別であってよい)
 $\triangle ABB'$ と $\triangle DC'C$ をくっつけて別に $\triangle ABC$ を考える、このやり方は実は“AからDCに平行線をひく。”というのと同じなのである。その事に注目してほしい。

ある点からある直線に垂線をひいたときその交点を“足。”ということは知っていてほしい。

④ 結果として台形の180°回転と同じになる方法： かき方は色々ある。台形ABCDと合同な台形を作って、もとの台形に上下反対にしてくっつける。という意味のものが多かった。ここでその正式な書き方を示しておくので読みながら図をかいてみよ。

“DからBCに平行線をひき、その上にDB' =

b となるように点 B' をとる、また C から AD に平行線をひき、その上に $CA' = a$ となるように点 A' をとる、直線 PQ と直線 $A'B'$ の交点を P' とする。同じことを次のようにも書く、"台形 $ABCD$ を Q 中心に 180° 回転して台形 $A'B'DC$ とする。このとき P の移った点を P' とする。尚 180° 回転については "台形 $APQD$ を Q 中心に 180° 回転して台形 $A'P'QC$ とする。の方が、よりよい。書き方は色々でもこんなアイデアで書いた人は12名いた。

- ⑤ 面積を使う：台形だから平行な2辺間の最短距離つまり"高さ。をきめられる。これを使って台形の面積公式で処理する。5名いたがこれは割と楽にできるし、3問共にこれで処理ができる。

2 問 2

ここは問題の性質上 "相似形と比。で処理した人は断然多く21名であったが、要点は、早く

$AP : PB = DQ : QC = a : b$ に気がつくこと、計算より前に、 $PR = RQ$ を解ることであったが、意外と少ない。この講評第2部の方で、Ⅲの① "平行線による比の移動。を読んでみれば解ると思う。もちろん問1の講評で触れたように、 A か D からの平行線をひくことや面積で処理もよろしい。またここだけでベクトルや座標を使うのは不利であって統一解法としてなら、無意味でない。後記する。

3 問 3

ここを答えた人は少ないし、また色々個人別であり多彩でもあった。その中で "直線 AB と直線 CD の交点を求め。て処理した人が5名いた。

4 統一的な解法

問1、問2、問3を同じ方法で処理する。これは最も上手な方法だが、試験場で直ぐ頭に浮かばなかったろう。「解、解」p3にある。

I-1を第一にすすめる。次はII、次はI-2、Ⅲ、Ⅳの順となる。以下I-2から後まで3つの方法について概略説明するが紙面の都合で図はのせないし、詳説しない。

① 「解、解」I-2方法

直線 AB 、 CD の交点を E とする。

$PQ = x$ 、 $EA = y$ 、 $AP = m$ 、 $PB = n$

として $EA : EP : EB = AD : PQ : BC$

$y : y + m : y + m + n = a : x : b$

上の式から、 x を a 、 b 、 m 、 n で表わすように

すると $x = \frac{mb + na}{m + n}$ となり

問1 では $m = n$

問2 では $m = a$ 、 $n = b$

問3 では $x = \sqrt{ab}$ として解決する。

② 座標で「解、解」のⅢ

$B(0, 0)$ $C(b, 0)$ $D(d, h)$

$A(d - a, h)$ $P(q - x, k)$ $Q(q, k)$

と座標を与え $AP : PB = m : n$ として計算すれば

$$x = \frac{bm + an}{m + n} \text{ となる。}$$

③ ベクトルで「解、解」のⅣ

$\overrightarrow{AD} = \frac{b}{a} \overrightarrow{AP}$ 、 $|\overrightarrow{AD}| = a$ 、 $\overrightarrow{PQ} = x \overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{BC} = \frac{b}{a} \overrightarrow{AP}$ 、 $\overrightarrow{AP} = m \overrightarrow{P}$ 、 $\overrightarrow{PB} = n \overrightarrow{p}$

$\overrightarrow{QD} = m \overrightarrow{q}$ 、 $\overrightarrow{CQ} = n \overrightarrow{q}$ とする

$1 < x < \frac{b}{a}$ となり $|\overrightarrow{PQ}| = ax$

$|\overrightarrow{BC}| = b$ となる。

台形 $APQD$ から

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

台形 $PBCQ$ から

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{0}$$

この2式から $\frac{(\frac{b}{a} - x)}{x - 1} = \frac{n}{m}$ となり

$$|\overrightarrow{PQ}| = ax = \frac{mb + na}{m + n} \text{ を得る。}$$

以上のように、できるのはできるが、これらが A や D から DC や AB に平行線をひく方法に比べて、如何に非能率的であるかを、よく知ってほしい。

☆ 第1部、第2部を通して結果的には、"平行線による比の移動。に片寄ったようで出題者としては、その点を後悔している。

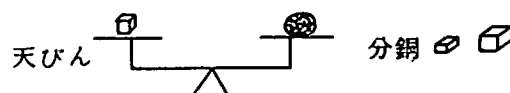
然し一方、この方法が、図形間の関係を解明するのに如何に簡明で重要であるかを参加者一同が肝に銘じてもらえれば幸いである。

4

1g, 2g, 3g, ……の分銅(おもり)がある。この中から適当な個数の分銅を選び、

(1) 天びんで1g, 2g, 3g, ……31gまでの物の重さを計りたい。少くとも何個の何gの分銅(おもり)が必要か示しその分銅で十分であることを証明せよ。ただし分銅は片方の皿にしかのせないものとする。

(2) 分銅はどちらにのせてもよいし、物体と分銅を同じ皿にのせてもよいとする。このとき適当な5個の分銅を用いて、1g, 2g, 3g, ……ngまでの物の重さを計る。nの最大値はいくらか。



講評

一般には、 $1\text{g}, 2\text{g}, 2^2\text{g}, 2^3\text{g}, \dots, 2^{n-1}\text{g}$ の n 個の分銅により、 $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1\text{g}$ 、までの整数値の重さの物体が計れる。設問の主旨にそった解答の書き方が難しかったようで $1\text{g}, 2\text{g}, 4\text{g}, 8\text{g}, 16\text{g}$ の分銅の重さを得ても部分点しかもらえなかった者が大部分であった。 1g から 31g までのすべてを上記の 5 個の分銅で計れることを列挙しても、それは十分条件であって必要条件を示していない。厳密に証明しようとするれば、自然数 k が、 $a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + a_1 \times 2 + a_0$ (a_i は 1 または 0) の 2 進数で一意的に表せることを言わなければいけない。

(2) の問題も正解者は $1\text{g}, 2\text{g}, 4\text{g}, 5\text{g}, 6\text{g}, \dots$ と実際に調べていき、 $1\text{g}, 3\text{g}, 9\text{g}, 27\text{g}, 81\text{g}$ の分銅で $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121\text{g}$ までの重さが計れることを示し、最大値 $n = 121\text{g}$ となることを求めている。正解者は少数であった。これは 3 進法の問題で、一般の 3 進法は、 $a_n \times 3^n + a_{n-1} \times 3^{n-1} + \dots + a_1 \times 3 + a_0$ (a_i は $0, 1, 2$) であるが、この問題の係数 a_i は $-1, 0, 1$ のいずれかであり、この場合対称型 3 進法表現という。この表現法でも、すべての整数は、一意的に表すことができ、特に n 桁の対称型 3 進法表現では、 $-\frac{3^n-1}{2}$ から $\frac{3^n-1}{2}$ までの整数が表せる。(1), (2) とともに出来はよくなかった。また解答と解説には、明らかな誤植があるが、下の解答例でその訂正にします。

解答例

(1) (遠藤浩太郎君)

n 個の異なった分銅を天秤にのせる組み合わせは (まったくのせないものは含まない)

$$\sum_{k=0}^n {}_nC_k = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1$$

よって 31 個の重さをはかるには、少なくとも分銅は 5 個なくてはならない。そこでその 5 個を $1\text{g}, 2\text{g}, 4\text{g}, 8\text{g}, 16\text{g}$ とし、計りたい重さを $t\text{g}$ とする ($0 < t < 32$)

t を 2 進法表示すれば $0 < t < 2^5$ だから、必ず

$$t = a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0$$

(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 は 0 または 1) と表せる。

よって $a_0, \dots, a_4$ で 1 になっているものの分銅をのせればよい。

(2) (佐藤 隆博君)

(1) より 5 個の分銅を用いると 1g から 31g までをはかることができるが、分銅はどちらにのせてもよいし、物体と分銅を同じ皿にのせてもよいことから、 1g の分銅は必要であり、 3g の分銅を用

意すると、片方に 1g 、もう片方に 3g より 2g をはかることができる。また 3g 、 4g もはかることができる。 9g の分銅があれば 5g から全部片方にのせた 13g まではかれる。また 27g の分銅があれば 14g から 40g まで、 81g の分銅があれば 41g から全部片方にのせた $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121\text{g}$ までの重さをはかれる。よって 5 個の分銅を用いると、 n の最大値は 121 となる。

第 2 部

1

$$6l - 7m + 5n = 24 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$m = pl = qn \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

p, q, l, m, n は正の整数とする。このとき

(1) $p = 2$ のとき q の値を求めよ。

(2) p, q, l, m, n の組を全部求めよ。

(1) 第一に $q = \frac{5n-24}{4n}$ 等の答えが多くあったのが気がかった。 $n > 0$ であるから q, n の関係式 $n(5-4q) = 24$ を満たす正の整数は $q = 1$ だけであるが、「解答と解説」の着眼点にもあるように、このとき n が整数になっていることを確認する必要がある。

n, q は正の整数であることより、 $5-4q = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ の場合について調べあげた人も多くいた。これは正しいのだが、やはり解答例のように q のとり得る範囲を考えるべきである。

m と q または l と q の関係式を作っても同様にできるが、 l と n または m と n の関係式を作ると簡単にはできないので、 q を含む関係式を作るべきである。

「 $l = 12$ とすると $p = 2$ のとき $q = 1$ となる」という解答も多くあった。これは「 $x^2 = x$ を満たす x を求めよ」という問いに、 $x = 1$ と答えるのと同じことであり、「 q を求めよ」ということは「条件を満たす q をすべて求めよ」ということであるから正解とはいえない。

(2) 解答例のような答えは 1 枚もなかった。

(1) の一般形として $m = qn, l = \frac{qn}{p}$ を

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } 6 \frac{qn}{p} - 7qn + 5n = 24$$

$$n \left(\frac{6q}{p} - 7q + 5 \right) = 24$$

$$n > 0 \text{ であるから } \frac{6q}{p} - 7q + 5 > 0 \text{ となる}$$

が、ここで $p \geq 3$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{6q}{p} - 7q + 5 &= q \left(\frac{6}{p} - 7 \right) + 5 \\ &\leq q \left(\frac{6}{3} - 7 \right) + 5 \\ &= -5q + 5 \\ &< 0 \quad \text{となり不適}\end{aligned}$$

よって、 $p = 1, 2$ の場合について調べればよい。

(1) と同様に n は正の整数であるから

$$\begin{aligned}\frac{6q}{p} - 7q + 5 &= 1, 2, 3, 4, 6, 8, \\ 12, 24 \text{ の場合について調べている人もいたが、} \\ \frac{6q}{p} - 7q + 5 \text{ は整数になるとは限らない。 (ただ} \\ \text{し、こほ問題では } p = 1, 2 \text{ であるから整数とな} \\ \text{っている。)}\end{aligned}$$

また、 $p = 1, 2$ の場合だけについて考えている人もいたが、やはり $p \geq 3$ のときは条件を満たす整数は存在しないことを確認しなくてはいい。

解答例 (2) のみ

(i) 白山真司君の解答

$$6l + 5n - 7m = 24 \text{ より}$$

$$6pql + 5pqn - 7pqm = 24pq$$

$$m = pl = qn \text{ より}$$

$$6qm + 5pm - 7pqm = 24pq$$

$$m(6q + 5p - 7pq) = 24pq$$

$$m > 0 \text{ より } 6q + 5p - 7pq > 0$$

$$p = 1 \text{ のとき } m(5 - q) = 24q \text{ より}$$

$$q = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{このとき } m = 6, 16, 36, 96$$

$$l = 6, 16, 36, 96$$

$$n = 6, 8, 12, 24$$

$$p = 2 \text{ のとき}$$

$$q = 1, m = n = 24, l = 12$$

$$p = 3 \text{ のとき}$$

$$m(15 - 15q) = 72q$$

$$15 - 15q > 0, q > 0 \text{ より不適}$$

$$p \geq 4 \text{ のとき}$$

$$6q - p(7q - 5) \leq 6q - 4(-5 + 7q)$$

$$= 20 - 22q$$

$$q > 0 \text{ より } 6q + 5q - 7pq < 0 \text{ となり不適}$$

よって

$$(p, q, l, m, n)$$

$$= (1, 1, 6, 6, 6), \dots\dots\dots$$

(ii) 小澤 広君の解答

$$6l - 7m + 5n = 24, m = pl, pl = qn \text{ より}$$

$$\frac{6qn}{p} - 7qn + 5n = 24 \text{ --- ③}$$

$$p = 1 \text{ のとき}$$

$$-qn + 5n = 24$$

$$n(5 - q) = 24$$

n, q は正の整数なので

$$5 - q > 0 \text{ より } q = 1, 2, 3, 4$$

このとき

$$\begin{cases} q = 1 \\ l = 6 \\ m = 6 \\ n = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} q = 2 \\ l = 16 \\ m = 16 \\ n = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} q = 3 \\ l = 36 \\ m = 36 \\ n = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} q = 4 \\ l = 96 \\ m = 96 \\ n = 24 \end{cases}$$

$$p = 2 \text{ のとき (1) より}$$

$$q = 1, m = n = 24, l = 12 \text{ となる}$$

$$p \geq 3 \text{ のとき}$$

③ より

$$n \{ 5 - (7 - \frac{6}{p})q \} = 24 \text{ の}$$

$(7 - \frac{6}{p})q$ の部分が q にどんな正の整数を入れても 5 以上になってしまうので n が負となり不適

よって

$$(p, q, l, m, n)$$

$$= (1, 1, 6, 6, 6), \dots\dots\dots$$

2

x, a, b, c をそれぞれ正の実数とすると

(1) $\frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}$ の最大値を求めよ。またそのときの x の値を求めよ。

(2) $\frac{2 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}{a + b}$ の最大値を求めよ。またそのときの a, b の値を求めよ。

(3) $\frac{3 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})}{a + b + c}$ の最大値を求めよ。またそのときの a, b, c の値を求めよ。

講 評

2 部にしてはやさしい問題で、満点は少なかったもののかなりの生徒が手をつけていた。

(1) は、 $\frac{2}{x} = t$ とおくことに気づけば、2 次関数の最大・最小に帰着させられるが、中には判別式を

用いたもの、微分を用いたもの、グラフを用いたものもあった。判別式を使ったものは、本来 $x > 0$ より、解が正であることをいわねばならないが、いていたものは少なかった。微分を用いた者は「鶏を割くに牛刀を用いる」の気味なしとしない。グラフを用いた者は厳密性に欠けていて、点数を与えてもいいような者はいなかった。

- (2) は(1)を利用するのであるが、そのために、相加相乗平均を用いる。用いることに気づいても、正しく使えない人が多い。 $a = b$ と仮定すると(1)がそのまま使えるが、なぜ $a = b$ のときに最大になるかを述べた者は1名きりだった。

- (3) は相加、相乗平均を用いるが用いかけたは2回用いなければならないため、複雑であり、正しく用いた者は少なかった。(2)の結果から類推で結果を得た者もいるが、それでは問題にならない。

結果、満点はわずか二人であり、この問題にしては不満が残る。答のみをかいていた者が多く、点数にならなかった答案も多い。全体に不等式の扱い方を知らない答案がめだった。

次に加々谷重英君の答案を解答例として上げておくので参考にしてほしい。

解答例

- (1) $\frac{2}{x}$ を x とおくと与式は $x - x^2$ で表せる。 ($x > 0$)
 $-x^2 + x = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

最大値は $x = \frac{1}{2}$ の時の $\frac{1}{4}$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{より } x = 4 \text{ の時である}$$

$$x = 4 \text{ の時 } \text{Max } \frac{1}{4}$$

- (2) まず a と b は同値である必要がある。

なぜなら、 a, b が共に正であるため $a + b$ が a, b 同値であるもの、ないもの、同じ値だった場合

- (1) $a = m \quad b = m$ とおく

- (2) $a = m + a \quad b = m - a$ とおく

$$\text{分母の } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} \text{ が}$$

- (1)の場合 $\frac{2m}{m^2}$ なのに対し

- (2)の場合 $\frac{2m}{m^2 - x^2}$ となり ($\because m^2 - a^2 < m^2$)

(1)の値よりも大きくなってしまいうからである。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ が(2)より大きくなると } 2 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$$

は(1)より小さくなり $a + b$ は同じなのだから、結果的に(1)より小さくなってしまいう

ゆえに a と b は同値だ

$b = a$ を代入

$$\frac{2 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{a})}{2a} = \frac{2 - \frac{2}{a}}{2a} = \frac{2a - 2}{2a} \\ = \frac{2a - 2}{2a^2} = \frac{a - 1}{a^2}$$

$$\text{Max} = t \text{ とおくと } \frac{a - 1}{a^2} = t$$

$$ta^2 - a + 1 = 0$$

a は正数なので解と係数の関係より $\frac{1}{t} > 0$

t^2 を両辺にかけ $t > 0$ である

a は実数なので $D = 1 - 4t \geq 0$

$$4t \leq 1 \quad t \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{よって Max } \frac{1}{4} \quad \frac{a - 1}{a^2} = \frac{1}{4} \quad a^2 = 4a - 4 \\ (a - 2)^2 = 0 \quad a = 2$$

$$a = b = 2 \text{ の時 } \text{Max } \frac{1}{4}$$

- (3) (2)と同様 a と b と c は同値であるから

$$3 - (\frac{3}{a}) = \frac{3a - 3}{a} = \frac{3a - 3}{3a^2} = \frac{a - 1}{a^2}$$

Max を A とおくと同様に

$$a = 2 \text{ の時 } \text{Max } \frac{1}{4}$$

$$a = b = c = 2 \text{ の時 } \text{Max } \frac{1}{4}$$

③

「1点AとAを通らない1直線 l があり、 l 上には3点B, C, Dがある。

線分AC, 線分BDの中点をそれぞれM, N 直線BMと直線ADの交点をE 直線BNと直線ACの交点をFとすればEFはABに平行である。」

上の命題について次の各問に答えよ。

(解答にはフリーハンドでよいから必要な図をかけ)

問1 3点がB, C, Dの順序で l 上に並んでいるとき $EF \parallel AB$ を証明せよ。

問2 自分が問1で試みた証明は3点がC, B, Dの順序で並んでいるときにあてはまるかどうか確かめてみよ。そのまま当てはまるか当てはまらないなら、どう変えればよいか明らかにせよ。

I 配点について

問1 図：5点 説明：1点から10点まで

問2 図：3点 説明：1点から7点まで

図を重要視することは、第1部と同じである。

II 講評 (一般的)

第1部と重複するものは、できるだけ避けた。

① 循環論法

結論を、知らず知らずのうちに前提して論じて行く人が7名も居た。

- ② ベクトルを使った人は多かったが皆失敗。
- ③ 座標を使った人も多かった。それには、軸をどうするかが重要なのである。
- ④ 補助線の語を第1部でも使った人が居る。これは中学で教えてないはず。これには出題者の意見があるが長くなるので省く。
- ⑤ 問2について、題意をよく掴んでいない人が多い。この関係について数学教師の研究会で出題者が詳しい発表する予定である(今秋)。

III 解答例について講評と指示

- ① 平行線による比の移動という処理が1名もなかったのは「おどろき」であった。証明すべき対象が平行線なのだから第一に浮ぶのは角の相等である。所が角だけで証明するのは無理であって試みた6名は皆失敗した。次に浮ぶのが比だろうとみた出題者の予想は見事に外れてしまった。
「三角形で一辺に平行な線と線分間の比例関係、これは基本事項として覚えておくべきである。
「三角形ABCとBCに平行な直線lがある。
lと直線AB, ACの交点をD, Eとすれば, i
 $AD:DB=AE:EC$ ii $AD:AB=AE:AC=DE:BC$ i は2辺についての比例関係 ii は3辺が皆出てくることに特徴がある。
i について「平行線で $AD:DB$ が $AE:EC$ に移る。という考え方をするのが役に立ち, ii でも同様である。ここにわざわざ直線AB, ACとした所に注目してほしい。どちらの延長と出合っても比例関係不変である。

② ベクトル

ベクトルを使った人が12名も居た。当然だろう平行だからベクトル、2年生以上は直ぐ思いつくのである。所が成功していない。理由の1つには「ベクトルの数が多い、がある。

ここはその欠点を補う為にどうしても

「位置ベクトル」を使うべきである。Bを始点として $A(\vec{a})$ $C(\vec{c})$ $D(k\vec{c})$ $k>1$ その後は色々やり方があるが一つの例としては

$$\begin{aligned}\vec{BE} &= p\vec{BM} & \vec{BF} &= q\vec{BN} \\ \vec{BE} &= s\vec{BA} + (1-s)\vec{BD} \\ \vec{BF} &= t\vec{BA} + (1-t)\vec{BC} \quad \text{として}\end{aligned}$$

s, t の関係を p, q, k から求めて

$$\vec{EF} = (1-2s)\vec{a} \text{ を得て証明終り}$$

このときの k, p, q, s, t には、それぞれ範囲が定まるが証明には無関係である。

以上は問1についてであるが、問2についてBがCDの中点でなければ全く同じに証明される。BがCDの中点ならば $BM \parallel DA$, $BN \parallel CA$ でE, Fは存在しない。だが2年生以上は「基礎解析」で極限値を習っている。今BMがずっと遠い所で出会っているとしてその点をEとしておく、またBNもそのように考えてFとしておく。ここで $NA=a, NB=b, AE=x, BF=y$

a, b は定値 $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ とする。

$$\frac{NE}{AE} = \frac{NA+AE}{AE} = \frac{NA}{AE} + 1 = \frac{a}{x} + 1 \rightarrow 1$$

同様にして $\frac{NF}{BF} \rightarrow 1$

極限値が等しいから $\frac{NE}{AE} = \frac{NF}{BF}$ として

$EF \parallel AB$ がいえる。

③ 座標で

座標を使った人は9名、これもその気持がわかるのだが、失敗した人は計算が複雑になってグウンした。その原因は、座標軸の与え方にある。つまり各点の座標に使う文字が多くなると大変、それを少なくするには l を x 軸、Aから l に垂線をひき、それを y 軸にすれば文字が少なくて何とかなる。これで成功した人の中でこの問題全体を満点にした人が一人居た。

生徒が高校までで習うのは「直交軸、というもののだが、これを「斜交軸、ABを y 軸、 l を x 軸にするともっと楽になる。

④ 記憶してもらいたい

「平行線による比の移動、という処理方法が、どんなに簡単か「解、解」のp7右半を見てほしい。

- ⑤ 問2でBがCDの中点の場合ベクトルの所で示したが、どのような解法にしても、Bが中点であればE, Fは存在しないのであるから高校では、この場合を除いて構わない、然し数学はそんなに狭い量見を持たない。そこで最も考え易く説明も簡単な平行線による比の移動を元にして考えてみよう。とにかくBがCDの中点でなければ必ずEFはABに平行になる。さてBをCDの中点に近づければE, Fは、それぞれ直線AB, AC上、ずっと遠くに存在することになるが、それでもEFはABに平行になっている。この性質はE, Fが、どんなに遠い所にあっても不変である。

「平行、という概念は「2直線は必ず1点で交わる、という公理を確定すれば「無限遠点で交わる、ことになる。そこで無限遠点でもこの性質は変わらないとして「EFはABに平行、とする。

諸君が将来理系の大学に入学すれば「射影幾何、
という面白い学科があって、これらについてのモ
ヤモヤを解消されることであろう。今ここに書いた
事は「極限值、の考え方と一致する。

⑥ 直線には向きがある

ベクトルや座標で、ボンヤリ出てくるが、今回の
問題も「直線の向き」を考えながら解答すること
になれば恐ろしく難かしい事になる。然し数学
をやる以上「直線の向き」から目を外らすわけに
は行かない。それは丁度「すべての数にはプラス、
マイナスの符号がついている」として代数以上で
学ぶことと一致している。これらに就いても先生
方の研究会で発表する予定である。

4

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n \quad (n \geq 1)$$

なる多項式と任意の数 λ について、

$$g(x) = (x - \lambda)f(x)$$

$$= c_0 x^{n+1} + c_1 x^n + \cdots + c_{n+1}$$

とおき、

$$\text{Max}(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|) = a \quad (|)$$

$$\text{Max}(|c_0|, |c_1|, \dots, |c_{n+1}|) = c \quad (> 0)$$

であるとき、

$$\frac{a}{c} \leq n + 1$$

を次の場合に分けて示せ。ただし、 $\text{Max}(x, y, \dots, z)$ は $x, y, \dots, z$ の中の最大なものを表す。

$$(1) |\lambda| \leq 1 \quad (2) |\lambda| \geq 1$$

講評

正解にたどりついた者は全くいなかった。問題文
自体を理解するのに手間どり、高校生には不慣れだ
ったと思う。Max は Maximum (最大値) の略で、
他に Minimum (最小値) の略である Min という記
号もある。今後出てくることもあろうかと思うので
例を挙げておこう。

例 $\text{Max}(2, -1, 3) = 3$

$\text{Min}(2, -1, 3) = -1$ など。

さらに、絶対値記号 $|*|$ の性質については、 a, β
を実数として、

$$(i) |a + \beta| \leq |a| + |\beta|$$

$$(ii) |a\beta| = |a| |\beta|$$

が成り立つ。証明は数学 I の教科書にあらう。

ところで、(i), (ii) の関係は a, β が複素数であ
っても成立する。いま、 $a = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d は実数、 i は虚数単位) とし、 $|a| = \sqrt{a^2 + b^2}, | \beta | = \sqrt{c^2 + d^2}$ と定義する。この定義は a, β が実数のときは、

$$|a| = \sqrt{a^2} = |a|, |\beta| = \sqrt{c^2} = |c|$$

となり、実数の場合と両立している。さて (ii) はす
ぐさま示せる。

$$a\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

だから、

$$\begin{aligned} |a\beta|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= |a|^2 |\beta|^2 \\ &= (|a| |\beta|)^2 \end{aligned}$$

$$|a\beta| \geq 0, |a| \geq 0, |\beta| \geq 0 \text{ より、}$$

$$(ii) |a\beta| = |a| |\beta|$$

$$(i) \text{ は、 } a + \beta = (a + c) + (b + d)i$$

$$\begin{aligned} |a + \beta|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) \\ &= |a|^2 + |\beta|^2 + 2(ac + bd) \end{aligned}$$

ここで、 $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ を示そ
う。

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 &= a^2 d^2 - 2abcd + b^2 c^2 \\ &= (ad - bc)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって、 } (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$|ac + bd| \leq |a| |\beta|$$

上のことから、

$$\begin{aligned} (|a| - |\beta|)^2 &\leq |a + \beta|^2 \\ &\leq (|a| + |\beta|)^2 \end{aligned}$$

一般に

$$||a| - |\beta|| \leq |a + \beta| \leq |a| + |\beta|$$

が成り立つ。

この問題は、係数および λ が複素数であっても成
立する関係である。

解答例

$$\begin{aligned} (1) g(x) &= (x - \lambda)f(x) \\ &= a_0 x^{n+1} + (a_1 - \lambda a_0)x^n + (a_2 - \lambda a_1)x^{n-1} \\ &\quad + \cdots + (a_n - \lambda a_{n-1})x - \lambda a_n \end{aligned}$$

$$\therefore c_0 = a_0, c_1 = a_1 - \lambda a_0, c_2 = a_2 - \lambda a_1, \dots,$$

$$c_n = a_n - \lambda a_{n-1}, c_{n+1} = -\lambda a_n$$

$$\text{よって、 } a_0 = c_0, a_1 = c_1 + \lambda a_0, a_2 = c_2 + \lambda a_1, \dots, a_n = c_n + \lambda a_{n-1}.$$

$$\text{条件より、 } |c_0| \leq c, |c_1| \leq c, \dots, |c_n| \leq c$$

$$\text{だから、 } |\lambda| \leq 1 \text{ ならば、}$$

$$|a_0| = |c_0| \leq c$$

$$\begin{aligned} |a_1| &= |c_1 + \lambda a_0| \leq |c_1| + |\lambda a_0| \\ &= |c_1| + |\lambda| |a_0| \leq |c_1| + |a_0| \leq 2c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_2| &= |c_2 + \lambda a_1| \leq |c_2| + |\lambda a_1| \\ &= |c_2| + |\lambda| |a_1| \leq |c_2| + |a_1| \leq 3c \end{aligned}$$

以下同様に、

$$\begin{aligned}
 |a_n| &= |c_n + \lambda a_{n-1}| \leq |c_n| + |\lambda a_{n-1}| \\
 &= |c_n| + |\lambda| |a_{n-1}| \leq |c_n| + |a_{n-1}| \\
 &\leq c + nc = (n+1)c
 \end{aligned}$$

故に, $|a_i| \leq (n+1)c$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$)

よって, $a \leq (n+1)c$, すなわち

$$\frac{a}{c} \leq n+1 \quad (\text{証明終})$$

(2) $|\lambda| \geq 1$ より, $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\lambda x^{n+1}} g(x) &= \frac{x-\lambda}{-\lambda x} \cdot \frac{1}{x^n} f(x) \\
 &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda} \right) \left(a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{x} + a_2 \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{x^n} \right)
 \end{aligned}$$

よって, $\frac{1}{x} = x$ とおくと,

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{\lambda} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n+1} x^{n+1}) \\
 &= (x - \frac{1}{\lambda}) (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)
 \end{aligned}$$

$|\frac{1}{\lambda}| \leq 1$ より(1)の結果を用いると,

$$a \leq (n+1) \cdot \frac{c}{|\lambda|}$$

$$\therefore \frac{a}{c} \leq \frac{n+1}{|\lambda|} \leq n+1 \quad (\text{証明終})$$

別 解

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= c_0 \\
 a_1 &= c_1 + \lambda a_0 = c_1 + \lambda c_0 \\
 a_2 &= c_2 + \lambda a_1 = c_2 + \lambda c_1 + \lambda^2 c_0 \\
 &\dots \\
 a_n &= c_n + \lambda c_{n-1} + \dots + \lambda^n c_0
 \end{aligned} \right\} \quad \textcircled{1}$$

あるいは, $\lambda \neq 0$ なら

$$\left. \begin{aligned}
 a_n &= -\frac{c_{n+1}}{\lambda} \\
 a_{n-1} &= -\frac{c_{n+1}}{\lambda^2} - \frac{c_n}{\lambda} \\
 a_{n-2} &= -\frac{c_{n+1}}{\lambda^3} - \frac{c_n}{\lambda^2} - \frac{c_{n-1}}{\lambda} \\
 &\dots \\
 a_0 &= -\frac{c_{n+1}}{\lambda^{n+1}} - \frac{c_n}{\lambda^n} - \dots - \frac{c_1}{\lambda}
 \end{aligned} \right\} \quad \textcircled{2}$$

$\lambda = 0$ なら, $a = c$ より, $\frac{a}{c} = 1$

$\lambda \neq 0$ とする。

$|\lambda| \leq 1$ なら①より, $|a_i| \leq (n+1)c$

$|\lambda| \geq 1$ なら②より, $|a_i| \leq (n+1)c$

よって, $\frac{a}{c} \leq n+1 \quad (\text{証明終})$