

問題 3

三角形の内部に中心があり三辺すべてに接する円を三角形の内接円という。内接円の中心（内心）はこの三角形の3つの角の2等分線の交点である。（3つの角の2等分線が1点で交わることは説明なしで使ってよい。）

一般に $\triangle ABC$ に対して各辺の長さをそれぞれ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ と表す。ここでは、 $\angle C = 90^\circ$ である直角三角形 $\triangle ABC$ について考える。

- (1) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r を a , b , c を用いて表しなさい。
- (2) 三角形の内部に中心をもち、2辺 BC , BA にともに接する円を O_1 とする。円 O_1 の半径を r_1 とし円 O_1 の中心（中心も O_1 と表す）から辺 BC に引いた垂線の交点（垂線の足という）を H_1 とする。このとき、 BH_1 の長さが $\frac{c+a}{b}r_1$ となることを説明しなさい。
- (3) $\triangle ABC$ の内部に中心を持つ同じ半径 r の二つの円（辺 BC と辺 BA の両方に接する円 O_1 , 辺 AC と AB の両方に接する円 O_2 ）があり二つの円は外接しているものとする。解答用紙の $\triangle ABC$ の図の中にこのような2つの円を描きなさい（free-handでよい）。また、このときの半径 r の値を a , b , c を用いて表しなさい。

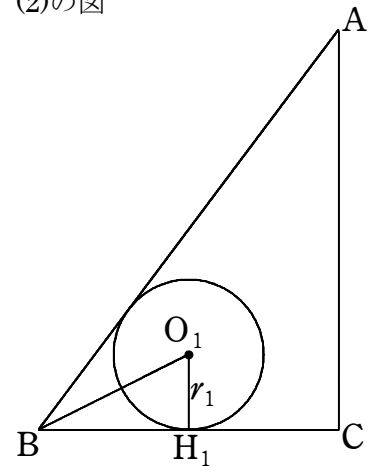
ここからは、 $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ の直角三角形 ABC ($\angle C = 90^\circ$)について考える。

- (4) $\triangle ABC$ について辺 BC と辺 BA の両方に接する円 O_1 （半径 r_1 ）及び辺 AC と AB の両方に接する円 O_2 （半径 r_2 ）があり二つの円は外接しているとする。（ r_1 と r_2 の値は一致しているとは限らない。）このとき、 r_1 , r_2 の間に成り立つ式を書きなさい。
- (5) $\triangle ABC$ の辺 CB , CA の両辺に接する円 O （半径 r ）を定め、円 O と辺 BC と辺 BA に接する円 O_1 （半径 r_1 ）, 円 O と辺 AC と AB に接する円 O_2 （半径 r_2 ）を描く。ただしどの円も三角形の外部の点は通らないものとする。このとき、半径 r_1 と半径 r_2 の値をそれぞれ r を用いて表しなさい。

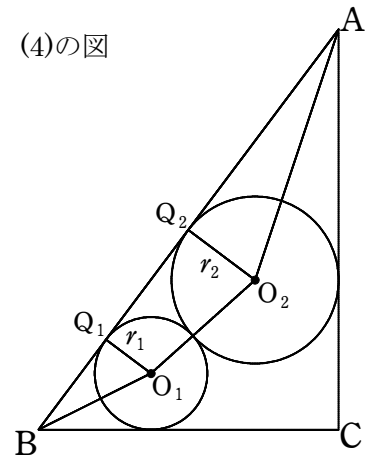
O, O_1, O_2 が外接するときこの3つの円はいずれも円の内部で三角形の2辺と接してお互いに外接する。一般にこのような円をマルファッチの円という。マルファッチは18-19世紀のイタリアの数学者だが、江戸時代の日本の和算家安島直円（あじまなおのぶ）はマルファッチより先にこの分野の研究を行い独自に結果を出している。

- (6) ここまでの結果を用いて、(4)(5)の条件のもとで、 O, O_1, O_2 がマルファッチの円になるときの r の値を求めなさい。
ヒント：(5)で得られた式を(4)の式に代入する。

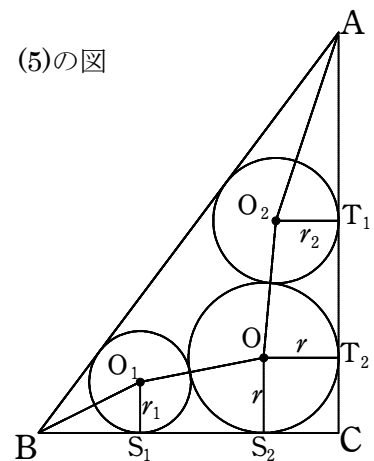
(2)の図



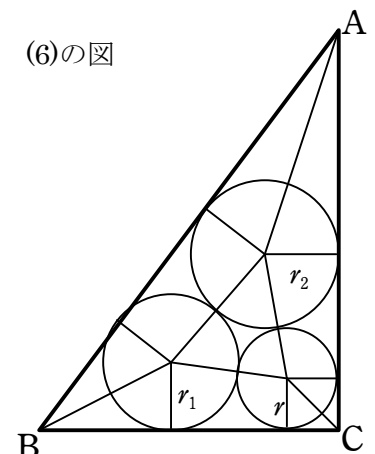
(4)の図



(5)の図



(6)の図



着眼点

江戸時代の和算についての本「日本の幾何—何題解けますか」(1991年初版 深川英俊, ダン・ペドー共著 森北出版)に出ている算額の問題をヒントに考えた。この問題の(3)は、昨年話題になった江戸時代の和算家にして天文・暦学者「渋川春海」を主人公にした小説「天地明察」の中に出てくる問題と実質的に同じである。小説中では主人公がこの問題がなかなか解けなくて苦勞するところを、あつという間に解いてしまう男がいて、それが算聖「関孝和」だったという設定になっている。

分野的にいえば現在数Aの教科書に載っている平面幾何の内容だが、数Iの三角比(正弦定理・余弦定理・面積の公式など)、数IIの三角関数(半角の公式)、数Bのベクトルを用いて解くことも可能。

(1) 直角三角形の内接円の半径については①円外の点から引いた接線の長さが等しいことを使う方法②内接円の半径を高さとする3つの三角形の面積の和を用いる方法の2種類ある。どちらでもOK。式は2通りあるが実は一致している。

(2) 角の2等分線の性質(数A)を使うのが一般的。

(3) 条件を満たす図が描けるだろうか、図をもとに式を作ってみよう。

(4) O_1, O_2 の中心から辺ABに引いた垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とすると $BH_1 + H_1H_2 + H_2A = BA$ が成り立つ。 H_1H_2 は台形の図を描いて三平方の定理を用いると求められる。

(5) 基本的な考え方は(4)と同じだが、 r_1 を r の式で表すには $\sqrt{r_1} = t$ とおいて t についての2次方程式を解

けばよい。 r_1 は t の2乗で求められる。同様に $\sqrt{r_2} = s$ とおくことによって r_2 も求められる。

(6) マルファッチの条件を満たすときは r, r_1, r_2 を含む連立2次方程式を解けばよい。根号を含む式で計算は大変だが、最終的には2次方程式を解く問題に帰着する。なお、一般の三角形についてマルファッチの円を求めるにはヘロンの公式(面積)と半角の公式(三角関数)を用いるが、計算が膨大で一般的に解くのは大変になる。しかし、安島直円はマルファッチの条件を満たす、三辺の長さが整数であるような三角形について結果を出している。

解答例

(1) 《方法1》内心をI,点Iから辺BC,CA,ABに垂線を引き、垂線と

辺の交点(垂線の足という)をそれぞれ M_1, M_2, M_3 とする。

$IM_1 \perp BC, IM_2 \perp CA, IM_3 \perp AB$ さらに $C=90^\circ$ より四角形 IM_1CM_2 は隣り合う2辺の長さが等しい長方形なので正方形である。よって、 $IM_1=IM_2=M_1C=M_2C=r$ 。

円外の点から引いた接線の長さは等しいので

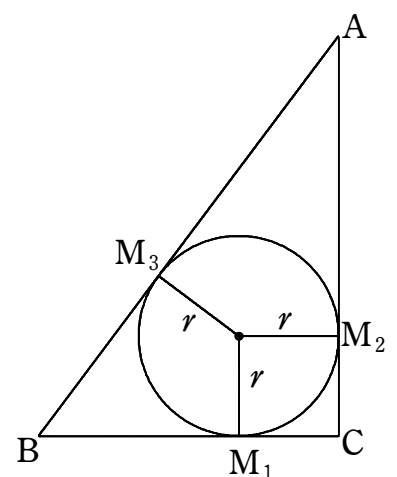
$$BM_1 = BM_3 = a - r, \text{ 同様に, } AM_3 = AM_2 = b - r$$

よって、 $AB = BM_3 + M_3A = c$ より

$$a - r + b - r = c \quad \text{ゆえに, } r = \frac{a + b - c}{2}$$

《方法2》 $\triangle ABC$ の面積を内心Iによって $\triangle IBC, \triangle ICA, \triangle IAB$ の3つの三角形の和にすると

$$\triangle IBC = \frac{1}{2}ar, \triangle ICA = \frac{1}{2}br, \triangle IAB = \frac{1}{2}cr \text{ で } \triangle ABC = \frac{1}{2}ab \text{ (直角三角形)}$$



$$\text{より, } \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}ab \quad \text{ゆえに, } r = \frac{ab}{a+b+c}$$

$\triangle ABC$ は $\angle C=90^\circ$ の直角三角形であるから $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ が成り立つので、代入して有理化すると方法2の式は方法1の式と一致することがわかる。

(2) 2辺BA, BCに内接する円の中心 O_1 は $\angle B$ の2等分線上にあるので $\angle B$ の二等分線と辺ACの交点をPとすると、点PはACを $c:a$ に内分する点である。AC=bより $PC = b \times \frac{a}{a+c} = \frac{ab}{a+c}$

$\triangle BO_1H_1$ と $\triangle BCP$ は相似なので、

$$BH_1 : O_1H_1 = BC : PC \text{ より } BH_1 : r_1 = a : \frac{ab}{a+c}$$

$$\text{よって, } BH_1 = \frac{a+c}{b} r_1$$

(3) 円 O_2 (半径 r_2 とする) の中心から辺ACに引いた垂線の交点を H_2 とすると、(2)と同様に相似を用いて、 $AH_2 = \frac{b+c}{a} r_2$

円 O_1 と辺ABの接点を Q_1 、円 O_2 と辺ABの接点を Q_2 とすると

$$BH_1 = BQ_1 = \frac{a+c}{b} r_1, \quad AH_2 = AQ_2 = \frac{b+c}{a} r_2$$

$r_1 = r_2 = r$ であるから、 $O_1Q_1 \perp AB, O_2Q_2 \perp AB$ より O_1Q_1 と O_2Q_2 は平行で、 $O_1Q_1 = O_2Q_2 = r$ より四角形 $O_1Q_1Q_2O_2$ は平行四辺形。

さらに、隣り合う2角が 90° の平行四辺形なので長方形である。

O_1, O_2 は外接しているのだから $O_1O_2 = 2r$ 。よって $Q_1Q_2 = 2r$

$$AB = AQ_2 + Q_1Q_2 + BQ_1 = \frac{a+c}{b} r + 2r + \frac{b+c}{a} r = c \text{ より}$$

$$\frac{(a+c)a + 2ab + (b+c)b}{ab} r = \frac{a^2 + 2ab + b^2 + c(a+b)}{ab} r = \frac{(a+b)(a+b+c)}{ab} r = c$$

$$\text{よって, } r = \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)}$$

(4) (2)(3)より、 $BQ_1 = \frac{a+c}{b} r_1, AQ_2 = \frac{b+c}{a} r_2$

$$\text{ここで } a=3, b=4, c=5 \text{ より, } BQ_1 = \frac{3+5}{4} r_1 = 2r_1, AQ_2 = \frac{4+5}{3} r_2 = 3r_2$$

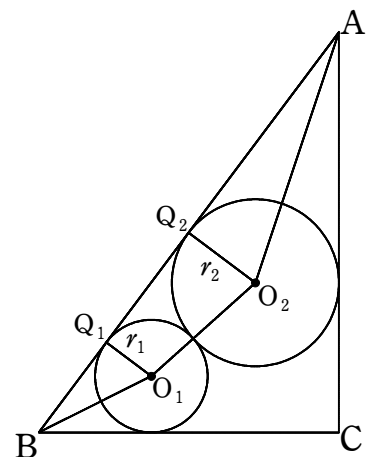
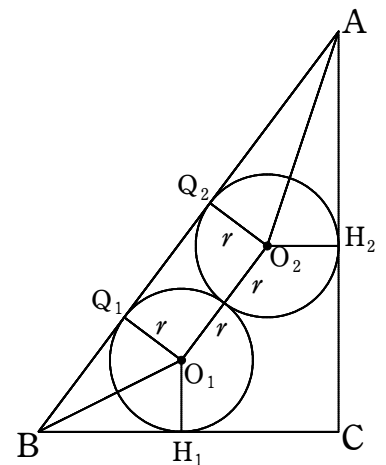
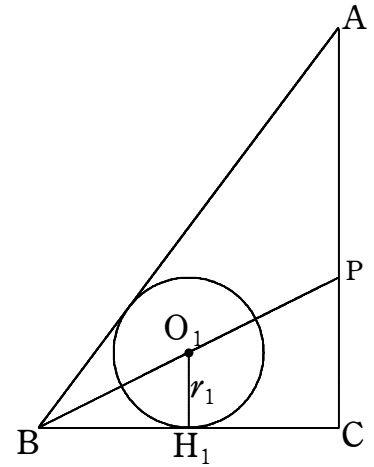
四角形 $O_1Q_1Q_2O_2$ は $r_1 \neq r_2$ のときは台形となる。

i) $r_1 < r_2$ のとき

点 O_1 から半径 O_2Q_2 に垂線を引いて交点をRとすると $\triangle O_1RO_2$ は直角三角形で $RO_2 = r_2 - r_1, O_1O_2 = r_1 + r_2$

$$\text{三平方の定理より } O_1R^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 = 4r_1r_2$$

$$Q_1Q_2 = O_1R = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$$



ii) $r_1 > r_2$ のとき

点 O_2 から半径 O_1Q_1 に垂線を引いて交点を R とすると $\triangle O_2RO_1$ は直角三角形で

$$RO_1 = r_1 - r_2, \quad O_1O_2 = r_1 + r_2 \quad \text{三平方の定理より } O_2R^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 = 4r_1r_2$$

$$Q_1Q_2 = O_2R = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$$

iii) $r_1 = r_2$ のとき

(3)より $Q_1Q_2 = 2r = 2\sqrt{r \times r}$ となっているので上に含めてよい

よって、いずれの場合も $BQ_1 + Q_1Q_2 + AQ_2 = AB$ より、 $2r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} + 3r_2 = 5$ が成り立つ

(5) 円 O_1, O の中心から辺 BC に引いた垂線の交点をそれぞれ S_1, S_2 とすると

$BS_1 + S_1S_2 + CS_2 = BC$ が成り立つ。

ここで、 $\angle C = 90^\circ$ より $CS_2 = r$

また、(4)と同様に $S_1S_2 = 2\sqrt{r_1r}$ 、 $BS_1 = 2r_1$ が成り立つので、

$$2r_1 + 2\sqrt{r_1r} + r = 3$$

$t = \sqrt{r_1}$ とおくと、 $2t^2 + 2\sqrt{rt} + r - 3 = 0$ より、2次方程式を解いて

$$t = \frac{-\sqrt{r} \pm \sqrt{(\sqrt{r})^2 - 2(r-3)}}{2} = \frac{-\sqrt{r} \pm \sqrt{6-r}}{2} \quad t > 0 \text{ より, } t = \frac{\sqrt{6-r} - \sqrt{r}}{2}$$

$$\text{よって, } \sqrt{r_1} = \frac{\sqrt{6-r} - \sqrt{r}}{2} \quad \text{ゆえに, } r_1 = (\sqrt{r_1})^2 = \left(\frac{\sqrt{6-r} - \sqrt{r}}{2}\right)^2 = \frac{3 - \sqrt{r(6-r)}}{2}$$

同様に、円 O_2, O の中心から辺 AC に引いた垂線の交点をそれぞれ T_1, T_2 とすると

$AT_1 + T_1T_2 + CT_2 = AC$ が成り立つ。

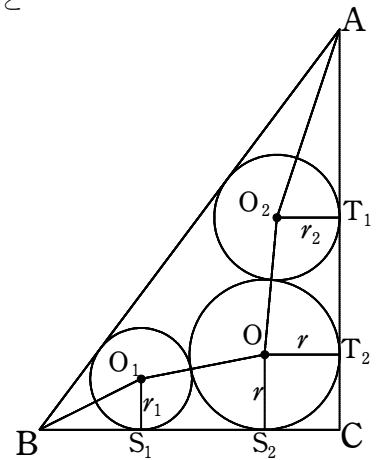
$CT_2 = r$ 、 $T_1T_2 = 2\sqrt{r_2r}$ 、 $AT_1 = 3r_2$ であるから、 $3r_2 + 2\sqrt{r_2r} + r = 4$

$s = \sqrt{r_2}$ とおくと、 $3s^2 + 2\sqrt{rs} + r - 4 = 0$ より、2次方程式を解いて

$$s = \frac{-\sqrt{r} \pm \sqrt{(\sqrt{r})^2 - 3(r-4)}}{3} = \frac{-\sqrt{r} \pm \sqrt{12-2r}}{3} \quad s > 0 \text{ より } s = \frac{\sqrt{12-2r} - \sqrt{r}}{3}$$

$$\text{よって, } \sqrt{r_2} = \frac{\sqrt{12-2r} - \sqrt{r}}{3} \quad \text{ゆえに, } r_2 = (\sqrt{r_2})^2 = \left(\frac{\sqrt{12-2r} - \sqrt{r}}{3}\right)^2 = \frac{12 - r - 2\sqrt{2r(6-r)}}{9}$$

(6) (5)の結果を(4)の式 $2r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} + 3r_2 = 5$ に代入すると



$$2 \times \frac{3 - \sqrt{r(6-r)}}{2} + 2 \frac{\sqrt{6-r} - \sqrt{r}}{2} \times \frac{\sqrt{12-2r} - \sqrt{r}}{3} + 3 \times \frac{12-r-2\sqrt{2r(6-r)}}{9} = 5$$

両辺を3倍して

$$9 - 3\sqrt{r(6-r)} + \sqrt{2}(6-r) - \sqrt{r(6-r)} - \sqrt{2}\sqrt{r(6-r)} + r + 12 - r - 2\sqrt{2r(6-r)} = 15$$

$$6 + 6\sqrt{2} - \sqrt{2}r = (4 + 3\sqrt{2})\sqrt{r(6-r)}$$

両辺を2乗して

$$36 + 72 + 2r^2 + 72\sqrt{2} - 24r - 12\sqrt{2}r = (34 + 24\sqrt{2})(6r - r^2)$$

$$(36 + 24\sqrt{2})r^2 - (228 + 156\sqrt{2})r + 108 + 72\sqrt{2} = 0$$

両辺を12で割って

$$(3 + 2\sqrt{2})r^2 - (19 + 13\sqrt{2})r + 9 + 6\sqrt{2} = 0$$

$3 - 2\sqrt{2}$ を両辺にかけて

$$(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})r^2 - (19 + 13\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})r + 3(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$r^2 - (5 + \sqrt{2})r + 3 = 0$$

$$\text{よって, } r = \frac{5 + \sqrt{2} \pm \sqrt{(5 + \sqrt{2})^2 - 12}}{2} = \frac{5 + \sqrt{2} \pm \sqrt{15 + 2\sqrt{50}}}{2} = \frac{5 + \sqrt{2} \pm (\sqrt{10} + \sqrt{5})}{2}$$

ここで、(1)よりBC=3, CA=4, AB=5のときの内接円の半径が1であるから $r < 1$

$$\text{ゆえに, } r = \frac{5 + \sqrt{2} - (\sqrt{10} + \sqrt{5})}{2} = \frac{5 + \sqrt{2} - \sqrt{10} - \sqrt{5}}{2}$$

配点 (1) 6点 (2) 6点 (3) 8点 (4) 6点 (5) 6点 (6) 8点

講評

この問題（マルファッチの円）については、平面幾何（平面図形）分野の問題で以前から数学コンテスト向きではないかと考えて出題を検討していた問題です。マルファッチがこのような円を考えた理由（仮説）については、面白い話が2004年にハヤカワ文庫から出た「数学はインドのロープ魔術を解く」（この本は数学が得意でない人が読んで面白いと思うので入手できたら読んでみてください）という本に載っています。

今回は最初から3つの円について考えるのも大変なので、簡易版として三角形の内部にある外接する2つの円の問題、および入門編として三角形の内接円の半径を求める問題も添えました。また、このような問題は江戸時代の数学愛好者にとっても手ごろな問題だったとみえて、当時算額の問題としても実際に様々な形で出題されています。着眼点にも書きましたが、(3)の問題は小説「天地明察」にも出てきて主人公を悩ませた問題ですが、実際に算額で出題されたものです。

江戸時代の問題と同じだからといって昔の人と同じ方法で解く必要もありませんが、当時の人がどのように問題を解いていたかを想像力を働かせると楽しいものです。ご存知のとおり江戸時代は鎖国によって海外との交流が途絶えていたこともあり、このような日本の和算家たちの発見はようやく明治以降に海外に伝えられて

驚きの目を持って見られています。関孝和を西洋の微分積分学の祖ニュートンと並べ評する人もいます。分野によっては当時のヨーロッパより日本の方が進んでいたところもあると思います。

(1) 1つの円（三角形の内接円）の半径については、数A（平面図形）及び数I（三角比）で学んでいます。2通りの計算方法があり異なる2つの式で表せます。ただし、2つの式は変形してみると一致することがわかります。(1)はほとんどの人が手をつけてくれて出来もよく、正解率 77.5%でした。間違えた人の中では、外接円と取り違えて正弦定理を用いて表そうとした人が目立ちました。幾何の問題としては比較的やさしい部類なので答えのみを描いた人もいましたが、ほとんどの人が説明も含めて書いてくれました。解答例に載せた2つの答え方ですが、圧倒的に後の形で書いている人が多かったのですが、中に1人だけ2つの解答が一致することにまで述べていた人もいました。

(2) 内接円の中心は角の二等分線上にあるので、円の半径を表すのに角の二等分線の性質を使うのが一般的かと考えて出題したのが(2)ですが、面積を用いてこのことを説明した解答もありました。いずれにしても(3)以降のヒントになることを考えての問題です。正解率は 47.5%でした。説明せよという問題なので(2)ができてなくても(2)の結果を(3)で用いた人もいましたが、それについては可としました。しかし、問題を逆に考えて、(2)の結果を満たすとき円が2辺に接することを示した人もいましたが、論理としてはまずいので評価していません(逆は必ずしも真ならず)。

(3) 作図(2点)+半径の計算(6点)としましたが、予想外に図で手こずった人が多かったように思いました。(4)の場合の図（半径が異なる場合の図）が問題の本文の中にあっただけで、それを参考にすれば易しいと思っただけの出題だったのですが、作図ということで定規とコンパスを用いた作図が必要だと思わせてしまったとすると出題者の配慮不足でした。問題文中には「(条件を満たす) 2つの円を描きなさい (free-hand でよい)」として定規とコンパスを用いた作図を求める意図はなかったため、ここで作図法で悩んでしまった人には申し訳ないです。ごめんなさい。実際に定規とコンパスで作図するとすれば、半径を計算で求めた上で辺の内分を作図でしなければならず、かなり手間がかかります。こちらの意図としては、(2)の結果+図を描くことによって2つの円の半径が斜辺と直角で長さが等しいから長方形ができる、ということに気が付くと後の式が処理しやすいと考えての出題でした。

作図の採点については、角の2等分線上に円の中心があるということが図示できて、2つの円の半径がほぼ等しく描けてあれば2点与えています。が、(4)以降が出来ている人の中にも作図のなかった人が何人もいたので惜しいと感じました。円が描けていても円の中心が角の2等分線から明らかにずれている人、円が大きく三角形からはみ出ている人などには点は与えていません。

半径の計算については、(2)を使う方法のほかに面積を利用する方法、相似三角形を用いる方法など様々な方法があります。どの方法でも説明が十分であれば満点としています。また(1)のように式の形が違っていても正解の場合もありましたのでそれらの人は正解としています。

作図も含めた(3)の正解率は 13.0%でした。

(4) これ以降は $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ としています。(1)からこの形でもよかったのですが、これだと(2)は易しすぎではないでしょうか。(3)との違いは2つの円の半径でできる四角形が台形になるという点です。この場合は三平方の定理で円の中心から引いた垂線の辺との交点間の距離を求めればよい(類題はけっこう多く出題されています)ので(3)を参考にできると考えたのですが、誤答例としては、(3)の図に引きずられて四角形を長方形として考えた人が目立ちました。また、別解として、(3)と同じように面積を用いて考えた人もいました(その方法による正解者もありました)。この問題の正解率は 11.5%でした。

(5) 実質(4)と同様の計算を、円Oと円O₁の間で考えて関係式を作り、 r_1 をrの式で表すとよいのですが根号を含む2次方程式なので工夫が必要です。いずれにしてもけっこう計算が大変です。

こちらで当初考えた解答は、解答例のように $\sqrt{r_1} = t$ とおいて t についての2次方程式を解く方法ですが、皆さんの解答は移項して2乗することによって根号を消去して r_1 を求める方法が圧倒的に多かったです。ただし、(6)で $\sqrt{r_1}$ も使うので解答例のほうがあとあと楽です。この問題の正解率は2.5%でした。

(6) さすがに時間の制約もあり(6)の最後までできていた人はいませんでした。もう少し時間があればできた人もいたかもしれません。採点者としてはここまでやってくれたという点でも大したものだと感心してしまいました。残念ながら(6)の正解者はいませんが、何人か惜しいところまでいっていた人もいました。平面幾何の問題の中には今でも未解決問題やまだ知られてない定理が隠れている可能性もありますのでこれからもさらなる精進をお願いしたいと思います。

(北海道札幌旭丘高等学校 佐々木光憲)