

## 問題 2

$n$  が正の整数のとき、 $N=n^3-n$  の一の位の数をも  $f(n)$  とする。例えば、 $n=6$  のとき、 $N=6^3-6=210$  であるから、 $f(6)=0$  である。

次の問いに答えよ。

- (1)  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(8)$  の値を求めよ。
- (2)  $n=5k-2$  ( $k$  は正の整数) のとき、 $f(n)$  を求めよ。
- (3)  $f(n)=0$  となる正の整数  $n$  を求めよ。
- (4)  $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2012)$  の値を求めよ。

### 着眼点

- (1) 具体的に計算すればよい。
- (2) 整数  $N$  の一の位を調べるには、 $N$  を  $10 \times \text{整数} + \alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 9$ ) の形に変形する。
- (3)  $N$  を因数分解する。連続する 2 つの自然数の積は 2 の倍数となる。
- (4)  $n=5k-3$  のときの  $f(n)$  を求め、 $f(n)$  の周期性に着目すればよい。

### 解答例

- (1)  $n=2$  のとき、 $N=2^3-2=6$  ゆえに、 $f(2)=6$   
 $n=3$  のとき、 $N=3^3-3=24$  ゆえに、 $f(3)=4$   
 $n=8$  のとき、 $N=8^3-8=504$  ゆえに、 $f(8)=4$

- (2)  $n=5k-2$  のとき、

$$\begin{aligned} N &= (5k-2)^3 - (5k-2) \\ &= 125k^3 - 150k^2 + 55k - 6 \\ &= 10(12k^3 - 15k^2 + 5k - 1) + 5k(k^2 + 1) + 4 \end{aligned}$$

ここで、 $5k(k^2+1)$  について、 $k$  と  $k^2+1$  のどちらか一方は 2 の倍数となるので、 $5k(k^2+1)$  は 10 の倍数となる。

ゆえに、 $N$  の一の位は 4 となるので、 $f(5k-2)=4$

- (3)  $N=n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$  が 10 の倍数となればよい。

$n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$  の少なくとも 1 つは 2 の倍数となるので、3 つのうち 1 つが 5 の倍数となればよい。

$m$  を整数とすると、 $n-1=5m$  または  $n=5m$  または  $n+1=5m$ 、すなわち、 $n=5m+1$ ,  $5m$ ,  $5m-1$  が成り立てばよいので、 $n$  が正の整数になるように表すと、

$$n=5k-4, 5k-1, 5k \quad (k \text{ は正の整数})$$

- (4) 整数  $n$  は  $5k-4$ ,  $5k-3$ ,  $5k-2$ ,  $5k-1$ ,  $5k$  のいずれかで表されるが、(2)(3)の結果から、

$$f(5k-4)=0, f(5k-2)=4, f(5k-1)=0, f(5k)=0$$

であるから、 $n=5k-3$  の場合について調べる。

$n=5k-3$  のとき、

$$\begin{aligned} N &= (5k-3)^3 - (5k-3) \\ &= 125k^3 - 225k^2 + 130k - 24 \\ &= 10(12k^3 - 23k^2 + 13k - 3) + 5k^2(k+1) + 6 \end{aligned}$$

ここで、 $5k(k^2+1)$  について、 $k$  と  $k^2+1$  のどちらか一方は 2 の倍数となるので、 $5k(k^2+1)$  は

10 の倍数となる。

ゆえに、 $N$  の一の位は 6 となるので、 $f(5k-3)=6$

したがって、

$$f(1)=f(6)=f(11)=\cdots=f(2006)=f(2011)=0$$

$$f(2)=f(7)=f(12)=\cdots=f(2007)=f(2012)=6$$

$$f(3)=f(8)=f(13)=\cdots=f(2008)=4$$

$$f(4)=f(9)=f(14)=\cdots=f(2009)=0$$

$$f(5)=f(10)=f(15)=\cdots=f(2010)=0$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} & f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2012) \\ &= 402\{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)\}+f(2011)+f(2012) \\ &= 402(0+6+4+0+0)+0+6 \\ &= 4026 \end{aligned}$$

**配点** (1) 6 点 (2) 10 点 (3) 10 点 (4) 14 点

#### **講評**

(1)について、ほとんどの生徒は出来ていました。

(2)について、 $f(5k-2)$  を正確に計算し、 $k$  が奇数と偶数に場合分けした生徒は点数をとることが出来ました。得点できなかった答案の多くは、計算ミス、あるいは、説明不足である解答のいずれかでした。

(3)について、一の位の数字に着目し、一の位が 0, 1, 4, 5, 6, 9 である整数と解答した生徒が多く見られました。説明がきちんとしていれば得点を与えましたが、やはり解答例の  $n=5k-4, 5k-1, 5k$  ( $k$  は正の整数) と表すのがベストかと思います。

(4)の問題は、(2)(3)の設定で求めている  $n=5k-3$  の場合を求め、 $f(n)$  の周期性を示す問題です。多くの生徒は周期性に気がついたようですが、推定で終わっている解答については減点しました。

(北海道岩見沢東高等学校 大和達也)